ἐκ τοῦ Ἀφαιρουμένου .	135	,,	218
ἀφαιρεθήτω τὸ ὑπόλοιπον	67	,,	309
ὁ Ἀφαιρετέος . . .	67	,,	309

Ἡ βάσις αὐτῆς τῆς Δοκιμῆς κεῖται ἐν τῇ ἰδίᾳ Ἀφαιρέσει· διότι τὸ διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως εὑρεθὲν Ὑπόλοιπον, εἶναι τὸ, ὅσον κυρίως διαφέρει ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν μικρότερον· δοθείσης δὲ ταύτης τῆς Διαφορᾶς τῷ μικροτέρῳ, γίνεται ὅμοιος μὲ τὸν μεγαλήτερον, ἢ ἀφαιρεθέντος τοῦ Ὑπολοίπου ἐκ τοῦ Ἀφαιρουμένου, γίνεται ὁ Ἀφαιρούμενος ὅμοιος μὲ τὸν Ἀφαιρετέον.

ΚΕΦ. Δ΄.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ ἐν ἀκεραίοις Ἀριθμοῖς.

§. 73.

Ἕνα ἀριθμὸν πλεονάκις λαμβάνειν, λέγεται πολλαπλασιάζειν αὐτόν. Τίνι οὖν τρόπῳ μέλλει νὰ εὕρωμεν τὸ πολλαπλασιασθὲν, εἶναι τὸ ἀντικείμενον τῆς τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ Ὑφηγήσεως, εἴτουν ὁ Πολλαπλασιασμός.

§. 74.

Ἕκαςος ἐννοεῖ καλῶς ἀφ' ἑαυτοῦ, ὅτι εἰς τὴν πρᾶξιν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἐπιζητοῦνται κυρίως δύο Ἀριθμοί· εἷς, ὅστις πρέπει νὰ ληφθῇ πλεονάκις, καὶ ἕτερος, ὅστις δεικνύει, ποσάκις ληφθήσεται ὁ πρῶτος. Φέρ' εἰπεῖν· δοθέντος τοῦ Ἀριθμοῦ 5 ἵνα αὐξηνθῇ τετράκις, ἢ, κατὰ τὴν κοινὴν συνήθειαν, 5 νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 4, λέγομεν· ὅτι τὰ 5 εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις μέλλει νὰ ληφθῇ πλεονάκις, τὰ δὲ 4 εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις δεικνύει, ποσάκις αὐξηνθήσεται ὁ 5, τοῦτ' ἔςι, τετράκις.

§. 75.

Ὅθεν ὁ μέλλων πολλαπλασιασθῆναι Ἀριθμὸς, ὀνομάζεται Πολλαπλασιαςέος· ὁ δὲ Ἀριθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, τοῦτ' ἔςιν ἐκεῖνος, ὅστις διορίζει, ποσάκις ληφθήσεται ὁ Πολλαπλασιαςέος, λέγεται Πολλαπλασιαςής· τελευταῖον τὸ ὅ,τι προκύψει ἐξ αὐτοῦ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, καλεῖται Παραγόμενον. Παραδ. χ. πολλαπλασιαζόμενος ὁ ἀριθμὸς 5 μὲ 4, δίδει 20, λοιπὸν τὰ 5 εἶναι ὁ Πολλαπλασιαςέος· τὰ 4 ὁ Πολλαπλασιαςής· καὶ τὰ 20 τὸ Παραγόμενον.

§. 76.

Πλὴν ἔςω πρὸς σημείωσιν, ὅτι πολλαπλασιαζόμενοι δύω Ἀριθμοὶ, προκύπτει πάντοτε τὸ αὐτὸ κεφάλαιον, κᾂν λάβωμεν τὸν ἕνα, εἴτε τὸν ἕτερον διὰ Πολλαπλασιαςήν. Φέρ' εἰπεῖν· 5 νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 4, ἢ 4 μὲ 5, δίδουσι πάντοτε 20· περὶ οὗ πληροφορούμεθα ὀφθαλμοφανῶς, ἐὰν θέσωμεν πέντε ο τετράκις ὑπ' ἄλληλα, ὡς κατωτέρω,

$$\left.\begin{array}{l}00000\\00000\\00000\\00000\end{array}\right\}$$

ὅπου ἐμφανίζονται 20 μηδενικὰ, κᾂν θέσωμεν 4 σειρὰς ἀνὰ 5 μηδενικὰ, εἴτε 5 σειρὰς ἀνὰ 4 μηδενικά.

§. 77.

Πρὶν ἢ προχωρήσωμεν ὅμως εἰς τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἠξεύρωμεν ἐκ ςήθους ὅλα τὰ Παραγόμενα, τὰ ὁποῖα φέρουσιν οἱ μοναδικοὶ Ἀριθμοὶ πολλαπλασιαζόμενοι μετ' ἀλλήλων.

Εἰς τὸν ἑπόμενον Πίνακα, ὅστις καλεῖται Πυθαγορικὸς, κοινῶς δὲ Μία ἡ Μία, περιέχονται ὅλα τὰ Παραγόμενα ἐκ τῶν 2 μέχρι τῶν 9 (διότι ἕνας Ἀριθμὸς ἅπαξ λαμβανόμενος δὲν πολλαπλασιάζεται, ἀλλὰ μένει ἀμετάβλητος), τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀποςηθήσωμεν καλῶς. (α)

ἅπαξ		1	ποιεῖ	1
2	(δὶς)	2	ποιοῦσι	4
2	—	3	—	6
2	—	4	—	8
2	—	5	—	10
2	—	6	—	12
2	—	7	—	14
2	—	8	—	16
2	—	9	—	18
3	(τρὶς)	3	ποιοῦσιν	9
3	—	4	—	12
3	—	5	—	15
3	—	6	—	18
3	—	7	—	21
3	—	8	—	24
3	—	9	—	27
4	(τετράκις)	4	ποιοῦσι	16
4	—	5	—	20
4	—	6	—	24
4	—	7	—	28
4	—	8	—	32
4	—	9	—	36
5	(πεντάκις)	5	ποιοῦσιν	25
5	—	6	—	30
5	—	7	—	35
5	—	8	—	40
5	—	9	—	45
6	(ἑξάκις)	6	ποιοῦσι	36
6	—	7	—	42
6	—	8	—	48
6	—	9	—	54
7	(ἑπτάκις)	7	ποιοῦσι	49
7	—	8	—	56
7	—	9	—	63
8	(ὀκτάκις)	8	ποιοῦσιν	64
8	—	9	—	72
9	(ἐννεάκις)	9	ποιοῦσιν	81

Σημείωσις. Χάριν εὐχερεςέρας καταλήψεως, κατεςρώθη ὁ προκείμενος Πίναξ κατὰ τὸν τρόπον, καθ' ὃν πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων δύω μοναδικοὶ ἀριθμοί· διότι προκύπτουσιν ἐν τῇ ἰδίᾳ εὐθείᾳ γραμμῇ, οἵτε δύω Ἀριθμοὶ καὶ

(α) Εἰς τὴν διὰ ζώσης φωνῆς παράδοσιν, εἶναι ὠφέλιμον, ἀμέσως ἐν ἀρχῇ τοῦ Ἀθροισμοῦ, ν' ἀρχίζωσιν οἱ Διδασκόμενοι τὸ ἀποςηθίζειν τὸν ἀνωτέρω Πίνακα, ὥςε φθάνοντες εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν, νὰ μὴ δυσκολεύωνται ὁλοτελῶς.

τὸ Παραγόμενον αὐτῶν, διὰ τοῦ ὁποίου τρόπου δύνανται οἱ Ἀρχάριοιν ἀποσηθίσωσι τὸν Πίνακα ἐν ταχύτητι καὶ εὐκολίᾳ.

§. 78.

Ὅταν λοιπὸν ἕνας ἐκ περισσοτέρων ψηφίων συνιςάμενος Ἀριθμὸς, φέρ' εἰπεῖν 4852 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕνα μοναδικὸν Ἀριθμὸν, παραδ. χ. μὲ 7, τότε θέττομεν τὸν Πολλαπλασιαςὴν ὑπὸ τὸν Πολλαπλασιαςέον, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἕκαςον ψηφίον του, κατὰ τὸν Πίνακα, ὡς ἑπομένως.

Πολλαπλασιασθήτωσαν	4852	λέγοντες· (ἀρχίζοντες ἐκ
μὲ	7	τῆς Μονάδος) 7 φοραῖς
Παραγόμενον. . .	33964	2, ἤτοι 2 φοραῖς 7 ποι-

οῦσι 14, λοιπὸν θέττομεν 4, καὶ βαςῶμεν 1· εἶτα, 5 φοραῖς 7 ποιοῦσι 35, καὶ 1 (τὸ ἐκ τῶν μονάδων βαςαχθὲν) ποιοῦσι 36, διὸ θέττομεν 6, καὶ βαςῶμεν 3· ἔπειτα, 7 φοραῖς 8 ποιοῦσι 56, καὶ 3 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσιν ὁμοῦ 59, ὅθεν θέττομεν 9, καὶ βαςῶμεν 5· τελευταῖον, 4 φοραῖς 7 ποιοῦσιν 28, καὶ 5 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσιν ὁμοῦ 33, τὰ ὁποῖα τίθενται ὁλόκληρα ὑπὸ τὴν Γραμμὴν, ἐπειδὴ οὐδὲν πρόκειται πλέον διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ.

Ἡ βάσις τῆς ἀνωτέρω πράξεως εἶναι φανερά· διότι ὁ Ἀριθμὸς 4852 περιέχει ἐν ἑαυτῷ 4 Χιλιάδας, 8 Ἑκατοντάδας, 5 Δεκάδας, καὶ 2 Μονάδας· ἄρα διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς ἑπτάκις, εἶναι ἑπόμενον νὰ λάβωμεν 7 φοραῖς 2 Μονάδας, 7 φοραῖς 5 Δεκάδας, 7 φοραῖς 8 Ἑκατοντάδας, καὶ 7 φοραῖς 4 Χιλιάδας. Λοιπὸν 7 φοραῖς 2 Μονάδες, ποιοῦσι 14 Μονάδας, ὅ ἐςὶ, 4 Μονάδας καὶ 1 Δεκάδα, διὰ τοῦτο θέττομεν 4 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν Μονάδων, τὴν δὲ 1 Μονάδα προσθέττομεν (ὡς εἰς τὸν Ἀθροισμὸν) εἰς τὸ Κεφάλαιον τῶν Δεκάδων, ἤγουν· 7 φοραῖς 5 Δεκάδες, καὶ 1 Δεκὰς, ἣν ἐβαςάξαμεν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τῶν Μονάδων, ποιοῦσιν ὁμοῦ 36, λοιπὸν θέττομεν πάλιν μόνον 6 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν Δεκάδων, καὶ βαςῶμεν τὰς 3 Ἑκατοντάδας διὰ τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἑκατοντάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· δι' ἣν αἰτίαν ὁ Πολλαπλασιασμὸς ἄρχεται ἐκ τῆς κατωτάτης τάξεως, ἵνα τὰς εἰς τὸ Κεφάλαιον τῆς κατωτέρας τάξεως περιεχομένας Μονάδας τῆς πλησίον ἀνωτέρας τάξεως, δυνηθῶμεν νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ Κεφάλαιον τῆς ἐγγὺς προηγουμένης τάξεως, καθὼς πράττομεν καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμόν (α).

§. 79.

Σχόλιον. Εἰς τὸν §. 76. ἐλέχθη, ὅτι πολλαπλασιαζόμενοι δύο Ἀριθμοί, προκύπτει πάντοτε τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον, κἂν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν μεγαλήτερον τὸν μικρότερον, εἴτε μὲ τὸν μικρότερον τὸν μεγαλήτερον Ἀριθμόν· μ' ὅλον τοῦτο ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν μεγάλον Ἀριθμὸν διὰ μοναδικοῦ, εἶναι ὠφελιμώτερον νὰ πολλαπλασιάζωμεν πάντοτε μὲ τὸν μοναδικόν, ἐπειδὴ ἐκτελεῖται ὁ Πολλαπλασιασμὸς ἐν εὐκολίᾳ, ἥτις πηγάζει ἐκ τοῦ προδοθέντος Πίνακος.

§. 80.

Ὅταν σύγκηται καὶ ὁ Πολλαπλασιαςὴς ἐκ περισσοτέρων ψηφίων, τότε πολλαπλασιάζομεν μὲ ἕκαςον ψηφίον του κατὰ τὸν παρελθόντα τρόπον, τὰ δὲ προκύπτοντα Παραγόμενα τίθενται τοιουτρόπως ὑπ' ἄλληλα, ὥςε ἕκαςον αὐτῶν νὰ λαμβάνῃ τὴν ἀρχὴν ἐκ τῆς ἰδίας τάξεώς του, ἐξ ἧς προκύπτει· εἶτα ἀθροίζονται ὅλα αὐτὰ τὰ Παραγόμενα ὁμοῦ, καὶ δίδουσι τὸ Ζητούμενον.

(α) Τὸ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ σημεῖον δύο Ἀριθμῶν, ἔςω εἰς τὸ ἑξῆς τοῦτο ($\times$)· τὸ δὲ διὰ τὸ Παραγόμενον δύο πολλαπλασιασθέντων μοναδικῶν Ἀριθμῶν τόδε (—). οἷον· ἀντὶ νὰ εἴπωμεν, παραδ. χ. 4 φοραῖς 5 ποιοῦσιν 20, λέγομεν, διὰ τῶν δοθέντων σημείων· $4 \times 5 — 20$.

Οἷον· πολλαπλασια-

σθήτωσαν . 689

μὲ . . . 425

3445 Παραγόμενον τῶν 5 μονάδων.

1378 Παραγόμενον τῶν 2 δεκάδων.

2756 Παραγόμενον τῶν 4 ἑκατοντάδων.

κεφαλαιῶδες 292825 Παραγόμενον.

Ἑρμηνεία. Ὁ Πολλαπλασιαςὴς 425 τίθεται κατ' εὐθεῖαν ὑπὸ τὸν Πολλαπλασιαςέον 689, εἶτα ςρώνομεν μίαν εὐθεῖαν Γραμμὴν, ἵνα τεθῶσιν ὑπ' αὐτῆς τὰ Παραγόμενα, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ 689 μὲ τὰς 5 μονάδας, λέγοντες· 5 X 9 — 45, λοιπὸν θέττομεν 5, καὶ βαςῶμεν 4· καὶ ἐφεξῆς. Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν τὰ 689 μὲ τὰς 2 δεκάδας, πλὴν ἐπειδὴ τὰ 2 εἶναι ψηφίον τῆς δευτέρας τάξεως, διὰ τοῦτο τὸ Παραγόμενον αὐτοῦ ἄρχεται ἐκ τῆς δευτέρας τάξεως· ὡσαύτως πολλαπλασιάζομεν τὰ 689 καὶ μὲ τὰς 4 ἑκατοντάδας, ὧν τὸ Παραγόμενον ἄρχεται ἐκ τῆς τρίτης τάξεως, διότι τὰ 4 ἵςανται ἐν τῇ τρίτῃ τάξει· εἶτα ἀθροίζομεν ὅλα αὐτὰ τὰ Παραγόμενα ὡς ἵςανται, καὶ δίδουσι τὸ Παραγόμενον τῶν 689 διὰ 425 πολλαπλασιασθέντων.

Ἡ πρὸς τὰ ἀριςερὰ προχώρησις τῶν μετὰ τὴν μονάδα προηγουμένων ψηφίων τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ γίνεται διὰ τοῦτο, ἵνα τεθῶσι τὰ Παραγόμενα τοιουτοτρόπως, ὥςε νὰ δυνάμεθα διὰ νὰ τὰ ἀθροίσωμεν ὀρθῶς· διότι εἶναι προφανὲς, ὅτι ἕνας Ἀριθμὸς λαμβανόμενος δεκάκις, μεγαλύνεται δεκάκις, παρ' ὅταν μόνον ἅπαξ ληφθῇ· διὰ τοῦτο τὸ ἐκ τοῦ ψηφίου τῆς δευτέρας τάξεως Παραγόμενον πρέπει νὰ εἶναι δεκάκις μεγαλήτερον, παρὰ τὸ ἐκ τοῦ ψηφίου τῆς πρώτης τάξεως, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι τὸ Παραγόμενον ἑκάςου ψηφίου (μετὰ τὴν μονάδα), πρέπει, ὡς δεκάκις μεγαλήτερον, νὰ προηγηθῇ ἀριςερῶς μίαν τάξιν, ἵνα τεθῶσι τὰ ὁμώνυμα ψηφία ὑπ' ἄλληλα, καὶ ἀθροισθῶσιν ἔπειτα ὀρθῶς.

§. 81.

Ὅταν μεταξὺ τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ τύχωσι καὶ μηδενικὰ, τότε πολλαπλασιάζομεν μόνον μὲ τὰ ψηφία, ὧν τὰ Παραγόμενα θέττομεν ὡς πρότερον ἐν ἐκείνῃ τῇ τάξει, ἐν ᾗ ἀνήκουσι τὰ ψηφία, μὲ τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν, ὡς ἑπομένως.

Γνωςὸν ἐςὶν, ὅτι τὰ μηδενικὰ οὐδὲν σημαίνουσιν, ἄρα ἕκαςον Παραγόμενον ἐξ αὐτῶν δηλοῖ ὡσαύτως μηδέν. διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν Πολλαπλασιαςέον μὲ τὰ σημαντικὰ ψηφία

πολλαπλασιασθήτωσαν	53812
μὲ	6094
	215248
	484308
	322872
Παραγόμενον	327930328

4, 9, 6, ὧν τὰ Παραγόμενα λαμβάνουσι τὴν ἀρχὴν, ὡς προελέχθη, ἕκαςον ἐκ τῆς ἰδίας τάξεώς του, ἐξ ἧς προκύπτει· τὸ ψηφίον 6 ἵςαται ἐν τῇ τετάρτῃ τάξει, ἄρα ὀρθῶς ἄρχεται· καὶ τὸ παραγόμενον αὐτοῦ ἐξ αὐτῆς τῆς ἰδίας.

§. 82.

Καίτοι δύω Ἀριθμοὶ (κατὰ τὸν §. 76.) φέρουσι τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον, κἂν λάβωμεν τὸν ἕνα, εἴτε τὸν ἕτερον ἐξ αὐτῶν διὰ Πολλαπλασιαςὴν, μ' ὅλον τοῦτο χάριν συντομίας εἶναι ὠφελιμώτερον, νὰ ἐκλέγωμεν πάντοτε τὸν μικρότερον ἐξ αὐτῶν διὰ Πολλαπλασιαςὴν. Θετέον· ἐδόθησαν 584 ἵνα πολλαπλασιασθῶσι μὲ 8675, ὅπου ἔδει νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 5, 7, 6 καὶ 8· ἐν τούτῳ πολλαπλασιάζονται εὐκολώτερα 8675 μὲ 548, ἐπειδὴ μέλλει νὰ πολλαπλασιάσωμεν μόνον μὲ 4, 8 5, καὶ προκύπτει τὸ ἴδιον Κεφάλαιον, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

α'.

```
      584
     8675
  -------
     2920
    4088
   3504
  4672
  -------
  5066200
```

β'.

```
     8675
      584
  -------
    34700
   69400
  43375
  -------
  5066200
```

§. 83.

Ἡ αὐτὴ συντομία προκύπτει, ὅταν εἷς τῶν Παραγόντων (Παράγοντες λέγονται ὅ,τε Πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ Πολλαπλασιαστὴς) ἔχῃ περισσότερα μηδενικὰ, παρὰ ὁ ἕτερος, ἢ ὁ εἷς ἔχει, ὁ δ᾽ ἕτερος οὐχί. Παραδ. χ. ἐδόθη ὁ Ἀριθμὸς 50603 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 60548, καὶ ὁ 50007 μὲ 96854· ἐνταῦθα εἶναι ὠφελιμώτερον νὰ ληφθῶσι διὰ Πολλαπλασιασταὶ ὁ 50603, καὶ ὁ 50007· διότι εἰς ἀμφοτέρας τὰς πράξεις πολλαπλασιάζομεν μόνον μὲ 3,6,5, καὶ μὲ 7 καὶ 5, ὡς τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Α'.

```
        50603
        60548
  -----------
       404824
      202412
     253015
    303618
  -----------
   3063910444
```

Β'.

```
        60548
        50603
  -----------
       181644
     363288
    302740
  -----------
   3063910444
```

Γ'.	
	50007
	96854
	200028
	250035
	400056
	300042
	450063
	4843377978

Δ'.	
	96854
	50007
	677978
	484270
	4843377978

§. 84.

Ἐὰν οἱ Παράγοντες ἔχωσι μηδενικὰ ἐν τῷ τέλει, πολλαπλασιάζομεν ὁμοίως μόνον τὰ σημαντικὰ Ψηφία, ὧν τὰ Παραγόμενα θέττομεν τοιουτοτρόπως ὑπ᾽ ἄλληλα, ὡς νὰ μὴν ἦσαν παντελῶς μηδενικὰ παρόντα· εἶτα, ἀφ᾽ οὗ ἀθροίσωμεν τὰ μοναδικὰ Παραγόμενα, προσθέττομεν εἰς τὸ κεφαλαιῶδες Παραγόμενον τόσα μηδενικὰ, ὅσα εὑρίσκονται εἰς ἀμφοτέρους τοὺς Παράγοντας.

Ἰδοὺ ὑποδείγματα τοιαῦτα.

Α'.	
	453
	670
	3171
	2718
	303510

Β'.	
	85600
	74
	3424
	5992
	6334400

Γ'.	
	9700
	460
	582
	388
	4462000

Δ'.	
	58700
	6200
	1174
	3522
	363940000

Ὁ ἄνωθεν τρόπος προξενεῖ διπλοῦν ὄφελος· διότι πρῶτον μᾶς ἀνακουφίζει τὰς περιττὰς θέσεις τῶν μηδενικῶν, καὶ δεύτερον δὲν μᾶς ἀφίνει νὰ πράξωμεν εἰς τὴν ἀριςερῶς προχώρησιν κἀνὲν λάθος, τὸ ὁποῖον οἱ Ἀρχάριοι δύνανται νὰ πράξωσι πολλὰ εὐκόλως. Ἡ ὀρθότης καὶ ἡ αἰτία ἐλέχθησαν ἐν τῷ §. 81.

§. 85.

Ὅθεν, ὅταν ὁ Πολλαπλασιαςὴς συνίςαται ἁπλῶς ἐκ τοῦ ψηφίου 1 καὶ μηδενικῶν, τοῦτ᾽ ἔςιν, ὅταν μέλλῃ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 10, 100, 1000 κτλ., τότε οὐδὲν ἔχομεν ποιῆσαι περαιτέρω, εἰμὴ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν Πολλαπλασιαςέον μόνον τὰ μηδενικά. Παράδ. χ. ἐδόθη ὁ ἀριθμὸς 6952 διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 10, μὲ 100, μὲ 1000 κτλ., λοιπὸν προσθέττομεν εἰς τὸν Ἀριθμὸν τὰ μηδενικὰ, καὶ προκύπτουσι τὰ Κεφάλαια 69520, 695200, 6952000, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 86.

Σχόλιον. Ἐκ τῶν προλεχθέντων, καὶ ἐκ τοῦ ἀνωτέρου §. ἔγνωμεν, ὅτι πολλαπλασιάζομεν μόνον μὲ τὰ σημαντικὰ Ψηφία, τὰ δὲ μηδενικὰ προςίθενται· πλὴν ἐπειδὴ τὸ ἀνωτέρω σημαντικὸν ψηφίον εἶναι 1 (τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον μὲ ὁποιονδήποτε Ἀριθμὸν, προκύπτει πάλιν ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς, φέρ᾽ εἰπεῖν ὁ Ἀριθμὸς 5, ἔςω καὶ ἕτερος ὁποιοσδήποτε, νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 1, λέγομεν· 1×5 ποιοῦσιν αὖθις 5· ὅ ἐςὶν, ἕκαςος Ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος διὰ τοῦ 1, μένει ἀμετάβλητος), διὰ τοῦτο δὲν ἐπολλαπλασιάσαμεν, ἀλλ᾽ ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸν δοθέντα Ἀριθμὸν 6952 μόνον τὰ μηδενικά. Πλέον σαφεςέρως πληροφορούμεθα περὶ τούτου, ἀφ᾽ οὗ ςοχασθῶμεν, ὅτι μέλλοντες νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 10, 100, 1000 κτλ., πρέπει νὰ αὐξηνθῇ ὁ Πολλαπλασιαςέος 10, 100, 1000 φοραῖς καὶ ἐφεξῆς· ἡ ὁποία αὔξησις γίνεται, ἐὰν ὁ Πολλαπλασιαςέος προχωρήσῃ πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος μίαν, δύο, τρεῖς τάξεις καὶ ἐφεξῆς, ὅπερ ἐκτελέσθη διὰ τῆς προσθήκης τῶν μηδενικῶν· διότι μέλλων ὁ Ἀριθμὸς 6952 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 10, προσετέθη αὐτῷ ἓν 0, δι' οὗ ἐπροχώρησε μίαν τάξιν πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος· ἄρα ηὐξήνθη δεκάκις, ἐπειδὴ πρότερον ἐτιμᾶτο δι' 6952, ἤδη δὲ δι' 69520, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 87.

Ταὐτὸν πράττομεν καὶ ὅταν ὁ Πολλαπλασιαςέος σύγκηται ἁπλῶς ἐκ τοῦ ψηφίου 1 καὶ μηδενικῶν, ὁ δὲ Πολλαπλασιαςὴς ἐκ σημαντικῶν ψηφίων· διότι κατὰ τὸν §. 76. πολλαπλησιαζόμενοι δύω Ἀριθμοὶ προκύπτει πάντοτε τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον κἂν λάβωμεν τὸν ἕνα, εἴτε τὸν ἕτερον διὰ Πολλαπλασιαςήν. Ὅθεν δοθέντος ἑνὸς Ἀριθμοῦ, φέρ' εἰπεῖν 10000 διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 25, προσθέττομεν εἰς τὰ 25 τὰ μηδενικὰ τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ, καὶ προκύπτει Κεφάλαιον 250000, καὶ οὕτως ἐφεξῆς,

§. 88.

Ἐκ τῶν §. §. 85 καὶ 86 ἔγνωμεν, ὅτι προκειμένου Ἀριθμοῦ ἵνα πολλαπλασιασθῇ μὲ 10, προςίθεται αὐτῷ ἓν 0, καὶ οὕτω μεγαλύνει δεκάκις, ἐπειδὴ προχωρεῖ μίαν τάξιν πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος· πολλαπλασιαζόμενος δὲ μὲ 1, μένει ἀμετάβλητος. Ὅθεν δοθέντος ἑνὸς Ἀριθμοῦ ἵνα πολλαπλασιασθῇ μὲ 11, δὲν πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ποσῶς, ἀλλὰ προσθέττομεν ὑπ' αὐτοῦ τὸν ἴδιον Ἀριθμὸν, ἀρχίζοντες τὴν προσθήκην ἐκ τῆς δεκάδος πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος, δι' οὗ αὐξάνει ὁ προςεθεὶς Ἀριθμὸς δεκάκις, διὰ δὲ τὸ ὑπόλοιπον 1, ἴςαται ἀνωτέρω ὁ ἀμετάβλητος ἀριθμὸς, καὶ οὕτως ἐκτελέσθη ὁ Πολλαπλασιασμὸς μὲ 11. Οἷον.

πολλαπλασιασθήτωσαν 532 μὲ 11. ἤτοι 532

(α) προσθήκη 532 μὲ 11

532	532
5852	532
	5852

Δεῖξις.

532 νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 10,
προστίθεται τὸ 0, καὶ προκύπτουσι 5320
532 ὁμοίως μὲ 1,
μένει ἀμετάβλητος ὁ Ἀριθμὸς 532
5852

καὶ ἀνάπ. 532 ὡσαύτως μὲ 1,
προκύπτει ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς 532
532 ὁμοίως μὲ 10,
μεγαλύνουσι δεκάκις διὰ τοῦ 0. 5520
5852

§. 89.

Ὡσαύτως πολλαπλασιάζομεν εὐκόλως καὶ τοὺς μικτοὺς Ἀριθμοὺς μόνον μὲ ἕνα ἁπλοῦν Ἀριθμόν. Παράδ. χ. Γρόσ. 25 ,, 36 ,, παράδ. 2 ἄσπρα νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ 7, δηλοῖ νὰ αὐξηνθῶσι τὰ 2 ἄσπρα, οἱ 36 παράδ., καὶ τὰ 25 γροσ. 7 φοραῖς, ὅθεν θέττομεν.

(α) Τὸ 0 δὲν ἐτέθη εἰς τὴν Προσθήκην διὰ τοῦτο, ἐπειδὴ προχωρήσας ὁ δεύτερος Ἀριθμὸς ἐκ τῆς δεκάδος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος, ηὐξήνθη δὲ αὐτῆς τῆς προχωρήσεως δεκάκις· διότι τὸ ψηφίον 2 ἐτέθη ἐν τῇ τάξει τῶν δεκάδων, τὸ 3 ἐν τῇ τῶν ἑκατοντάδων, καὶ τὸ 5 ἐν τῇ τῶν χιλιάδων, καὶ ἤδη τιμᾶται αὐτὸς ὁ Ἀριθμὸς διὰ 5320, ἐν ᾧ πρότερον ἐτιμᾶτο μόνον διὰ 532, ἄρα τὸ μηδενικὸν, ὡς ἀσήμαντον, εἶναι ἐνταῦθα πάντη περιττὸν, ὡς φαίνεται καὶ ἐν τῇ ἀνωτέρω Δείξει.

Γροσ. 25 „ 36 παράδ. „ 2 ἄσπρα.
μὲ 7

Γροσ. 181 „ 15 παράδ. „ 2 ἄσπρα·

ἤτοι 2 × 7 — 14 ἄσπρα, ὃ ἐςὶ 3 παράδ. καὶ 2 ἄσπρα, λοιπὸν θέττομεν 2 ἄσπρα, καὶ βαςῶμεν 3 παραδ. ἔπειτα, 6 × 7 — 42 καὶ 3 τὰ βαςαχθέντα ποιοῦσιν ὁμοῦ 45 παράδ. διὰ τοῦτο θέττομεν 5, καὶ βαςῶμεν 4· μετέπειτα, 3 × 7 — 21, καὶ 4 τὰ βαςαχθέντα ποιοῦσιν ὁμοῦ 25 δεκάδες, αἵτινες (ἐπειδὴ 4 δεκάδες ποιοῦσιν 1 Γρόσι) ςαίνουσιν 6 Γρόσια καὶ 1 δεκάδα, ὅθεν θέττομεν τὴν 1 δεκάδα, καὶ βαςῶμεν 6 Γρόσια· μετὰ ταῦτα, 5 × 7 — 35 καὶ 6 τὰ βαςαχθέντα Γρόσια, ποιοῦσιν ὁμοῦ 41, διὸ θέττομεν 1, καὶ βαςῶμεν 4· τελευταῖον, 2 × 7 — 14, καὶ τὰ βαςαχθέντα 4 ποιοῦσιν ὁμοῦ 18 ὡς ἀνωτέρω.

Τὸ ἄνωθεν Ὑπόδειγμα δύναται νὰ θεωρηθῇ οὕτως. Ἕνας χρειάζεται 9 πήχαις μεταξωτὸν· τοῦ ὁποίου ἡ πήχη τιμᾶται Γροσ. 19 „ 15 παράδ. 2 ἄσπρα· ἄρα πόσα μέλλει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰς 9 πήχας;

Γροσ. 19 „ 15 παράδ. „ 2 ἄσπρα.
μὲ 9

Γροσ. 174 „ 21 παράδ. — —

Ἕκαςος ἐννοεῖ ἀφ' ἑαυτοῦ, ὅτι 9 πῆχαι τιμῶνται ἐννεάκις τόσον, ὅσον τιμᾶται μία πήχη· ὅθεν διὰ νὰ προκύψῃ ἡ ὁλόκληρος τίμησις τῶν 9 πηχῶν, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς πήχης μὲ 9.

Ἕνας χρεωςεῖ Γρόσια 200 „ —, διὰ τὰ ὁποῖα ἔδωκε τῷ Δανειςῇ του 9 πήχαις ῥοῦχον, πρὸς Γροσ. 16 „ 12 παράδ. 1 ἄσπρον ἑκάςην πήχην, ἄρα πόσα μέλλει νὰ μετρήσῃ ἔτι πρὸς ἀποπλήρωσιν τῶν Γροσίων 200;

Λύσις καὶ Ἑρμηνεία.

Πρότερον λογαριάζομεν πόσα ςαίνουσιν αἱ 9 πῆχαι, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὡς καὶ μέχρι τοῦδε. Οἷον.

Γροσ. 16 ,, 12 παράδ. 1 ἄσπρον.
μὲ 9

Γροσ. 146 ,, 31 παράδ. — —

Αὐτὰ ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν Γροσίων 200 ,, —, πρέπει νὰ πληρώσῃ πρὸς ἀποπλήρωσιν Γροσ. 53 ,, 9 παράδ.

§. 90.

Σχόλιον. Καίτοι οἱ παρελθόντες πολλαπλασιασμοὶ τῶν μικτῶν Ἀριθμῶν γίνονται μόνον μὲ ἕνα ἁπλοῦν Ἀριθμὸν, μ' ὅλον τοῦτο προξενοῦσιν εἰς τοὺς Ἀρχαρίους μεγάλον ὄφελος. Αὐτοὶ διδάσκουσι τὴν συνήθειαν καὶ τὴν χρῆσιν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, εἰσὶν ἐν ταὐτῷ καὶ ὠφέλιμος προπαρασκευὴ εἰς τὴν Διαίρεσιν, ἐπειδὴ ἐκ τούτου διδασκόμεθα τὸν τρόπον τοῦ νὰ καταλάβωμεν, ἐὰν, καὶ ποσάκις τοῦτος ἢ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, μερικῶς λαμβανόμενος, εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος, παρὰ εἷς ὁποιοσδήποτε ἄλλος.

Τοῦ λοιποῦ δὲ πῶς πολλαπλασιάζονται εὐκόλως καὶ συντόμως οἱ μικτοὶ Αἰρθμοὶ μὲ ἕνα ἕκαςον Ἀριθμὸν συνιςάμενον ἐκ περισσοτέρων, παρὰ ἀφ' ἑνὸς ψηφίου, καὶ περὶ διαφόρων χρησίμων ὠφελειῶν, αἵτινες προκύπτουσιν ἐν τῷ λογαριάζειν, ῥηθήσεται μετὰ τὴν Διαίρεσιν εἰς χωριςὸν Κεφάλαιον.