33. Παράδες. διαιροῦνται εἰς 20, 10, 2 καὶ 1. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 32 παράδ. διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ ἥμισυ ἐκ τῶν 2 παράδων.

34. » διαιροῦνται εἰς 20, 10 καὶ 4· ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 30 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 4 παράδ. τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

35. » διαιροῦνται εἰς 20, 10 καὶ 5. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 30 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 5 παράδ. τὸ τέταρτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

36. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5 καὶ 1. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 35 παράδ., διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 5 παράδων.

37. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5 καὶ 2. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 35 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 2 παράδ. τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 10 παράδων.

38. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5, 2 καὶ 1. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 37 παράδ. διὰ δὲ τὸν 1 παρὰν τὸ ἥμισυ ἐκ τῶν 2 παράδων.

39. » διαιροῦνται εἰς 20, 10, 5 καὶ 4. ὡς ἡ διαίρεσις τῶν 35 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 4 παράδ. τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 20 παράδων.

Ὠφελιμώτερον εἶναι, ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς 39 παράδ. ὡς ἀκέραιον Γρόσι, πλὴν ἑνὸς παρὰ, καὶ ἐκλάβωμεν τὸν Πολλαπλασιαστέον διὰ τόσους παράδας ὀλιγώτερον.

§. 152.

Διαίρεσις τῶν Λοτίων ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τῶν 31 Λοτίων.

1. Λότι, εἶναι τὸ τριακοστὸν δεύτερον μέρος τοῦ Φουντίου, καὶ ἀνεπίδεκτον διαιρέσεως· διὰ τοῦτο

διαιροῦμεν τὸν Πολλαπλασιαςέον διὰ τῶν 32
καὶ προκύπτουσι Φούντια.

2. Λότια· εἰσὶ τὸ δέκατον ἕκτον μέρος τοῦ Φουντίου· διὸ καὶ ἀνεπίδεκτα διαιρέσεως.

3. » διαιροῦνται εἰς 2 καὶ 1.

† 4. » ὅμοιον, ἤτοι τὸ ὄγδοον τοῦ Φουντίου, καὶ διαιροῦμεν διὰ τῶν 8.

5. » διαιροῦνται εἰς 4 καὶ 1.

6. » διαιροῦνται εἰς 4 καὶ 2.

7. » διαιροῦνται εἰς 4. 2 καὶ 1.

8. » ὅμοιον, ἤγουν τέταρτον τοῦ Φουντίου, καὶ διαιροῦμεν μὲ 4.

9. » διαιροῦνται εἰς 8 καὶ 1.

10. » » » 8 καὶ 2.

11. » » » 8, 2 καὶ 1.

12. » » » 8 καὶ 4.

13. » » » 8, 4 καὶ 1.

14. » » » 8, 4 καὶ 2.

15. » » » 8, 4, 2 καὶ 1.

† 16. » ὅμοιον, ἤτοι ἥμισυ Φουντι· ὅθεν διαι. μὲ 2.

17. » διαιροῦνται εἰς 8, 8 καὶ 1.

18. » » » 16 καὶ 2.

19. » » » 16, 2 καὶ 1.

20. » » » 16 καὶ 4.

21. » » » 16, 4 καὶ 1.

22. » » » 16, 4 καὶ 2.

23. » » » 16, 4, 2 καὶ 1.

24. » » » 16 καὶ 8.

25. » » » 16, 8 καὶ 1.

26. » » » 16, 8 καὶ 2.

27. Λότια· διαιροῦνται εἰς 16, 8, 2 καὶ 1.
28. » » » 16, 8 καὶ 4.
29. » » » 16, 8, 4 καὶ 1.
30. » » » 16, 8, 4 καὶ 2.
31. » » » 16, 8, 4, 2 καὶ 1.

Τῆς Διαιρέσεως Ὑποδείγματά τινα.

§. 153.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζόμενα 525 μὲ 23 λότια, πόσα Φούντια ἔξομεν;

Λύσις.

	23 λότια	× 525.
διαιροῦνται εἰς	16	℔ 262,, 16 λότια
	4	65,, 20 —
	2	32,, 26 —
	1	16,, 13 —
	ςαίνουσι	℔ 377,, 11 λότια.

Ἑρμηνεία. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 525 μὲ 23 λότια, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τῶν 23, διὰ νὰ προκύψωσι τὰ ζητούμενα Φούντια, διηρέσαμεν τὰ 23 λότια εἰς 16, 4, 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τὰ 16 λότια (τὰ ὁποῖα ποιοῦσιν ἥμισυ Φοῦντι), ἐδιαιρέσαμεν τὰ 525 διὰ τῶν 2, καὶ προέκυψαν ℔ 262,, 16 λότια· διὰ δὲ τὰ 4 λότια, ἐλάβομεν τὸ τέταρτον ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 16 λοτίων, ὅ ἐςὶν, ἐκ τῶν ℔ 262,, 16 λοτίων, διὰ δὲ τὰ 2 λότια, ἐλάβομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 4 λοτίων, ἤτοι ἐκ τῶν ℔ 65,, 20 λοτίων, καὶ διὰ τὸ 1 λότι, ἐλάβομεν ὁμοίως τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 λοτίων, ἤγουν ἐκ τῶν ℔ 32,, 26 λοτίων, καὶ οὕτως ἔφερον ὁμοῦ ℔ 377,, 11 λότια.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 πήχη ὑφάσματός τινος τιμᾶται 27 παράδες, πόσα Γρόσια πληρωθήσονται διὰ πήχας 638;

Λύσις.

	27 ×	638	
	20 Γρόσ.	319,, —	
	4 —	63,, 32	παράδες
	2	31,, 36	—
	1	15,, 38	—
ςαίνουσι	Γρόσ.	430,, 26	παράδες.

Ἑρμηνεία. Διαιροῦμεν τοὺς 27 παράδες εἰς 20, 4, 2 καὶ 1, καὶ διὰ μὲν τοὺς 20 παράδες, ὡς ἥμισυ γρόσι, διαιροῦμεν τὰ 638 διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 319,,—, διὰ δὲ τοὺς 4 παράδες, ὡς πέμπτον μέρος τῶν 20 παράδων, διαιροῦμεν τὴν ποσότητα αὐτῶν, ἤγουν τὸ Γρόσ. 319,,—, διὰ τῶν 5, καὶ προκύπτουσι Γρόσια 63,, 32 παράδες, διὰ τοὺς 2 παράδες, ὡς ἥμισυ μέρος τῶν 4 παράδων, διαιροῦμεν τὴν ποσότητα αὐτῶν, ἤτοι τὰ Γρόσια 63,, 32 παράδες, διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι Γρόσια 31,, 36 παράδες, καὶ διὰ τὸν 1 παρὰν, ὡς ἥμισυ μέρος τῶν 2 παράδων, διαιροῦμεν ὡσαύτως τὴν ποσότητα αὐτῶν, τοῦτ' ἔςι, τὰ Γρόσια 31,, 36 παράδες, διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι Γρόσια 15,,38 παράδες, τὰ ὁποῖα ἀθροιζόμενα μετὰ τῶν λοιπῶν, δίδουσι τὸ Ζητούμενον, ὡς ἀνωτέρω.

§. 134.

Ὁμοίως πράττομεν καὶ ὅταν δοθῶσιν ἔτι μικρότερα Εἴδη, φέρ' εἰπεῖν, παράδες καὶ ἄσπρα, καὶ ἕτερα τοιαῦτα, ὡς ἑπομένως.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 ὀκᾶ ἑνὸς Πράγματος τιμᾶται διὰ 17 παράδες καὶ 1 ἄσπρον, πόσα Γρόσια πληρωθήσονται δι' ὀκάδας 625;

Λύσις.

παράδες 17 „ 1 ἄσπρον	× 625	
8	Γρόσ. 125 „ —	
8	— 125 „ —	
1	— 15 „ 25	παράδες
1 ἄσπρον	5 „ 8	— „ 1 ἄσπρον.
ςαίνουσι	Γρόσια 270 „ 33	παράδ. „ 1 ἄσπρον.

Ἑρμηνεία. Οἱ 17 παράδες διηρέθησαν εἰς 8, 8, καὶ 1 παρὰν, διὰ τοὺς ὁποίους ἐδιαιρέσαμεν ὡς σύνηθες· διὰ δὲ τὸ 1 ἄσπρον, ἐλάβομεν τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῆς Ποσότητος τοῦ 1 παρᾶ, καὶ οὕτω προέκυψε τὸ Ζητούμενον.

§. 155.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 πήχη τιμᾶται διὰ παράδες 39, πόσα πληρωθήσονται διὰ 39 πήχας;

Λύσις.

	Γρόσια 39 „ —	
ἀφαιροῦνται	— . . „ 39	παράδες
ςαίνουσι	Γρόσια 38 „ 1	παρὰν.

Ἑρμηνεία. 39 πῆχαι, ἑκάςη ἀνὰ 39 παράδας, ςαίνουσι Γρόσια 39 „ —, πλὴν 39 παράδων· λοιπὸν ἀφαιροῦμεν ἐκ τῶν 39 Γροσίων ἁπλῶς 39 παράδες (ὡς §. 151. παρὰ τοῖς παράδοις 39.)

§. 156.

Ἐὰν μετὰ τῶν μικροτέρων Εἰδῶν δοθῇ καὶ τὸ μέγιςον

Εἶδος (ἐφ' ᾧ κυρίως τὸ Γινόμενον ζητεῖται), τότε πολλαπλασιάζομεν πρότερον μὲ τὸ μέγιςον Εἶδος ὡς συνήθως, εἶτα διαιροῦμεν τὰ μικρότερα εἴδη, καὶ πράττομεν ὡς καὶ μέχρι τοῦδε. Παραδ. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ πολλαπλασιάσωμεν Γρόσ. 32,, 32 παράδ.,, 2 ἄσπρα μὲ 256, ἐνταῦθα πράττομεν ὡς ἑπομένως.

Γρόσ. 32,, 32 παράδ. 2 ἄσπρα	× 256
20	32
10	512
2	768
ἄσπρα 2	128,, —
	64,, —
	15,, 32 παράδ.
	4,, 10 —,, 2 ἄσπρα.
ςαίνουσι Γρόσ.	8401,, παράδ.,, 2 ἄσπρα.

Ἑρμηνεία. Πρότερον πολλαπλασιάζομεν τὰ 256 μὲ τὰ γρόσια 32 (ὧν τὰ Παραγόμενα δὲν τὰ ἀθροίζομεν ἕως ὅτου νὰ προςεθῶσι καὶ τὰ τῶν παράδων), ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς 32 παράδ. εἰς 20, 10 καὶ 2, καὶ διαιροῦμεν ὡς μέχρι τοῦδε· διὰ δὲ τὰ 2 ἄσπρα, λαμβάνομεν τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῆς ποσότητος τῶν 2 παράδ., διότι 2 παράδ. ποιοῦσιν 6 ἄσπρα, τὰ δὲ 2 ἄσπρα, εἰσὶ τὸ τρίτον μέρος τῶν 6 ἄσπρων.

§. 157.

Ἐὰν δοθῶσι, φέρ' εἰπεῖν, μόνον Γρόσια καὶ ἄσπρα, παράδες δὲ οὐχὶ, ἐξ ὧν ἐδύναντο νὰ ληφθῶσι τὰ ἄσπρα, τὰ ὁποῖα, ἐὰν ληφθῶσιν, ὡς μέρη Γροσίου, προκύπτει μεγάλος Διαιρέτης, τότε γίνεται ἡ λύσις εὐκολώτερον κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 Καντάρι τιμᾶται διὰ Γρόσ. 25,, — 1 ἄσπρον, πόσα πληρωθήσονται διὰ Καντάρια 253;

Λύσις.

Γρόσ. 25 ,, — 1 ἄσπρον × 253
25
———
1165
506
2 Γρόσ. 4 παρ. 1 ἄσπ.
———
ϛαίνουσι Γρόσ. 6227 ,, 4 παρ. ,, 1 ἄσπ.

†. 3 εἰς 253
———
4(0 εἰς 8(4 παράδ. 1 ἄσπρον.
———
ϛαίνουσι Γρόσ. 2 ,, 4 παράδ. ,, 1 ἄσπρον.

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν, ὡς σύνηθες, τὰ 253 μὲ τὰ Γρόσια 25, ἔπειτα, διὰ τὸ 1 ἄσπρον, μεταφέρομεν τὰ 253 εἰς παράδες, τοὺς δὲ παράδες εἰς Γρόσια, ὡς ἀνωτέρω †., καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 2 ,, 4 παράδ. ,, 1 ἄσπρον, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν ὁμοῦ μὲ τὰ παραγόμενα τῶν 25 Γροσίων, ὡς ἀνωτέρω. Ἡ πρᾶξις τοῦ 1 ἄσπρου ἐννοεῖται οὕτω· 253 Καντάρια ἀνὰ 1 ἄσπρον, ποιοῦσι 253 ἄσπρα, τὰ ὁποῖα διὰ τῆς Ἐπαναγωγῆς μεταφέραμεν εἰς τὰ μεγαλήτερα αὐτῶν Εἴδη. Ἐὰν τὸ 1 ἄσπρον ἐλαμβάνετο ὡς μέρος Γροσίου, ἔπρεπε νὰ διαιρέσωμεν τὰ 253 διὰ τῶν 120, ἐπειδὴ ἓν Γρόσι συνίϛαται ἀπὸ 120 ἄσπρων, καὶ ἤθελον προκύψει Γρόσ. 2 ,, — 13 ἄσπρα, ὅ ἐϛὶ, 4 παράδ καὶ 1 ἄσπρον, ὡς ἀνωτέρω.

§. 158.

Ἐὰν ὅτε Πολλαπλασιαϛὴς καὶ ὁ Πολλαπλασιαϛέος εἰσὶ μικτοὶ Ἀριθμοὶ, φέρ' εἰπεῖν, νὰ πολλαπλασιασθῶσι καισσαροβασιλικὰ φιορίνια 5 καὶ 24 κραϊτζάρια μὲ ℔ 22 ,, 12 λότια κτλ., τότε γίνεται ἡ ἐργασία εὐκολώτερον, ὡς τὰ ἑπόμενα Παραδείγματα δεικνύουσιν.

Πρόβλημα. Ἐὰν 1 ℔ Πράγματός τινος τιμᾶται διὰ Φιορ᾿. 5 „ 24 κραϊζάρια, πόσα πληρωθήσονται διὰ ℔ 22 „ 12 λότια;

Λύσις.

Φιορ᾿. 5 „ 24 κραϊτζ. × ℔ 22 „ 12 λότ.

ἐκ τῶν 22 ℔ {12 / 12} Φιορ᾿. 5 / 110 „ — {8 / 4} ἐκ τῶν φιορ. 5 „ 24 κραϊτζ.

4 „ 24 κραϊτζάρια.
4 „ 24 — —
{1 „ 21 — —
{— „ 40 — — „ 2 φένιγ.

ςαινουσι Φιορ᾿. 120 „ 49 κραϊτζ. „ 2 φένιγ.

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὰ ℔ 22 μὲ 5 φιορ᾿., ὥσπερ νὰ μὴ ἦσαν τὰ 12 λότ. παρόντα, καὶ φέρουσι Φιορίνια. 110 „ —, ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ 24 κραϊτζάρια εἰς 12 καὶ 12 (12 κραϊτζάρια εἰσὶ τὸ πέμπτον μέρος τοῦ Φιορινίου, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ 60 κραϊτζαρίων) (α), καὶ διὰ μὲν τὰ δὶς 12 κραϊτζάρια διαιροῦμεν τὰ 22 ℔ διὰ τῶν 5, καὶ προκύπτουσι δὶς Φιορίνια 4 „ 24 κραϊτζάρια. Τελευταῖον διαιροῦμεν καὶ τὰ 12 λότ. εἰς 8 καὶ 4, καὶ λαμβάνομεν αὐτὰ ἐκ τῶν Φιορινίων 5 „ 24 κραϊτζαρίων, ὅ ἐςὶ, διὰ τὰ 8 λότ., τὰ ὁποῖα εἰσὶ τὸ τέταρτον τοῦ Φουντίου, διαιροῦμεν τὰ φιορίνια 5 „ 24 κραϊτζ. διὰ τῶν 4, καὶ προκύπτουσι Φιορίνια 1 „ 21 κραϊτζ., διὰ δὲ τὰ 4 λότ., ὄντα τὸ ἥμισυ μέρος τῶν 8 λοτίων, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἐκ τῆς Ποσότητος αὐτῶν, τοῦτ᾿ ἔςι, διαιροῦμεν τὰ Φιορίνια 1 „ 21 κραϊτζ. διὰ τῶν 2, καὶ προκύπτουσι 40 κραϊτζ. καὶ 2 φένιγ, ὡς ἀνωτέρω.

§. 159.

Σχόλιον. Τὰ 12 λότ. δὲν πρέπει νὰ μᾶς συγχύσωσι

(α) Τὸ φιορίνι ἂς ὑποτεθῇ ἐνταῦθα ὡς ἓν γρόσι, τὸ ὁποῖον ἔχει 60 παράδες, διὰ τὴν κατάληψιν τῶν εἰς φιορίνια δοθέντων ὑποδειγμάτων.

ποσῶς· ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθησαν μόνον ℔ 22 διὰ νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ Φιορίνια 5,, 24 κραϊτζ., τὰ ὁποῖα, πολλαπλασιαζόμενα ὡς συνήθως, φέρουσι τἀνωτέρω παραγέμενα Φιορίνια 110,, —, Φιορίνια 4,, 24 κραϊτζ., καὶ Φιορίνια 4,, 24 κραϊτζ., καὶ οὕτω λαμβάνει τέλος αὐτὸς ὁ λογαριασμός. Ἑπομένως ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθησαν 12 λότ. ἵνα πολλαπλασιασθῶσι μὲ Φιορίνια 5,, 24 κραϊτζ., τὰ ὁποῖα, ὡς ἰδιαίτερον Παράδειγμα, πολλαπλασιαζόμενα ὡς σύνηθες, φέρουσι Φιορίνια 2,, 1 κραϊτζ. 2 φένιγ· ἄρα τὰ 12 λότ. ὀρθῶς ἐλήφθησαν ἐκ τῶν Φιορινίων 5,, 24 κραϊτζ., ὧν ἡ λύσις ἕπεται κατωτέρω.

12 λότ.	× Φιορίνια 5,, 24 κραϊτζ.
8	Φιορίνια 1,, 21 κραϊτζ.
4	— —,, 40 — 2 φένιγ.
	Φιορίνια 2,, 1 κραϊτζ.,, 2 φένιγ.

§. 160.

Διὰ νὰ δείξωμεν δὲ εἰσέτι σαφεςέρως, ὅτι ὁ διὰ μιᾶς πολλαπλασιασμὸς τῶν μικτῶν Ἀριθμῶν ἔγινεν ὀρθῶς, ἰδοὺ πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως δύο ἀνὰ δύο Ἀριθμοὺς, ὥσπερ νὰ ἐδόθη ἕκαςον Παράδειγμα ἰδιαιτέρως, καὶ ἔπειτα ἀθροίζομεν τὰ Κεφάλαια αὐτῶν.

Φιορ. 5 × 22 ℔.	
5	
Φιορ. 110,, —	

24 κρ.	× 22 ℔.
12	Φιορ. 4,, 24 κρ.
12	— 4,, 24
	Φιορ. 8,, 48

12 λότ.	× 5 φιορ.
8	Φιορ. 1,, 15 κρ.
4	— — ,, 37 —,, 2 φένιγ.
	Φιορ. 1,, 52 κρ.,, 2 φένιγ.

λότ. 12	× 24 κρ.
8	6 κρ.
4	3 —.
	κρ. 9. $\frac{1}{2}$

Ἄθροισις.

Φ. 110 ,, —
    8 ,, 48 κ.
— — 1 ,, 52 — 2 φ'.
— — ,, 9 — —

Φ. 120 ,, 49 κ. 2 φ'.

§. 161.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζομένων Γροσίων 9 ,, 20 παράδ. μὲ Γρόσ. 6 ,, 16 παράδ. ,, 2 ἄσπρα, πόσον ἔσεται τὸ Παραγόμενον;

Λύσις.

Γρ'. 9 ,, 20 πρ'. × Γρ'. 6 ,, 16 πρ'. ,, 2 ἄσπρα.

πρῶτον μὲ . . . . . 9 (κατὰ τὸν §. 89.)

διὰ τὰς 20 πρ'. τὰ ½ ἐκ τῶν Γρ. 6 ,, 16 πρ'. 2 ἄσπρων.

ςαίνουσι Γρ'. 57 ,, 30 πρ'.
— 3 ,, 8 — ,, 1 ἄσπρ.

ὁμοῦ Γρ'. 60 ,, 38 πρ'. ,, 1 ἄσπρ.

Ἑρμηνεία. Διὰ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀνωτέρω Ἀριθμοὶ, δηλοῖ, νὰ αὐξηνθῶσι τὰ Γρόσ. 6 ,, 16 παράδ. ,, 2 ἄσπρα ἐννεάκις καὶ ἥμισυ, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ πρῶτον μὲ 9, καὶ δίδουσι Γρόσ. 57 ,, 30 παράδ., διὰ δὲ τοὺς 20 παράδ., ὄντες τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ Γροσίου, διαιροῦμεν τὰ Γρόσ. 6 ,, 16 παράδ. ,, 2 ἄσπρα, διὰ τῶν 2, καὶ δίδουσι Γρόσ. 3 ,, 8 παράδ. ,, 1 ἄσπρον, τὰ ὁποῖα ἀθροιζόμενα μετὰ τῶν ἀνωτέρω, προκύπτει τὸ ὁλόκληρον Κεφάλαιον.

Πρόβλημα. Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι Γρόσ. 18 ,, 25 παράδες μὲ Γρόσ. 35 ,, 24 παράδες, πόσον ἔςαι τὸ Παραγόμενον;

Λύσις.

Γρόσ. 18 ,, 25 παράδ. ×	Γρόσ. 35 ,, 24 παράδ.
3. 20	3
6. 5	Γρόσ. 106 ,, 32 παράδες
	6
	Γρόσ. 640 ,, 32 παράδες
	17 ,, 32 —
	4 ,, 18 —
ὁμοῦ	Γρόσ. 663 ,, 2 παράδες

Ἑρμηνεία. Διὰ νὰ γένῃ ἡ ἐργασία κατὰ τὸν ἀπέναντι §, δηλονότι, πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ Γρόσ. 35 ,, 24 παράδες μὲ Γρόσ. 18 ,, —, καὶ ἔπειτα μὲ παράδες 25, διαιροῦμεν τὰ 18 εἰς 3 καὶ 6, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσ. 35 ,, 24 παράδες πρῶτον μὲ 3, μετέπειτα τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν, ἤτοι τὰ Γρόσ. 106 ,, 32 παράδες μὲ 6, καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 640 ,, 32 παράδες· μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τοὺς 25 παράδες εἰς 20 καὶ 5, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν Γροσίων 35 ,, 24 παράδων, ὡς συνήθως.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ μέγιςον Εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ εἶναι σύνθετος Ἀριθμὸς, διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς τοὺς συνθέτους Ἀριθμούς του, καὶ πολλαπλασιάζομεν εὐκολώτερον, ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζομένων Γροσίων 23 ,, 12 παράδων μὲ Γρόσια 39 ,, 30 παράδες, πόσον ἔσεται τὸ Παραγόμενον;

Λύσις.

		Γρ. 23,, 12 πρ. × Γρ. 39,, πρ. 30		
ἐκ τῶν Γρ. 39,, —	8	23	20	ἐκ τῶν Γρ. 23,,
	4	117	10	12 παράδ.
		78		
	Γρόσ.	897,, —		
	—	7,, 32 παράδες		
	—	3,, 36 —		
	—	11,, 26 —		
	—	5,, 33 —		
	ςαίνουσι Γρόσια	926,, 7 παράδες.		

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσ. 23,, 12 παράδες μὲ 39 (ὥσπερ νὰ μὴ ἦσαν παρόντες οἱ 30 παράδες, καὶ μάλιςα διὰ τοῦτο, ἐπειδὴ τὰ Γρόσ. 23,, — δὲν διαιροῦνται εἰς μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς), ὅ ἐςὶ, πρότερον μὲ 23 Γρόσια, ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς 12 παράδες εἰς 8 καὶ 4, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν 39 Γρ. μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσια 23,, 12 παράδες μὲ τοὺς 30 παράδες, τοῦτ᾽ ἔςι, διαιροῦμεν τοὺς 30 παράδες εἰς 20 καὶ 10, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν Γροσίων 23,, 12 παράδων.

§. 162.

Ἡ Δοκιμὴ τῶν τοιούτων Πολλαπλασιασμῶν γίνεται, ὡς καὶ ἡ τῶν κοινῶν Πολλαπλασιασμῶν, διὰ τῆς Διαιρέσεως, ὅ ἐςὶ, διαιροῦμεν τὸ Κεφάλαιον μὲ ἕνα τῶν Πολλαπλασιαςῶν. Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον προκύπτει ὁ Διαιρέτης ἐξ ὀνομασμένων μικτῶν Ἀριθμῶν, περὶ οὗ ἐῤῥέθη εἰς τὸν §. 121. Διὰ νὰ προκύψῃ λοιπὸν ὁ τοιοῦτος Διαιρέτης, πρέπει νὰ ἀναλυθῶσιν ὅλοι οἱ δοθέντες Ἀριθμοὶ εἰς τὴν ὀνομασίαν τοῦ παρευρισκομένου μικροτάτου Εἴδους, ἵνα ἔχωμεν Ἀριθμὸν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Εἴδους· διότι μὲ μικτοὺς Ἀριθμοὺς δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν. Θετέον· μᾶς ἐδόθη νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν Γροσίων 8,,7 παράδων, ἐνταῦθα πρέπει νὰ ἀναλυθῶσιν ὅλα εἰς παράδες, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν μὲ τοὺς προκύψαντας 327 παράδας, ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀδύνατον διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἐν ταὐτῷ μὲ γρόσια καὶ παράδες, διότι, ὡς γνωςὸν, μόνον ὅμοιον εἰς ὅμοιον ἐμπεριέχεται· διὰ τοῦτο εἰς τοιαύτας πτώσεις, πρέπει νὰ ἀναλυθῇ καὶ ὁ Διαιρετέος εἰς τὰς αὐτὰς ἰδίας Μονάδας, ἐξ ὧν σύγκειται καὶ ὁ Διαιρέτης, ὅ ἐςὶ, πρέπει νὰ φέρωμεν τόντε Διαιρέτην καὶ τὸν Διαιρετέον ὑπὸ ὁμοίαν Ὀνομασίαν.

Εἰς τὸ ἀπέναντι Παράδειγμα, ὅπου ἐπολλαπλασιάσαμεν τὰ Γρόσια 23,, 12 παράδες μὲ Γρόσια 39,, 30 παράδες, καὶ προέκυψε Κεφάλαιον Γρόσια 926,, 7 παράδες, γίνεται ἡ Δοκιμὴ, ὡς ἑπομένως.

Γρ. 23,, 12 πρ. εἰς Γρ. 926,, 7 πρ.

```
  40                  40
 ----               ------
 932 εἰς . . .      37047       | Γρ. 39,, 30 πρ.
                  ,,9087
                   ,,699
                      40
                  ------
                   27960
                    ....
                      O
```

Ἑρμηνεία. Ἐπειδὴ ὁ ἐνταῦθα Διαιρέτης σύγκειται καὶ ἐκ παράδων, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Γρόσια μὲ 40, καὶ νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς παράδες, καὶ οὕτως ἀντὶ τοῦ Διαιρέτου ἐκ Γροσίων 23,, 12 παράδων, προκύπτει ἕτερος ἐξ 932 παράδων, ἐπειδὴ δὲ μόνον παράδες εἰς παράδες ἐμπεριέχονται, διὰ τοῦτο εἶναι ἑπόμενον νὰ ἀναλυθῇ καὶ ὁ ἐκ Γροσίων 926,, 7 παράδων συνιςάμενος Διαιρετέος ὡσαύτως εἰς παράδες.

§. 163.

Σχόλιον. Διατὶ εἰς τοιαύτας πτώσεις, καθὼς εἰς τὴν Δοκιμὴν τοῦ ὄπισθεν §., προκύπτουσι Γρόσια εἰς τὸ Παραγόμενον, καὶ διατὶ ἐφεξῆς ἀναλύεται τὸ Ὑπόλοιπον 699 παράδ. μὲ 40 εἰς παράδες, καίτοι παράδες ὄντες, τοῦτο λεχθήσεται ἐπομένως εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν, ὅταν δηλαδὴ ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι Γρόσια· μ' ὅλον τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν καὶ ἐνταῦθα, ὅτι μᾶς ἐδόθησαν νὰ λογαριάσωμεν, φέρ' εἰπεῖν, πόσον κέρδος φέρουσι τὰ Γρόσ. 926 ,, 7 παράδ., ἐὰν Γρόσ. 23 ,, 12 παράδ. ἐκέρδεσαν 1 Γρόσι, ἡ ὁποία πρᾶξις ἔπρεπε νὰ γένῃ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, καὶ νὰ προκύψῃ Παραγόμενον Γρόσ. 39 ,, 30 παράδ. Πλὴν μὴ οὖσα αὕτη ἡ ἑρμηνεία ἐνεςῶσα, ἀλλὰ μέλλουσα, διὰ τοῦτο παραιτοῦμεν αὐτήν· ἐπειδὴ ὁ σκοπός μας ἀποβλέπει ἤδη, ἵνα δείξωμεν, πῶς δύναταί τις νὰ διαιρέσῃ μὲ ὠνομασμένους μικτοὺς Ἀριθμοὺς, διὰ νὰ δυνάμεθα ἐν τῷ δέοντι καιρῷ νὰ πράττωμεν ταύτην τὴν πρακτικὴν Χρῆσιν.

Ἐν γένει οὕτως ἐννοητέον τὸ, πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν μὲ ἕνα ὠνομασμένον Ἀριθμὸν, ὅτι μέλλει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν μὲ ἐκεῖνον τὸν (κυρίως ἀνώνυμον) Ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει, ποσάκις πρόκειται τοῦτο ἢ ἐκεῖνο τὸ ὠνομασμένον Ἀντικείμενον· χωρὶς ὅμως νὰ ἔχῃ τινὰ ὀνομασίαν καὶ ὁ Ἀριθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, ἢ διαιροῦμεν. Παρ. χ. ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν πόσα πληρωθήσονται διὰ 36 πήχας, ἐὰν ἑκάςη πήχη τιμᾶται διὰ Γρόσ. 6 ,, —· ἐνταῦθα μᾶς διδάσκει ὁ ὀρθὸς λόγος, ὅτι ἔξομεν τὸ Ζητούμενον ἐκ 36 κις ἀνὰ Γρόσ. 6 ,, —, διὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 36 πήχας μὲ Γρόσ. 6 ,, —, ὅ ἐςι, τὸν Ἀριθμὸν τῶν Γροσίων μὲ τὸν Ἀριθμὸν τῶν Πηχῶν· οὐδαμῶς ὅμως γίνεται οὕτω, καθὼς ἐπιπολαίως θεωρούμενον φαίνεται, ὅτι πολλαπλασιάζομεν Γρόσια μὲ Πήχας· ἐπειδὴ διὰ ν' αὐξηνθῇ μία ὀνομασία διὰ μιᾶς ἑτέρας ὀνομασίας εἶναι τοσοῦτον ἀκατάληπτον, ὅσον εἶναι μηδὲν τοῦ νὰ διαιρεθῇ μία ὀνομασία διὰ μιᾶς ἑτέρας, τὸ ὁποῖον γίνεται, ὅταν δοθῇ καὶ ἡ ποσότης τοῦ Ἀντικειμένου. Ὅθεν ὅταν εἰπῶμεν, μένοντες ἤδη εἰς τὸ ἀπέναντι Παράδειγμα, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 36 πήχας μὲ Γρόσ. 6,, — δηλοῖ, ὅτι τὰ Γρόσ. 6,, — μέλλει ν' αὐξηνθῶσι 36 κις, διότι αἱ Πῆχαι, ὧν τὴν ποσότητα εἰς Γρόσια ζητοῦμεν, εἰσὶ 36· λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν, ὡς ἐῤῥέθη, μὲ ἐκεῖνον τὸν ἀδιόριςον Ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει, ποσάκις πρόκειται τὸ ὠνομασμένον Ἀντικείμενον, τοῦ ὁποίου τὴν τίμησιν ζητοῦμεν. Ὁμοίως πράττομεν καὶ εἰς τὸν ἀνάπαλιν τρόπον, ὅταν εἶναι ὁ λόγος περὶ διαιρεῖν μὲ ἕνα ὠνομασμένον Ἀριθμὸν· φέρ' εἰπεῖν, μᾶς εἶναι γνωςὸν, ὅτι δὶ 7. πήχας ἐπληρώθησαν Γρόσ. 42,, —, καὶ θέλομεν νὰ ἠξεύρωμεν πόσα τιμᾶται μία πήχη ἐξ αὐτῶν, τότε μᾶς δειδάσκει ὁ ὀρθὸς λόγος, ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν Ποσότητα τῶν Χρημάτων εἰς 7 ὅμοια μέρη, ὅ ἐςὶ, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 7, δηλαδὴ, δὶ ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ (ἄνευ ὀνομασίας), ὅστις δεικνύει, ποσάκις πρόκειται τὸ ὠνομασμένον Ἀντικείμενον, ὅπερ ἐνταῦθα εἰσὶν αἱ Πῆχαι.

Ἐν γένει ταὐτὸν ἐννοητέον καὶ εἰς τοὺς ὠνομασμένους μικτοὺς Ἀριθμοὺς, ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ νὰ διαιρέσωμεν, φέρ' εἰπεῖν, μὲ Γρόσ. 4,, 15 παράδ., μὲ ὀκάδ. 5,, 12 δράμια, ἢ μὲ ἄλλους ὁποιουσδήποτε μικτοὺς Ἀριθμοὺς, μηδὲν ἄλλο δηλοῖ, ἀλλ' ὅτι πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν μὲ ἕνα τοιοῦτον Ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει, πόσα Γρόσια ἢ Ὀκάδες πρόκεινται, ἐφ' ὅσον οἱ παρευρισκόμενοι Παράδες θεωροῦνται ὡς μέρη Γροσίου, καὶ τὰ παρευρισκόμενα Δράμια ὡς μέρη Ὀκάδος· ἢ πόσοι παράδες, ἢ δράμια πρόκεινται, ἐφ' ὅσον θεωροῦνται καὶ τὰ Γρόσια ὡς μία Ποσότης Παράδων, καὶ αἱ Ὀκάδες ὡς μία Ποσότης Δραμίων, χωρὶς ὁ Πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ Διαιρέτης νὰ ἔχῃ δι' ἑαυτὸν Γροσίων, Παράδων, Ὀκάδων, Δραμίων, ἢ ἄλλην ὁποιανδήποτε Ὀνομασίαν.

§. 164.

Πρὸς περισσοτέραν σαφήνειαν, ἰδοὺ καὶ τοιαῦτα Παραδείγματα.

Α΄.

```
Τὰ Γρ΄.6,,16 πρ΄.,,2 ἄσπ., νὰ διαιρ΄. τὰ Γρ΄.60,,38 πρ΄.,,1 ἄσπ.
       40 . :     :                      40 . :       :
      ------                            -------
      256         :                     2438          :
         3 . . . .:                        3 . . . .  :
      ------                           ---------
      770 . . . . . . . . . . . . . . . 7315 |Γρ΄. 9,,20πρ΄.
                                       ,,385
                                          40
                                       -------
                                        15400
                                        . . .
                                            0
```

Β΄.

```
Τὰ Γρ΄. 15,, - 2 ἄσπρα, νὰ διαιρ΄. τὰ Γρ΄. 14416,, -
          40   :                              40
      --------                         ----------
         600   :                          576640
           3 ..:                               3
      --------                        -----------
        1802 εἰς . . . . . . . . . . . 1729920 | 960 Παλ.
                                       ,,10812
                                        . . . . .
                                               0
```

Ἐπειδὴ εἰς τὸν ἀπέναντι Διαιρέτην εὑρίσκονται καὶ ἄσπρα, διὰ τοῦτο πρέπει ὅλος ὁ Διαιρέτης νὰ ἀναλυθῇ εἰς Ἄσπρα, ὡσαύτως καὶ ὁ Διαιρετέος, καίτοι συνιςάμενος μόνον ἐκ Γροσίων.

Σημείωσις. Τὸ Πηλίκον 960 δηλοῖ, ὅτι ὁ Διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν Διαιρετέον 960 φοραῖς· τί παριςάνουσιν ὅμως τὰ 960, κρέμαται ἐκ τῆς ἐρωτήσεως τοῦ Προβλήματος, ἂν αὐτὰ μέλλωσι νὰ θεωρηθῶσι διὰ Πήχας, Ὀκάδας, Γρόσια, ἢ ὅ,τι ἄλλο, καὶ οὕτω νὰ ἀναλυθῇ τὸ τυχὸν Ὑπόλοιπον μὲ 40 εἰς παράδες, ἢ μὲ 400 εἰς δράμια κτλ. Ταῦτα πάντα θέλει πληροφορηθῶμεν ἔπειτα, ὅπου μέλλουσι νὰ ἐξεργασθῶσι τοιαῦτα Παραδείγματα.

§. 165.

Σχόλιον. Ὅλοι οἱ τοιοῦτοι Πολλαπλασιασμοὶ καὶ Διαιρέσεις, μάλιςα δὲ ἡ τελευταία, ἐκτελοῦνται πολλάκις ἔτι κατὰ διαφόρους εὐκολωτέρους καὶ συντομωτέρους τρόπους, περὶ ὧν ῥηθήσεται τότε, ἀφ' οὗ πρότερον εἰπῶμεν τὰ ἀναγκαῖα περὶ τῶν κλασμάτων. Περὶ τοῦ πόσον τιμᾶται ὅμως, καὶ πῶς ἐκφωνεῖται τὸ Ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται πλέον νὰ ἀναλυθῇ, ἂς ἴδωσιν οἱ Ἀναγνῶςαι εἰς τὸ ἐπόμενον Μέρος, ὅπου πραγματεύονται τὰ τοιαῦτα.