ΚΕΦ. Ε΄.

Περὶ Διαιρέσεως ἐν ἀκεραίοις Ἀριθμοῖς.

§. 91.

Ἡ Διαίρεσις μᾶς διδάσκει νὰ διαιρῶμεν ἕκαστον Ἀριθμὸν εἰς ὁποσαδήποτε ὅμοια μέρη, καὶ νὰ φανερόνωμεν τὸ Ποσὸν ἑνὸς μέρους, τουτ᾽ ἔστιν, ὁσάκις εἷς Ἀριθμὸς, ἀφαιρούμενος ἀφ᾽ ἑτέρου, ἐμπεριείχετο ἐκείνῳ.

§. 92.

Εἰς τὴν Διαίρεσιν οὖν ἐπιζητοῦνται κυρίως δύο Ἀριθμοί· ὁ πρῶτος ὀνομάζεται Διαιρέτης, ἢ Μεριστής· ὁ δεύτερος Διαιρετέος, ἢ Μεριζόμενος, καὶ Διαιρέτης μὲν καλεῖται ὁ Ἀφαιρούμενος, ἤτοι ὁ δεικνύων εἰς πόσα ἴσα μέρη μέλλει νὰ διαιρεθῇ εἷς Ἀριθμὸς· Διαιρετέος δὲ, ὅς τις μέλλει νὰ διαιρεθῇ, ἤτοι ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ἀφ᾽ οὗ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται. Ἐκ τούτων τῶν δύο προκύπτει καὶ τρίτος Ἀριθμὸς· ὅς τις λέγεται Πηλίκον, τὸ ὁποῖον φανερόνει, ποσάκις ὁ Διαιρέτης ἀφῃρέθη τοῦ Διαιρετέου, εἴτουν ὁσάκις ἐμπεριείχετο εἰς ἐκεῖνον. Παραδ. χάριν ὁ Ἀριθμὸς 48 διαιρούμενος εἰς 6 ὅμοια μέρη, δίδει εἰς ἕκαστον μέρος 8· λοιπὸν ὁ 48 ἐνταῦθα εἶναι Διαιρετέος· ὁ 6 Διαιρέτης· καὶ ὁ 8 Πηλίκον. Ἴδε εἰς τὸν §. 75.

§. 93.

Διὰ νὰ βάλλωμεν λοιπὸν εἰς πρᾶξιν ταύτην τὴν Διαίρεσιν, ζητοῦμεν μόνον ἵνα μάθωμεν ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ δοθεὶς Διαιρέτης εἰς τὸν δοθέντα Διαιρετέον· ὁ δὲ προκύψας Ἀριθμὸς εἶναι τὸ, ὅπερ λαμβάνει ἕκαστον μέρος. Φέρ᾽ εἰπεῖν, μᾶς ἐδόθησαν νὰ διαιρέσωμεν 48 μὲ 6· ἐνταῦθα ζητοῦμεν μόνον, ποσάκις ἐμπεριέχονται τὰ 6 εἰς τὰ 48· καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ 6 εἰς τὰ 48· ἐμπεριέχονται ὀκτάκις, ἄρα λαμβάνει ἕκαςον μέρος 8, καὶ οὕτως ἐλύθη τὸ Πρόβλημα.

Δεῖξις.

Διότι διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς ἕκαςον μέρος 1, ἐπιζητεῖται τοσάκις 1, ὅσα εἰσὶ τὰ διαιροῦντα μέρη· εἰς τὸ ἐδικόν μας Ὑπόδειγμα, ὅπου πρέπει νὰ γίνωσιν 6 ὅμοια μέρη, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν πάντοτε 6, διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς ἕκαςον μέρος 1, ἄρα ἐκ τῶν 48 λαμβάνει ἕκαςον μέρος τοσάκις 1, ὁσάκις ἐμπεριέχονται τὰ 6 εἰς τὰ αὐτὰ 48.

§. 94.

Ἡ Βάσις οὖν τῆς Διαιρέσεως θεμελιοῦται κυρίως εἰς τὸ, πῶς δεῖ ἐρευνᾷν, ἵνα ἴδωμεν, ποσάκις εἷς Ἀριθμὸς ἐμπεριέχεται εἰς ἕτερον, ἐπειδὴ, ὡς προΐδομεν, διὰ μέσου τούτου ἀποτελεῖται ἡ ζητηθεῖσα μοιρασία.

§. 95.

Πρὶν ὅμως νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὸν ἴδιον περὶ τούτου προσδιωρισμένον Κανόνα, ἂς προειπῶμεν πρὸς θεμελιώδη κατάληψιν αὐτοῦ τὰς ἐννοίας, ἐξ ὧν ἐπήγασεν ὁ αὐτὸς Κανών.

Ὁσάκις εἷς Ἀριθμὸς ἐμπεριέχεται εἰς ἕτερον, τοσάκις δεῖ ἀφαιρεθῆναι ὁμοίως ἐξ αὐτοῦ. Ἐὰν εἶναι ἀληθὲς, ὅτι τὰ 8 ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 45 πεντάκις, εἶναι ἑπόμενον, ὅτι αὐτὰ τὰ πεντάκις 8, ἤτοι 40, δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ὡσαύτως ἐκ τῶν 45· ἄλλως δὲν ἐμπεριείχοντο τὰ 8 εἰς 45 πεντάκις. Δεδόσθω, ὅτι ἐξελάβομεν τὰ 8 ὡς περιεχόμενα εἰς τὰ 45 ἑξάκις, ἀλλ' ὅμως τὸ σφάλμα φανεροῦται εὐθὺς· διότι ἑξάκις 8, ἤτοι 48, δὲν δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ἐκ τῶν 45, ἄρα τὰ 8 δὲν ἐμπεριέχονται ἑξάκις εἰς τὰ 45.

§. 96.

Ἐν τούτῳ ἔχομεν ἤδη ἀσφαλῆ δοκιμὴν, ἂν ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς, ὅ ἐςὶ, ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν Διαιρετέον, δὲν εἶναι πάνυ μεγάλος· δηλονότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν προβληθέντα Ἀριθμὸν μετὰ τοῦ Διαιρέτου, ἵνα ἴδωμεν, ἂν τὸ Παραγόμενον αὐτῶν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ Διαιρετέου ἢ οὐχί.

§. 97.

Πλὴν διὰ μέσου τούτου μόνου οὐκ ἐσμὲν εἰσέτι πληροφορημένοι, ἂν ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς, τοὐτ' ἔςι, ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν Διαιρετέον, δὲν εἶναι πάνυ μικρός· διότι δεδόσθω, ὅτι εἴπομεν· 8 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται πεντάκις, τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω Δοκιμὴν, ἤθελεν εἶναι ἀναντιῤῥήτως ἀληθὲς, ἐπειδὴ πεντάκις 8, ἤτοι 40, δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ἐκ τῶν 57· μ' ὅλον τοῦτο ὅμως αὐτὸς ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς ἤθελεν εἶναι ψευδὴς, καὶ πάνυ μικρός· ἐπειδὴ τὰ 8 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται ἑπτάκις. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο τὸ λάθος βλέπομεν εὐθὺς· διότι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ Γινόμενον καὶ τὸν Διαιρέτην ἐκ τῶν 57 θέλει μείνει τόσον μεγάλον Ὑπόλοιπον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης ἔτι ἅπαξ, ἢ καὶ πλεονάκις, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάνυ μικρός. Ἐὰν λοιπὸν εἴπωμεν· 8 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται πεντάκις, καὶ ἀφαιρέσωμεν πεντάκις 8, ἤτοι 40, ἐκ τῶν 57, μένει ὑπόλοιπον 17, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης ἔτι δὶς, ἄρα ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάνυ μικρός.

§. 98.

Ὅθεν διὰ νὰ εἴμεθα κατὰ πάντα πληροφορημένοι, ὅτι ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς (δηλαδὴ ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν Διαιρετέον), δὲν ἐλήφθη οὔτε πάνυ μεγάλος, οὔτε πάνυ μικρὸς, ἀλλὰ ὀρθῶς, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν προβληθέντα Ἀριθμὸν μετὰ τοῦ Διαιρέτου, ἵνα ἴδωμεν ἂν τὸ Γινόμενον αὐτῶν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ Διαιρετέου. εἶτα πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν αὐτὸ τὸ Γινόμενον τῷ ὄντι, ἵνα ἴδωμεν, ἂν τὸ Ὑπόλοιπον (ἐὰν ἤθελε μείνῃ) εἶναι μικρότερον τοῦ Διαιρέτου, καὶ ἐπομένως δὲν περιέχεται πλέον ἐν αὐτῷ (α).

§. 99.

Ποσάκις ὅμως ἓν μοναδικὸν ψηφίον ἐμπεριέχεται εἰς ἕν, ἢ τὸ πλεῖστον εἰς δύο ψηφία, φέρ' εἰπεῖν, 8 εἰς τὰ 75, 6 εἰς τὰ 26 κτλ., ἐπιτυχαίνομεν ἄνευ δυσκολίας διὰ τοῦ Πίνακος, ἐξ οὗ μᾶς εἶναι γνωστὰ τὰ παραγόμενα ἐξ ὀκτάκις 9, τετράκις 6, τὰ ὁποῖα παριστάνονται εὐθὺς πρὸ ὀφθαλμῶν. Διὸ βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι τὰ 8 εἰς τὰ 75 ἐμπεριέχονται ἐννεάκις, ἐπειδὴ ηὑρήκαμεν, ὅτι ὀκτάκις 9 ποιοῦσι μόνον 72· πλέον ταχύτερον ἐπιτυχαίνομεν, ὅτι τὰ 6 εἰς τὰ 26 ἐμπεριέχονται τετράκις, διότι παριστάνεται εὐθέως εἰς τὸν νοῦν μας, ὅτι τετράκις 6 ποιοῦσι μόνον 24, τὰ ὁποῖα δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ 26· δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ φαντασθῶμεν, καὶ νὰ διορίσωμεν 6 εἰς 26 πεντάκις, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ πίνακος μᾶς εἶναι γνωστόν, ὅτι πεντάκις 6 ποιοῦσι 30, τὰ ὁποῖα δὲν ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 26. Ταῦτα μὲν περὶ τούτων ἱκανά· ἐπομένως δὲ ἂς δείξωμεν, πῶς διαιροῦνται μεγαλήτεροι Ἀριθμοί.

§. 100.

Γενικὸς Κανὼν τῆς Διαιρέσεως.

Ἡ Διαίρεσις ἄρχεται πάντοτε ἐκ τῆς ἀνωτάτης τάξεως ἀριστερῶς, λαμβάνομεν δὲ ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅ-

(α) Ἐνταῦθα δύναται ὁ Διδάσκαλος, πρὶν νὰ προχωρήσῃ περαιτέρω, νὰ προβάλλῃ ὠφελίμους, ἐρωτήσεις, δι' ὧν οἱ Διδασκόμενοι λαμβάνουσιν ἑτοιμότητα, καὶ εὐκολίαν ἐν τῇ Διαιρέσει. Ἐρωτησάτω, φέρ' εἰπεῖν· εἶναι ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς 28 εἰς 150 ὡς πεντάκις σα εἰσὶν ἀναγκαῖα ἵνα ἐμπεριέχηται ἐν αὐτοῖς ὁ Διαιρέτης, εἶτα ἀναζητῶμεν διὰ τοῦ πυθαγορικοῦ Πίνακος, ποσάκις ἐμπεριέχεται ἐν αὐτοῖς ὁ Διαιρέτης· δοκιμάζομεν ὅμως (κατὰ τὸν §. 98.) διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως, ἂν ὁ προβληθεὶς Ἀριθμὸς δὲν ἐλήφθη οὔτε πάνυ μεγάλος, ἀλλ' οὔτε πάνυ μικρός. Εἰς τὸ Ὑπόλοιπον, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς Ἀφαιρέσεως (ἢ εἶναι 0, ἢ σημαντικὸν ψηφίον), κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον ἐκ τοῦ Διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν πάλιν ὡς πρότερον. Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν τὴν Διαίρεσιν κατεβάζοντες ὀλίγον κατ' ὀλίγον ὅλα τὰ ψηφία τοῦ Διαιρετέου, ὅπου σημειωτέον, ὅτι καθὼς προχωρεῖ ἡ Διαίρεσις δεξιῶς, οὕτω νὰ τίθενται πρὸς τὸ δεξιὸν καὶ τὰ προκύπτοντα Παραγόμενα, διὰ τὰς αἰτίας, τὰς ὁποίας θέλομεν σαφηνίσει, ἀφ' οὗ δι' ἑνὸς Παραδείγματος ἐξηγήσωμεν πρότερον τὴν κατάσρωσιν καὶ ἐκτέλεσιν τοῦ ἤδη δοθέντος Κανόνος.

§. 101.

Περὶ ἁπλῆς Διαιρέσεως.

Ἁπλῆ διαίρεσις ὀνομάζεται, ὅταν ὁ Διαιρέτης ἔχῃ μόνον ἕνα Χαρακτῆρα (ψηφίον), σύνθετος δὲ, ὅταν ἔχῃ δύο, ἢ καὶ περισσοτέρους. Ὅθεν, ὅταν ὁ Διαιρέτης σύγκηται ἐξ ἑνὸς ψηφίου, διαιροῦμεν ἐν εὐκολίᾳ κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον.

Πρόβλημα. Ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Ἀριθμὸς 7 εἰς τὸν Ἀριθμὸν 8596;

περιεχόμενος πάνυ μεγάλος, ἢ πάνυ μικρὸς; πόθεν διαγινώσκεται τοῦτο; διατί οὕτως; Εἶναι ἑξάκις μεγάλος; καὶ πῶς; Εἶναι τετράκις μικρὸς; πόθεν διαγινώσκεται τοῦτο; κτλ.

Λύσις.

Μεριστής. 7	8596 Μεριζόμενος.	1228 Πηλίκον.
	7	
	15	
	14	
	19	
	14	
	56	
	56	
	0	

Ἑρμηνεία. Δεξιῶς καὶ ἀριστερῶς τοῦ Διαιρετέου συνεθίζεται διὰ νὰ σείρηται μία ὄρθιος γραμμή· ἀριστερῶς τίθεται ὁ Διαιρέτης, δεξιῶς δὲ τὰ προκύπτοντα Παραγόμενα (ἤτοι τὸ Πηλίκον)· εἶτα ἀρχίζομεν νὰ διαιρῶμεν ἀριστερῶς ἐν τῇ ἀνωτάτῃ τάξει, λέγοντες· τὰ 7 νὰ διαιρέσωσι τὰ 8 λαμβάνουσιν ἀνὰ 1, τὸ ὁποῖον 1 τίθεται πρόσω τῆς γραμμῆς δεξιῶς, καὶ πολλαπλασιάζεται μετὰ τοῦ Διαιρέτου 7, δηλονότι· 1 × 7 — 7, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 8 (δι' ἣν αἰτίαν ἐτέθεσαν ἀνωτέρω τὰ 7 ὑπὸ τῶν 8) μένει 1. Δεξιῶς αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου 1, κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 5, καὶ οὕτω προκύπτουσιν ἵνα διαιρέσωμεν 15, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν ὡς πρότερον, λέγοντες· 7 εἰς τὰ 15 ἐμπεριέχονται 2, τὰ ὁποῖα 2 τίθενται δεξιῶς πλησίον τοῦ ἤδη προκύψαντος 1, τοῦτ' ἔστι 2 × 7 — 14, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 15, μένει 1. Δεξιῶς αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου 1, κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον 9 ἐκ τοῦ Διαιρετέου, καὶ προκύπτουσιν ἵνα διαιρέσωμεν 19, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν ὡς πρότερον, λέγοντες· 7 νὰ διαιρέσωσι τὰ 19 λαμβάνουσιν ἀνὰ 2, ἅτινα τίθενται δεξιῶς πλησίον τῶν ἤδη προκυψάντων 2, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μετὰ τοῦ Διαιρέτου 7, καὶ ποιοῦσι 14, ἃ ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 19, μένουσι 5· μετὰ ταῦτα κατεβάζομεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 6, καὶ προκύπτουσι 56, ἅτινα διαιροῦμεν πάλιν, λέγοντες· 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 56, λαμβάνουσιν ἀνὰ 8, τὰ ὁποῖα τίθενται δεξιῶς πλησίον τῶν ἤδη προκυψάντων 2, εἶτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ μετὰ τοῦ Διαιρέτου 7, καὶ ποιοῦσι 56, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 56, μένει μηδὲν, καὶ οὕτω τελειόνει ἡ διαίρεσις, ἐπειδὴ δὲν ἔμεινε νὰ κατεβάσωμεν ἕτερον ψηφίον ἐκ τοῦ Διαιρετέου.

Δεῦξις.

Ἡ αἰτία δἰ ἣν ἄρχεται ἡ Διαίρεσις ἐκ τῆς ἀνωτάτης τάξεως, καὶ δἰ ἣν κατεβάζομεν τὰ ψηφία εἶναι ἡ ἀκόλουθος.

Διὰ νὰ μείνωμεν εἰς τὸ ἐδικόν μας ὑπόδειγμα (ἐπειδὴ ὅ,τι ἀποδείξομεν περὶ τούτου ταὐτὸν ἐννοεῖται τοῦ λοιποῦ καὶ εἰς ὁποιονδήποτε ἄλλον Ἀριθμὸν), λέγομεν· ἡ προκειμένου τοῦ Ἀριθμοῦ 8696 ἵνα διαιρεθῇ διὰ τῶν 9, δηλοῖ, ὅτι αἱ 8 χιλιάδες, 6 ἑκατοντάδες, 9 δεκάδες καὶ 6 μονάδες, μέλλει νὰ διαιρεθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη. Λοιπὸν ἕπεται ἵνα ἴδωμεν πόσας χιλιάδας, πόσας ἑκατοντάδας, πόσας δεκάδας, καὶ πόσας μονάδας λαμβάνει ἕκαςον μέρος, ὅ ἐςὶ, ποσάκις ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης (ἐνταῦθα ὁ 9.) εἰς ἑκάςην αὐτῶν τῶν τάξεων. Ὅθεν διαιροῦμεν πρῶτον τὴν ἀνωτάτην τάξιν (εἰς τὸ ἐδικόν μας ὑπόδειγμα τὰς χιλιάδας), ἐξ ἧς προκύπτει παραγόμενον 1· διότι τὰ 7 εἰς τὰ 8 ἐμπεριέχονται μόνον ἅπαξ, ἄρα μένει ὑπόλοιπον 1 χιλιὰς, ἡ ὁποία ὡς χιλιὰς δὲν διαιρεῖται πλέον εἰς 7 ὅμοια μέρη (ὡς §. 93. Δεῖξις.), δἰ ἣν αἰτίαν ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς ἑκατοντάδας, εἰς τὰς ὁποίας προςιθέντων καὶ τῶν ἑπομένων πρὸς διαίρεσιν δοθέντων 5 ἑκατοντάδων (ἐπειδὴ ἑκατοντάδας μέλλει νὰ διαιρέσωμεν), προκύπτουσι πρὸς διαίρεσιν 15 ἑκατοντάδες ἵνα διαιρεθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη· λοιπὸν τὰ 7 διαιροῦντα τὰ 15 λαμβάνουσιν ἀνὰ 2, ἄρα λαμβάνει ἕκαςον μέρος καὶ 2 ἑκατοντάδας· 2×7 ὅμως ποιοῦσι 14 ἑκατοντάδας, αἵτινες ἀφαιρούμεναι ἐκ τῶν 15 ἑκατοντάδων, μένει ὑπόλοιπον ἔτι 1 ἑκατοντὰς, ἡ ὁποία ὡς ἑκατοντὰς δὲν διαιρεῖται εἰς 7 ὅμοια μέρη, διὰ τοῦτο ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς τὴν πλησίον αὐτῆς κατωτέραν τάξιν, εἴτουν εἰς δεκάδας, καὶ οὕτω προκύπτουσι, μετὰ τῶν 9 δεκάδων (ἐπειδὴ δεκάδας μέλλει νὰ διαιρέσωμεν), 19 δεκάδες ἵνα διαιρεθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη, καὶ ἐπειδὴ τὰ 7 εἰς τὰ 19 ἐμπεριέχονται 2, διὰ τοῦτο λαμβάνει ἕκαςον μέρος καὶ 2 δεκάδας· 2×7 ὅμως ποιοῦσι 14 δεκάδας, αἵτινες ἀφαιρούμεναι ἐκ τῶν 19 δεκάδων, μένει ὑπόλοιπον ἔτι 5 δεκάδες, αἵτινες ὡς δεκάδες δὲν διαιροῦνται εἰς 7 ὅμοια μέρη, διὸ ἀναλύομεν αὐτὰς εἰς τὴν ἐσχάτην πλησίον αὐτῶν τάξιν, τουτ' ἔςιν, εἰς μονάδας, καὶ οὕτω προκύπτουσι, μετὰ τῶν δοθέντων 6 μονάδων (ἐπειδὴ μονάδας μέλλει νὰ διαιρέσωμεν), 56 μονάδες ἵνα μερισθῶσιν εἰς 7 ὅμοια μέρη, αἵτινες διαιρούμεναι μὲ 7, λαμβάνουσι καὶ ἀνὰ 8 μονάδας, ἐπειδὴ τὰ 7 εἰς τὰ 56 ἐμπεριέχονται ὀκτάκις ἐξ ἴσου. Ἄρα λαμβάνει ἕκαςον μέρος 1 χιλιάδα, 2 ἑκατοντάδας, 2 δεκάδας, καὶ 8 μονάδας, ἤτοι διὰ χαρακτήρων 1228.

Δι' αὐτὸ τοῦτο λοιπὸν ἄρχεται ἡ Διαίρεσις ἐκ τῆς ἀριςερῶς ἀνωτάτης τάξεως, καὶ προχωρεῖ δεξιῶς, διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ ἀμέριςον ὑπόλοιπον τῆς ἀνωτέρας τάξεως εἰς τὰ μέρη τῆς πλησίον αὐτῆς κατωτέρας τάξεως, καὶ ὡς τοιαῦτα νὰ δυνάμεθα ἔπειτα νὰ τὰ διαιρέσωμεν ἐξῆς. Αὕτη ἡ ἀνάλυσις ὅμως ἐνεργεῖται ἁπλῶς μὲ τὸ κατέβασμα τοῦ πλησίον ἐπομένου ψηφίου, ἐπειδὴ διὰ μέσου τούτου τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀνωτέρας τάξεως γίνεται ψηφίον τῆς κατωτέρας τάξεως (ὡς §. 17.), ἄρα ἀπὸ μονάδων τῆς ἀνωτέρας τάξεως, γίνονται δεκάδες τῆς πλησίον κατωτέρας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἑπόμενον παραγόμενον εἶναι πάντοτε τὸ παραγόμενον τῆς κατωτέρας τάξεως, διὰ τοῦτο ἕκαςον ἑπόμενον παραγόμενον πρέπει νὰ τεθῇ εἰς μίαν πρόσω τάξιν δεξιῶς, δηλαδὴ τοιουτοτρόπως, καθὼς προχωρεῖ ἡ Διαίρεσις ἀπὸ τὸ ἀριςερὸν πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος.

§. 102.

Ἐκ τούτου δηλοῦται ἐν ταὐτῷ, ὅτι κἂνὲν ἁπλοῦν Παραγόμενον δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ὑπὲρ τὰ 9· διότι ἕκαςον ἁπλοῦν Παραγόμενον δεικνύει, πόσα ληφθήσονται ἐξ ἑκάςης τάξεως δι᾽ ἕκαςον μέρος· κἀμμία τάξις ὅμως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀριθμὸν 9 (ὡς §. 14.).

§. 103.

Σχόλιον. Πάνυ ὠφέλιμον καὶ ἀναγκαῖον εἶναι νὰ συνεθίσῃ τις εὐθὺς ἀπ᾽ ἀρχῆς ἵνα διαιρῇ διὰ τοῦ νοὸς μὲ ἓν ψηφίον, ὅ ἐςί, νὰ μὴ γράφῃ ὑπὸ τοῦ Διαιρετέου τὸ ἐκ τοῦ παραγομένου καὶ Διαιρέτου πρὸς ἀφαίρεσιν προκύπτον Κεφάλαιον, ἀλλὰ νὰ τὸ ἀφαιρῇ διὰ τοῦ νοὸς εὐθὺς, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλὰ εὔκολον. Διότι διὰ νὰ εἶναι τὸ Παραγόμενον πάντοτε μόνον μοναδικὸν ψηφίον (τὸ ὁποῖον, κατὰ τὸν ἀνωτέρω §, δύναται νὰ εἶναι μόνον 9), διὰ τοῦτο (ὅταν καὶ ὁ Διαιρέτης εἶναι μοναδικὸν ψηφίον) προκύπτουσι πάντοτε ἵνα πολλαπλασιάσωμεν μόνον μὲ δύο μοναδικὰ ψηφία, ὧν τὸ ὕψιςον Κεφάλαιον δύναται νὰ εἶναι μόνον 81, τὸ ὁποῖον δύναται ν᾽ ἀφαιρεθῇ εὐκόλως διὰ τοῦ νοὸς ἐκ τοῦ μεγίςου Διαιρέτου, ὅς τις εἰς τοιαύτην περίςασιν δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλήτερος τῶν 89. Πρὸς τούτοις δὲν πρέπει εἰς τοιαύτας περιςάσεις νὰ ὑποτεθῇ οὔτε τὸ ὑπόλοιπον, ἀλλ᾽ οὔτε τὰ ἑπόμενα ψηφία. Τὸ ἑπόμενον Ὑπόδειγμα θέλει σαφηνίσει τὰ λεχθέντα. Παράδ. χ. τὰ 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 78876, ἤτοι, 9 εἰς 78876

8764 Πηλίκον.

Δηλαδὴ· τὰ 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 78, λαμβάνουσιν ἀνὰ 8, λοιπὸν 8 × 9 — 72, ἐκ τῶν 78 μένουσιν 6· (ταῦτα πάντα ὅμως διὰ τοῦ νοὸς, χωρὶς νὰ τεθῶσι τὰ 72 ὑπὸ τῶν 78). Πλησίον αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου 6 (τὸ ὁποῖον βαςῶμεν εἰς τὸν νοῦν), ςοχαζόμεθα, ὅτι ἵςανται δεξιῶς τὰ ἑπόμενα 8, καὶ οὕτω ποιοῦσιν ὁμοῦ 68· λοιπὸν τὰ 9 νὰ διαιρέσωσι τὰ 68, λαμβάνουσιν ἀνὰ 7 (τὰ ὁποῖα 7 θέττομεν εὐθὺς ὑπὸ τὴν γραμμὴν πλησίον τῶν 8 δεξιῶς), εἶτα λέγομεν· 7 × 9 63, ἐκ τῶν 68 μένουσι 5, τὰ ὁποῖα βαςῶμεν ὡσαύτως εἰς τὸν νοῦν, ςοχαζόμενοι τὸ ἑπόμενον ψηφίον ὡς πλησίον ἱςάμενον, καὶ οὕτω λέγομεν· 9 εἰς τὰ 57 ἐμπεριέχονται ἐξάκις, ἤτοι 6 × 9 — 54, ἐκ τῶν 57 μένουσιν 3· τελευταῖον· 9 εἰς τὰ 36 (ςοχαζόμενοι, ὅτι τὸ ψηφίον 6 ἵςαται πλησίον τῶν 3), ἐμπεριέχεται τετράκις, ἤτοι 4 × 9 — 36, ἐκ τῶν 36 μένει μηδὲν, καὶ οὕτω λαμβάνει τέλος.

Αὐτὰ τὰ γυμνάσματα εἰσὶ πολλὰ εὔκολα· πλὴν μ' ὅλον τοῦτο δὲν πρέπει νὰ παρατρεχθῶσιν, ἐπειδὴ αἱ ἑπόμεναι συντομίαι, καὶ ἐν γένει αἱ τοῦ λογαριάζειν ὠφέλειαι, κρέμανται ἐκ ταύτης τῆς ἑτοιμότητος. Εἰς τὸ Θ'. Κεφάλαιον τοῦ παρόντος Μέρους, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται περὶ τῶν ὠφελειῶν ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν, θέλει εἰπῶμεν περὶ τούτου περισσότερα.

§. 104.

Ἐὰν συμβῇ, ὡς ἀκολουθεῖ πολλάκις, καὶ τότε δηλαδὴ ἀφ' οὗ κατεβάσωμεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον πλησίον τοῦ ὑπολοίπου, νὰ μὴν ἐμπεριέχηται μ' ὅλον τοῦτο ὁ Διαιρέτης εἰς αὐτὸν τὸν Ἀριθμὸν, ὅστις σύγκειται ἐκ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ κατεβασθέντος ψηφίου, τότε, πρὶν νὰ κατεβάσωμεν ἔτερον ψηφίον, πρέπει νὰ βάλλωμεν εἰς τὸ Πηλίκον ἓν 0. Ἐν γένει εἶναι ἀπηγορευμένον τὸ, νὰ κατεβάζωμεν διὰ μιᾶς δύο ψηφία, ἀλλ' ἑκάστην φορὰν μόνον ἕν, καὶ ἐὰν δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν, θέττομεν εἰς τὸ Πηλίκον ἓν 0, εἶτα κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον, καὶ διαιροῦμεν ἑξῆς· ἐὰν δὲ, ἀφ' οὗ τεθῇ τὸ 0, ἔπειτα κατεβασθῇ καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον, καὶ μ' ὅλον τοῦτο δὲν ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν προκείμενον ἀριθμὸν, πρέπει νὰ βάλλωμεν εἰς τὸ πηλίκον πάλιν ἓν 0, καὶ μετέπειτα νὰ κατεβάσωμεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ νὰ δυνηθῶμεν νὰ διαιρέσωμεν. Θετέον· 8 νὰ διαιρέσωσιν 856 λέγομεν· 8 εἰς τὰ 8 ἐμπεριέχονται ἅπαξ, ἤτοι $1 \times 8 = 8$, ἐκ τῶν 8 μένει μηδὲν, λοιπὸν κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 5 καὶ λέγομεν· 8 εἰς τὰ 5 δὲν ἐμπεριέχονται, πλὴν μ' ὅλον τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ κατεβάσωμεν εὐθὺς τὸ ἑπόμενον ψηφίον 6, καὶ νὰ εἰπῶμεν 8 εἰς τὰ 56, ἀλλὰ πρότερον λέγομεν· 8 εἰς τὰ 5 δὲν ἐμπεριέχονται οὐδ' ἅπαξ, διὰ τοῦτο θέττομεν εἰς τὸ Πηλίκον τὸ 0, ὡς νὰ ἦτον ἓν σημαντικὸν ψηφίον, ἔπειτα κατεβάζομεν τὰ 6 καὶ λέγομεν· 8 εἰς τὰ 56 (διότι τὰ 5, ἐξ ὧν μηδὲν λαμβάνεται, μένουσιν ὑπόλοιπον) ἐμπεριέχονται ἑπτάκις ἴσα· ὅθεν προκύπτει Πηλίκον 107.

Δεῖξις. Ἡ αἰτία, δι' ἣν θέττομεν 0 ὅταν δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν, πηγάζει πληρέστατα ἐκ τοῦ §. 102., ὅπου ἐλέχθη, ὅτι ἕκαστον ψηφίον ἐν τῷ Πηλίκῳ δεικνύει, πόσα λαμβάνονται ἐξ ἑκάστης τάξεως δι' ἕκαστον μέρος· διὰ τοῦτο ἐν ἑκάστῃ τάξει τοῦ ἐπακολουθοῦντος πηλίκου πρέπει νὰ τεθῇ ἓν ψηφίον ἢ ἓν μηδενικὸν, ἵνα τὸ προηγούμενον πηλίκον λάβῃ τὴν οἰκείαν τάξιν. Εἰς τὸ ἐδικόν μας ὑπόδειγμα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 856 διὰ τῶν 8, τοῦτ' ἔστιν, 8 ἑκατοντάδες, 5 δεκάδες, καὶ 6 μονάδες νὰ διαιρεθῶσιν εἰς 8 ὅμοια μέρη, καὶ νὰ φανερωθῆ πόσαι ἑκατοντάδες, δεκάδες, καὶ μονάδες ληφθήσονται ἐξ ἑκάςης τάξεως δι' ἕκαςον μέρος· λοιπὸν, 8 νὰ διαιρέσωσι τὰς 8 ἑκατοντάδας, λαμβάνουσιν 1, ὅ ἐςὶν, ἕκαςον μέρος λαμβάνει μίαν ἑκατοντάδα· εἶτα, 8 εἰς τὰς 5 δεκάδας δὲν ἐμπεριέχονται, ἄρα οὐκ ἔχομεν δεκάδας διαιρέσαι, ἀλλὰ αἱ 5 δεκάδες καὶ αἱ 6 μονάδες διαιρούμεναι ὡς 56 μονάδες εἰς 8 μέρη, προκύπτει δι' ἕκαςον μέρος 7 μονάδες· ἄρα ἕκαςον μέρος λαμβάνει 1 ἑκατοντάδα καὶ 7 μονάδας. Εἰμὲν οὖν ἐσημειοῦντο ἐν τῷ Πηλίκῳ μόνον τὰ ψηφία 1 καὶ 7, ἤθελε φανερόνει δέκα ἑπτὰ, οὐχὶ ὅμως ἑκατὸν ἑπτά· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὸ πηλίκον 1 ἑκατοντὰς, 0 δεκάδες, καὶ 7 μονάδες· διὰ χαρακτήρων 107.

§. 105.

Ἐκ ταύτης τῆς ἰδίας αἰτίας πρέπει νὰ κατεβάζωμεν ἐκ τοῦ Διαιρετέου ὅλα τὰ ψηφία ἀνὰ ἕν, καὶ νὰ βάλλωμεν εἰς τὸ Πηλίκον τὰ Παραγόμενα αὐτῶν, ἕσω καὶ νὰ μὴ πρόκηται μηδὲν νὰ κατεβάσωμεν, εἰμὴ ἁπλᾶ μηδενικά. Φέρ' εἰπεῖν, 7 νὰ διαιρέσωσι τὰς 42000, λέγομεν· τὰ 7 εἰς τὰ 42 ἐμπεριέχονται ἑξάκις ἴσα. Πλὴν καίτοι ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχουσι πλέον ψηφία ἵνα διαιρέσωμεν, μ' ὅλον τοῦτο ὅμως δὲν πάυει εἰσέτι ἡ διαίρεσις, ἀλλὰ δι' ἕκαςον ἐν τῷ Διαιρετέῳ εὑρισκόμενον μηδενικὸν, πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὸ Πηλίκον ὡσαύτως ἓν μηδενικὸν, ἵνα τὸ Πηλίκον (τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ φανερώσῃ χιλιάδας) τεθῇ ἐν τῇ τάξει τῶν χιλιάδων, ὡς.

7 εἰς 42000

φέρουσιν 6000

λέγοντες· 7 εἰς τὰ 42 ἐμπεριέχονται ἑξάκις, ἤτοι· $6 \times 7 = 42$, ἐκ τῶν 42 μένει μηδέν· εἶτα 7 εἰς τὸ 0 δὲν ἐμπεριέχονται ὁλοτελῶς· διότι, ὡς γνωςὸν, τὸ 0 μηδὲν σημαίνει, διὰ τοῦτο θέττομεν τὸ 0 καὶ ἐφεξῆς· ὅ ἐςὶν, ἕκαςον μέρος λαμβάνει ἐπ' εὐθὺ 6 χιλιάδας· ἑκατοντάδα, δεκάδα, καὶ μονάδα ὅμως οὐδεμίαν, ἐπειδὴ εἰς τὰς ἐν τῷ Διαιρετέῳ τάξεις τῶν τε ἑκατοντάδων, δεκάδων, καὶ μονάδων εὑρίσκονται ἁπλῶς μηδενικά.

§. 106.

Περὶ συνθέτου Διαιρέσεως.

Ἀπαραλλάκτως (ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ §. 101.) ἐπιτελεῖται ἡ Διαίρεσις, ὅταν ὁ Διαιρέτης σύγκηται ἐκ περισσοτέρων ψηφίων· πλὴν ἐπειδὴ ἐνταῦθα δὲν προκύπτει εὐθὺς πρὸ ὀφθαλμῶν, ποσάκις ἐμπεριέχεται ἅπας ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν ἑκάστην φορὰν προκύπτοντα Διαιρετέον, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν μόνον μὲ τὸ ἀριστερῶς πρῶτον ψηφίον τοῦ Διαιρετέου, ὡς νὰ ὑπῆρχεν αὐτὸ μόνον παρὼν, καὶ πολλαπλασιάζομεν πρὸς τὸ παρὸν μὲ τὸν προβληθέντα ἀριθμὸν ὅλον τὸν Διαιρέτην, ἵνα δοκιμάσωμεν κατὰ τὴν παράδοσιν, ἐὰν ἀπιτύχωμεν τὸ καθ' αὐτὸ Πηλίκον, ἢ ἐξελάβομεν αὐτὸ πάνυ μικρὸν, τὸ ὁποῖον ἢ οὕτως ἢ ἄλλως δυνάμεθα εὐκόλως διορθῶσαι, ὡς.

```
43 εἰς 927166 | Πηλίκον 21562.
      86      |
      ---
       67
       43
       ---
       241
       215
       ----
        266
        258
        ---
         86
         86
         --
          0
```

Ἑρμηνεία. Ἐν πρώτοις λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα εἰσὶν ἀναγκαῖα ἵνα ἐμπεριέχηται ἐν αὐτοῖς ὁ Διαιρέτης 43, δηλαδὴ 92· δὲν λέγομεν ὅμως, τὰ 43 νὰ διαιρέσωσι τὰ 92, ἀλλ' ἁπλῶς, 4 εἰς τὰ 9, καὶ ἐπειδὴ τὰ 4 εἰς τὰ 9 ἐμπεριέχονται δὶς, διὰ τοῦτο θέττομεν εἰς τὸ πηλίκον 2, ἐπ' ἐλπίδι, ὅτι καὶ τὰ 43 εἰς τὰ 92 ἐμπεριέχονται ὡσαύτως δὶς, καὶ πολλαπλασιάζομεν πρὸς τὸ παρὸν διὰ τοῦ 2 ὅλον τὸν Διαιρέτην 43, λέγοντες· 2 × 3 — 6 (ὑπὸ τῶν 2 ὡς ἀνωτέρω)· εἶτα, 2 × 4 — 8 (ὑπὸ τῶν 9)· ἐπειδὴ λοιπὸν δὶς 43, ποιοῦσιν 86, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 92 μένει ὑπόλοιπον μόνον 6, διὰ τοῦτο ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς 2 ἐλήφθη ὀρθῶς. Πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 6, κατεβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον 7, καὶ προκύπτουσιν 67, ὅπου πάλιν δὲν λέγομεν 43 εἰς 67, ἀλλὰ 4 εἰς 6, καὶ ἐπειδὴ τὰ 4 εἰς τὰ 6 ἐμπεριέχονται ἅπαξ, διὰ τοῦτο θέττομεν 1 διὰ τὸ πηλίκον τῶν 4 εἰς 6 (δηλαδὴ ὅτι τὰ 4 εἰς τὰ 6 ἐμπεριέχονται ἅπαξ), καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ 1 μὲ τὰ 43, λέγοντες· 1 × 3 — 3 (ὑπὸ τῶν 7), καὶ 1 × 4 — 4 (ὑπὸ τῶν 6), ποιοῦσι 43, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 67, μένει ὑπόλοιπον 24, εἰς τὰ ὁποῖα προςτεθέντος τοῦ ἑπομένου ψηφίου 1, προκύπτουσιν ἵνα διαιρέσωμεν 241 μὲ 43, διὸ λέγομεν· 4 εἰς τὰ 24 ἐμπεριέχονται πεντάκις (α), ἤτοι, 3 × 5 — 15, λοιπὸν θέττομεν 5 (ὑπὸ τοῦ 1), καὶ βαςῶμεν 1· εἶτα, 4 × 5 — 20, καὶ τὸ βαςαχθὲν 1, ποιοῦσιν ὁμοῦ 21· λοιπὸν πεντάκις 43, ποιοῦσιν ὁμοῦ 215, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 241, μέ-

---

(α) Ἐὰν ἐκλάβωμεν ἐνταῦθα, ὅτι τὰ 4 εἰς τὰ 24 ἐμπεριέχονται ἑξάκις, τοῦτ' ἔςι, τὰ 43 εἰς τὰ 241 ἑξάκις, βλέπομεν εὐθὺς, ὅτι ὁ προβληθεὶς ἀριθμὸς 6 εἶναι πάνυ μεγάλος· διότι ἑξάκις 43, ποιοῦσι 258, τὰ ὁποῖα δὲν ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 241.

νει ὑπόλοιπον 26. Εἰς αὐτὰ κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 6, καὶ προκύπτει Διαιρετέος 266, εἶτα λέγομεν· 4 εἰς 26 ἐμπεριέχονται ἑξάκις, ἤτοι 3 × 6 — 18, 8 (ὑπὸ τῶν 6), καὶ βασῶμεν 1· ἔπειτα, 4 × 6 — 24, καὶ 1 ποιοῦσιν 25, δηλονότι, ἑξάκις 43, ποιοῦσιν ὁμοῦ 258, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 266, μένει ὑπόλοιπον 8, εἰς τὰ ὁποῖα προςιθέντος τοῦ τελευταίου ψηφίου 6, προκύπτουσιν 86, καὶ οὕτω λέγομεν· 4 εἰς τὰ 8 ἐμπεριέχονται δὶς, ἤτοι, 2 × 3 — 6, καὶ 2 × 4 — 8, ποιοῦσιν 86, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν ἀνωτέρω 86, μένει μηδέν. Ὅθεν τὰ 43 εἰς τὰ 927166 ἐμπεριέχονται 21562 φοραῖς, δηλονότι, ὅπερ ταὐτὸν ἐςί, τὰ 927166 διαιρούμενα εἰς 43 ὅμοια μέρη, λαμβάνει ἕκαςον μέρος ἀνὰ 21562.

§. 107.

Ὡσαύτως πράττομεν, ὅταν ὁ Διαιρέτης συνίςαται ἐκ τριῶν, τεσσάρων, πέντε ψηφίων, καὶ ἐφεξῆς, ὡς.

```
          507  εἰς  247923
---------------
 Πηλίκον  489       2028
                    ----
                     4512
                     4056
                     ----
                      4563
                      4563
                      ----
                        0
```

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα τὰ 507 δὲν ἐμπεριέχονται εἰς τὰ 247, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν εὐθὺς ἐκ τοῦ Διαιρετέου 2479, καὶ λέγομεν· 5 εἰς 24 ἐμπεριέχονται τετράκις, μὲ τὰ ὁποῖα 4 πολλαπλασιάζομεν ὅλον τὸν Διαιρέτην, λέγοντες· 4 × 7 — 28, θέττομεν 8 (ὑπὸ τῶν 9 ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει), καὶ βασῶμεν 2· εἶτα, 4 × 0 — 0, καὶ 2, ποιοῦσι 2 (ὑπὸ τῶν 7 ἐν τῇ τρίτῃ τάξει)· ἔπειτα 4 × 5 — 20 (ὑπὸ τῶν 24), λοιπὸν ἀφαιρούμενα 2028 ἐκ τῶν 2479, μένει ὑπόλοιπον 451· μετέπειτα κατεβάζομεν τὰ ἑπόμενα 2, καὶ προκύπτει Διαιρετέος 4512, καὶ λέγομεν· 5 εἰς 45 ἐμπεριέχονται ὀκτάκις (ἐὰν ἐλάβομεν 9 ἤθελεν εἶναι μεγάλος ὁ ἀριθμὸς· διότι ἐννεάκις 507, ποιοῦσι 4563, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται ἀφαιρεθῆναι ἐκ τῶν 4512)· αὐτὰ τὰ 8 τίθενται δεξιῶς πλησίον τοῦ προτεθέντος πηλίκου 4, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν μὲ 8 ὅλον τὸν Διαιρέτην 507, θέττοντες τὸ Παραγόμενον ὑπὸ τοῦ Διαιρετέου 4512, ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, μένει ὑπόλοιπον 456· πλησίον αὐτῶν κατεβάζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 3, καὶ διαιροῦμεν πάλιν, λέγοντες· 5 εἰς 45 ἐμπεριέχονται ἐννεάκις, ἐννεάκις δὲ 507, ποιοῦσι 4563, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 4563, μένει μηδέν.

Προβλήματα.

Α΄.

6283	εἰς	25163415
Πηλ. 4005.		25132
		31415
		31415
		0

Β΄.

54	εἰς	378000
Πηλ. 7000.		378
		0000

Καίτοι εἰς τὸ Α΄. κατεβάσαμεν πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 31 τὸ ἑπόμενον ψηφίον 4, μ᾽ ὅλον τοῦτο δὲν ἐμπεριέχεται ὁ Διαιρέτης εἰς τὰ 314, διὰ τοῦτο ἐθέσαμεν εἰς τὸ πηλίκον 0. εἶτα ἀφ᾽ οὗ κατεβάσαμεν καὶ τὸ ἕτερον ἑπόμενον ψηφίον 1, δὲν ἐμπεριείχετο πάλιν ὁ Διαιρέτης 6283 εἰς 3141, διό, πρὶν ἢ κατεβιβάσαμεν τὰ ἑπόμενα 5, ἐθέσαμεν εἰς τὸ πηλίκον καὶ ἕτερον 0 (ὡς §. 104.)· εἶτα κατεβάσαντες τὸ τελευταῖον ψηφίου 5, προέκυψε Διαιρετέος 31415, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμπεριέχονται τὰ 6283· λοιπὸν εἴπομεν· 6 εἰς 31 ἐμπεριέχονται πεντάκις, ἤτοι 3 × 5 — 15, διὸ ἐθέσαμεν 5, καὶ ἐβγάξαμεν 1, καὶ ἐφεξῆς, καὶ οὕτω προέκυψαν 31415, τῶν ὁποίων ἀφαιρεθέντων ἐκ τῶν 31415, ἔμεινε μηδέν. Εἰς τὸ Β'. δὲ ἕκαστον κατεβασθὲν 0, ἐθέσαμεν εἰς τὸ πηλίκον ὡσαύτως ἓν 0 (ὡς §. 105.).

§. 108.

Σχόλιον. Οἱ Ἀρχάριοι ἐπιθυμοῦσιν ἕνα διωρισμένον καὶ ἀσφαλῆ Κανόνα, δι' οὗ νὰ ἐπιτυχαίνωσιν ἀμέσως (εἰς ὁποιανδήποτε Διαίρεσιν) τὸ ὀρθὸν Πηλίκον· περὶ τούτου ὅμως δὲν ὑπάρχει γενικὸς Κανών, ἀλλ' ἡ ἄσκησις πρέπει νὰ τελειοποιήσῃ τὸ πᾶν. Κοινῶς δοκιμάζωμεν μὲ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου, σπανίως δὲ καὶ μὲ τὸ τρίτον, ἵνα ἴδωμεν, ἐὰν τὸ Παραγόμενον αὐτῶν προσεθὲν εἰς τὸ τοῦ πρώτου ψηφίου παραγόμενον, δύναται τὸ ὅλον αὐτὸ ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ προκειμένου Διαιρετέου. Φέρ' εἰπεῖν, μᾶς ἐδόθησαν νὰ διαιρέσωμεν 534 διὰ τῶν 68· ἐνταῦθα βλέπομεν ἐκ τοῦ δευτέρου ψηφίου 8, ὅτι τὰ 6 εἰς τὰ 53 δὲν ἐμπεριέχονται ὀκτάκις· διότι ὑπὸ ὀκτάκις 8, προστίθενται 6 εἰς τὰ ἑξάκις 8, καὶ ποιοῦσιν ὁμοῦ 54, τὰ ὁποῖα δὲν ἀφαιροῦνται ἐκ τῶν 53· ἐὰν ὅμως τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ Διαιρέτου εἶναι 0, τότε λαμβάνομεν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, τὸν πλέον μεγαλήτερον ἀριθμὸν διὰ πηλίκον. Θετέον· 307 εἰς 1245, ἤτοι 3 εἰς 12 ἀναμφιβόλως ἐμπεριέχονται τετράκις, ἐπειδὴ 4 × 7 (τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ Διαιρέτου), ποιοῦσιν 28, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦνται ἐκ τῶν τοῦ Διαιρετέου 45· πλὴν καὶ τοῦτο δὲν ἐπιτυχαίνεται πάντοτε Παρ. χάριν. 307 εἰς 1227, ἤτοι 3 εἰς 12 δὲν ἐμπεριέχονται τετράκις· διότι 4 × 7 — 28, δὲν ἀφαιροῦνται ἐκ τῶν

27, ἄρα πρέπει νὰ δανεισθῶμεν ἐκ τῶν 12 ἕν, καὶ οὕτω μένουσι μόνον 11, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ 3 δὲν ἐμπεριέχονται τετράκις. Ἐντεῦθεν οὖν δῆλον, ὅτι οὐχ' ἄλλως, ἀλλὰ μόνον διὰ τῆς γυμνάσεως ἀποκτᾶται ἡ τοιαύτη γρήγορος ἑτοιμότις.

§. 109.

Ἀφ' οὗ κατεβάσωμεν καὶ διαιρέσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ Διαιρετέου, καὶ μείνει ἐν τῷ τέλει ὑπόλοιπόν τι, τότε δηλοῖ, ὅτι δὲν γίνεται ἡ διαίρεσις ἐξ ἴσου, ἀλλὰ μένει τοσαύτη ποσότης (ὅση δηλονότι παριςάνεται διὰ τοῦ ὑπολοίπου), ἥτις δὲν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τόσα ὅμοια μέρη, εἰς ὅσα δεικνύει ὁ Διαιρέτης. Ἰδοὺ τοιοῦτον ὑπόδειγμα.

```
          325  εἰς  79758
─────────────────────────
Πηλίκον   245.      650
                   ─────
                    1475
                    1300
                   ─────
                     1758
                     1625
                    ─────
                      133 μένουσιν ὑπόλοιπα, τὰ ὁ-
```

ποῖα δὲν διαιροῦνται εἰς 325 ὅμοια μέρη, ὥςε νὰ λάβῃ ἕκαςον μέρος ἓν Ἀκέραιον. (ὡς §. 93. Δεῖξις).

§. 110.

Ἐὰν ἐν τῷ τέλει τοῦ Διαιρέτου δεξιῶς εὑρίσκωνται μηδενικὰ, διαιροῦμεν ἁπλῶς διὰ τῶν σημαντικῶν ψηφίων, ἀφίνοντες ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία δεξιῶς, ὅσα μηδενικὰ εὑρίσκονται εἰς τὸν Διαιρέτην, τὰ ὁποῖα δὲν κατεβάζομεν ποσῶς ἐν τῇ διαιρέσει, ὡς τὰ ἑπόμενα ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Α΄. 23(0 εἰς 2146(8

Πηλίκον 93. 207

76

69

7 Ὑπόλοιπον τῶν διαιρεθέντων ἀριθμῶν· τούτῳ προςίθενται τὰ διὰ τὸ 0 ἀποτμηθέντα 8, καὶ οὕτω μένει Ὑπόλοιπον 78.

Ἐνταῦθα διαιροῦμεν ἁπλῶς διὰ τῶν 23, ἀφίνοντες διὰ τὸ 0 τὸ τοῦ Διαιρετέου τελευταῖον ψηφίον 8, δι᾽ ἣν αἰτίαν χωρίζεται ὡς ἀνωτέρω.

Β΄. 35(00 εἰς 3581(52

Πηλίκον 102. 35

ʼʼ 81

70

11 Ὑπόλοιπον τῶν διαιρεθέντων ἀριθμῶν· αὐτῷ προςίθενται καὶ τὰ τμηθέντα 52, καὶ μένει Ὑπόλοιπον 1152.

Ἐνταῦθα διὰ τὰ δύο μηδενικὰ, κόπτομεν καὶ τὰ τελευταῖα δύο ψηφία τοῦ Διαιρετέου, εἴτουν τὰ 52, τὰ ὁποῖα δὲν κατεβάζομεν ἐν τῇ διαιρέσει, καὶ διαιροῦμεν μόνον διὰ τῶν 35 τὰ 3581·

Γ΄. 695(000 εἰς 2591655(438

Πηλίκον 3729. 2085

5066

4865

2015

1390

6255

6255

0 λοιπὸν μένουσιν ὑπόλοιπον τὰ τμηθέντα 438.

Δ'. 42(00 εἰς 12981(00

Πηλίκον 309. 126

381

378

ὑπόλοιπον 3

Πλησίον τοῦ ἀνωτέρω Ὑπολοίπου 3, τίθενται τὰ ἀφεθέντα δύο μηδενικὰ, καὶ προκύπτει Ὑπόλοιπον 300.

Ἐνταῦθα ἀφίνομεν καὶ τὰ μηδενικὰ τοῦ Διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν μόνον μὲ 42 τὰς 12981· πλὴν ἐπειδὴ τὸ Ὑπόλοιπον 3 ἀνήκει ἐν τῇ τρίτῃ τάξει, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τῷ προστεθῶσι πάλιν τὰ δύο μηδενικὰ, διὰ νὰ λάβῃ τὸν οἰκεῖον τόπον ἐν τῇ τρίτῃ τάξει.

§. 111.

Σχόλιον. Τὰ μηδενικὰ, ὡς γνωςὸν, οὐκ εἰσὶν ἀριθμοὶ δι' ὧν ἐπιτελεῖται ἡ πρᾶξις τῶν λογαριασμῶν, ἀλλὰ χρησιμεύουσιν ὡς ἁπλᾶ δεικτικὰ Σημεῖα, δι' ὧν γνωρίζομεν ποίας τάξεως εἰσὶ τὰ σημαντικὰ Ψηφία, μὲ τὰ ὁποῖα κυρίως λογαριάζομεν· ὅθεν εἰς τοὺς Διαιρέτας 230, 3500, 695000, κτλ. δεικνύουσι τὰ μηδενικὰ μόνον, ὅτι μέλλει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 23 δεκάδων, διὰ τῶν 35 ἑκατοντάδων, διὰ τῶν 695 χιλιάδων, καὶ ἐφεξῆς. Ἐν τοσούτῳ ὅμως εἰς τὸν μέγιςον Ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ὅςτις δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλήτερος τῶν 9, δὲν ἐμπεριέχεται κἀμμία Δεκάς· εἰς τὸν μέγιςον Ἀριθμὸν τῶν μονάδων καὶ δεκάδων, ὅςτις δὲν εἶναι μεγαλήτερος τῶν 99, δὲν ἐμπεριέχεται κἀμμία Ἑκατοντάς· εἰς τὸν μέγιςον Ἀριθμὸν τῶν μονάδων καὶ δεκάδων, καὶ ἑκατοντάδων, ὅςτις δὲν εἶναι μεγαλήτερος τῶν 999, δὲν ἐμπεριέχεται κἀμμία Χιλιὰς, (ὡς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἐλέχθη περὶ τούτου)· ὅθεν ἀφ' ἑνὸς Διαιρέτου ἐξ ἁπλῶν δεκάδων, μένει ὑπόλοιπον Δεκάδες· ἀφ' ἑνὸς Διαιρέτου ἐξ ἁπλῶν ἑκατοντάδων, μένει

Ὑπόλοιπον Μονάδες καὶ Δεκάδες· ἀφ' ἑνὸς Διαιρέτου, ἐξ ἁπλῶν χιλιάδων, μένει Ὑπόλοιπον Μονάδες, Δεκάδες, καὶ Ἑκατοντάδες, διὰ τοῦτου λοιπὸν, πρὶν τῆς διαιρέσεως, δυνάμεθα ἐν γένει, δι' ὅσα μηδενικὰ ὑπάρχουσιν ἐν τῷ Διαιρέτῃ ν' ἀφήσωμεν ἐκ τοῦ Διαιρετέου τόσα ψηφία δεξιῶς, καὶ νὰ τὰ σοχασθῶμεν ἐν τῷ μεταξὺ ὡς Ὑπόλοιπον.

§. 112.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ὠφέλεια, ὅταν ὁ Διαιρέτης συνίσαται ἁπλῶς ἐκ τοῦ ψηφίου 1 καὶ μηδενικῶν, ὡς 10, 100, 1000, καὶ ἐφεξῆς· διότι δὲν διαιροῦμεν παντελῶς, ἀλλὰ δι' ὅσα μηδενικὰ εὑρίσκονται ἐν τῷ Διαιρέτῃ, τόσα Ψηφία κόπτομεν ἀπὸ τὸν Διαιρετέον δεξιῶς, καὶ οὕτω τὰ μὲν ἀρισερῶς τῆς τομῆς Ψηφία δίδουσι τὸ Πηλίκον, τὰ δὲ δεξιῶς τῆς τομῆς μένουσιν Ὑπόλοιπον. Θὲς· ὅτι μᾶς ἐδόθησαν ἵνα διαιρέσωμεν 64573 μὲ 10, μὲ 100, 1000, καὶ ἐφεξῆς· αὕτη ἡ διαίρεσις γίνεται ὡς ἑπομένως.

Πηλίκον	Ὑπόλοιπον.	Πηλίκον	Ὑπόλ.	Πηλ.	Ὑπόλ.
6457	3.	645	73.	64	573.

Δεῖξις.

Ἡ αἰτία τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως φανεροῦται μὲν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω §, ἐπειδὴ τὸ σημαντικὸν ψηφίον 1 δὲν διαιρεῖ, ὅ ἐςὶν, ἀφίνει ἀμετάβλητα τὰ δεξιῶς τῆς τομῆς μέλλοντα διαιρεθῆναι ψηφία· ἐν τοσούτῳ ὅμως δυνάμεθα σαφέςερον πληροφορηθῆναι περὶ τούτου ἀφ' οὗ σοχασθῶμεν, ὅτι ἕνας Ἀριθμὸς σμικρύνεται 10, 100, 1000 φοραῖς καὶ ἐφεξῆς, ἐὰν τὰ ψηφία του προχωρήσωσι μίαν τάξιν πρὸς τὰ δεξιὰ (ὡς §. 16.), τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται διὰ τῆς τομῆς τῶν ψηφίων, ἐπειδὴ διὰ μέσου τούτου ὅλα τὰ ἀρισερῶς τῆς τομῆς ψηφία προχωροῦσι τόσας τάξεις πρὸς τὰ ὀπίσω, ὅσα ψηφία τοῖς ἀφαιρέθησαν δέξιῶς. (ὡς §. 17).

§. 113.

Ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως ἐπιτελεῖται πλέον συντόμως, ἐὰν ἐν τῷ διαιρεῖν δὲν βάλλομεν ὑπὸ τοῦ Διαιρετέου τὸ ἐκ τοῦ παραγομένου καὶ Διαιρετέου προκύπτον κεφάλαιον, ἀλλ᾽ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ νοὸς ἀμέσως, καὶ θέσωμεν μόνον τὸ Υπόλοιπον, ὡς.

	356	εἰς 301532
Πηλίκον	847.	,,1673
		,,2492
		....

δηλαδή· 6×8 — 48, ἐκ τῶν 55, μένουσιν 7 (ὑπὸ τῶν 5), καὶ βαςῶμεν 5· εἶτα, 5×8 —40, καὶ 5 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι 45, ἐκ τῶν 51, μένουσιν 6, καὶ βαςῶμεν 5· ἔπειτα, 3×8 —24, καὶ 5, ποιοῦσιν 29, ἐκ τῶν 30, μένει 1, ὁμοῦ ὑπόλοιπον 167, κατεβάζοντες δὲ τὰ ἑπόμενα 3, γίνονται ὁμοῦ 1673, ὅθεν λέγομεν· 4×6 — 24, ἐκ τῶν 33, μένουσιν 9, καὶ βαςῶμεν 3· μετέπειτα, 4×5 — 20, καὶ 3, ποιοῦσιν 23, ἐκ τῶν 27, μένουσι 4, βαςῶμεν 2· εἶτα, 3×4 —12, καὶ 2, ποιοῦσι 14, ἐκ τῶν 16, μένουσι, 2· ὁμοῦ ὑπόλοιπον 249, ἐν οἷς προςιθέμενα καὶ τὰ τελευταῖα 2, ποιοῦσιν ὁμοῦ 2492· ἔπειτα, 6×7 — 42, ἐκ τῶν 42, μένει μηδὲν, βαςῶμεν 4, μετέπειτα, 5×7—35, καὶ 4, ποιοῦσι 39, πάλιν μηδὲν, βαςῶμεν 3· μετὰ ταῦτα 3×7 — 21, καὶ 3 ποιοῦσιν 24, ἐκ τῶν 24, αὖθις μηδέν.