§. 234.

Κατὰ δύο τρόπους δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ ἀκέραιον Ἀριθμὸν καὶ Κλάσμα, φέρ' εἰπεῖν, μὲ $5\frac{7}{8}$, μὲ $7\frac{3}{4}$ κ. τ. λτ. Ἐνταῦθα ἢ πολλαπλασιάζομεν πρότερον μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ὡς συνήθως, καὶ ἔπειτα μὲ τὸ Κλάσμα, ὡς ἐῤῥέθη, ἢ μεταβάλλομεν τὸν μικτὸν Ἀριθμὸν εἰς νόθον Κλάσμα (δηλ. πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν μὲ τὸν Παρονομαστὴν, ἀθροίζοντες ὁμοῦ καὶ τὸν Ἀριθμητὴν), μὲ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ὡς μὲ κύριον Κλάσμα, καθὼς τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Α'. Τρόπος.

Πολλαπλασιασθ'. Γρ. 35,, 36 π. μὲ $9\frac{7}{8}$

9 — 4 ἢ $\frac{1}{2}$

Γρ'. 329,, 4 π. — 2 - $\frac{1}{2}$ τῶν 4

$\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γρ'. 35,, 36 π. — 17,, 38 - — 1 - $\frac{1}{2}$ - 2

$\frac{1}{2}$ — — — 17,, 38 — — 8,, 39 -

$\frac{1}{2}$ — — — 8,, 39 — — 4,, $19\frac{1}{2}$ -

Ποιοῦσι. Γρ'. 354,, $20\frac{1}{2}$ παράδες

Β'. Τρόπος.

Πολλαπλασιασθ'. Γρ'. 35,, καὶ πρ'. 36 μὲ $9\frac{7}{8}$

79,, — 20 — 79

Γρ'. 2765,, — 10 — 8

20 π. $\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν 79 . — 39,, 20 π. — 5

10 - $\frac{1}{2}$ — — Γρ. 39,, 20 π. — 19,, 30 - — 1

5 - $\frac{1}{2}$ — — — 19,, 30 - — 9,, 35 -

1 $\frac{1}{2}$ — — — 9,, 35 - — 1,, 39 -

διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8 Γρ'. 2836,, 4 παράδες

Ποιοῦσι Γρ'. 354,, $20\frac{1}{2}$ παράδες

Ἑρμηνεία. Κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον πολλαπλασιάσαμεν τὰ Γρόσ. 35 ,, 36 παράδ. μὲ 9, καὶ προέκυψαν Γρόσ. 329 ,, 4 παράδ., εἶτα διαιρέσαμεν τὰ $\frac{7}{8}$ εἰς 4, 2, καὶ 1 ὄγδοον, καὶ ἐλάβομεν αὐτὰ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου.

Κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον μετεβάλλομεν τὸν μικτὸν Ἀριθμὸν εἰς νόθον Κλάσμα, εἰπόντες· $8 \times 9 = 72$ (ὄγδοα), καὶ τὰ 7 ὄγδοα ὁμοῦ, ποιοῦσιν $\frac{79}{8}$, καὶ ἀντὶ μὲ $9\frac{7}{8}$, πολλαπλασιάσαμεν μὲ τὸ Κλάσμα $\frac{79}{8}$, εἴτουν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 79, εἶτα ἐλάβομεν κλασματικῶς τοὺς 36 παράδ. ἐκ τῶν 79, καὶ διαιρέσαντες τὰ προκύψαντα Γρόσ. 2839 ,, 4 παράδ. διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 8, προέκυψαν Γρόσ. 354 ,, $20\frac{1}{2}$ παράδ. ὡς ἀπέναντι.

§. 235.

Σχόλιον. Α'. Ἐν τάχει ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις τῶν τοιούτων Προβλημάτων, ἐὰν ἀντὶ μὲ $9\frac{7}{8}$, $9\frac{5}{6}$, $9\frac{3}{4}$ καὶ μὲ τὰ τούτοις ὅμοια, πολλαπλασιάσωμεν μὲ 10, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ Παραγομένου $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, κ. τ. λ. Ἐν τῷ ῥηθέντι Ὑποδείγματι πρόκειται, ἵνα πολλαπλασιασθῶσι Γρόσ. 35 ,, 36 παράδ. μὲ $9\frac{7}{8}$, ὅπερ δηλοῖ, νὰ ληφθῶσι 10 ὄγδοα ὀλιγώτερον τῶν 10· πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὰ Γρόσ. 35 ,, 36 παράδ. μὲ 10, καὶ προκύπτουσι Γρόσ. 359 ,, —· διότι δεκάκις 36 παράδ. ποιοῦσι 36 δεκάδας, ἤτοι Γρόσ. 9 ,, —, δεκάκις δὲ Γρόσ. 35 ,, —, ποιοῦσι Γρόσ. 350, καὶ τ' ἀνωτέρω Γρόσ. 9, δίδουσιν ὁμοῦ Γρόσ. 359 ,, —, ἐξ ὧν ἀφαιρεθέντος 1 ὀγδόου, δηλ. ἐκ τῶν Γροσ. 35,,36 παράδ., ἤτοι Γρόσ. 4,,$19\frac{1}{2}$ παράδ. (τὰ περισσότερα ληφθέντα), μένουσι Γρόσ. 354,,$20\frac{1}{2}$ παράδ., ὡς ἀπέναντι.

§. 236.

Σχόλιον. Β'. Ἀμφότεροι οἱ τρόποι τοῦ §. 234. ἔχουσιν ἰδιαιτέρας συντομίας, οἵτινες, κατὰ τὰς περιστάσεις τοῦ

Προβλήματος, προξενοῦσι ποτὲ μὲν ὁ εἷς, ποτὲ δὲ ὁ ἕτερος συντομίαν. Πλὴν ὁ τρόπος, δι' οὗ μεταβάλλεται ὁ σὺν κλάσματι μικτὸς Ἀριθμὸς εἰς νόθον Κλάσμα, πρέπει νὰ διαφυλαχθῇ εἰς ὅλας σχεδὸν τὰς Καταςρώσεις περισσοτέρων Θέσεων, ὡς σαφηνισθήσονται ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ· εἰς ἑτέρας πτώσεις ὅμως εἶναι ὠφελιμώτερον, πρότερον νὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ ἔπειτα μὲ τὸ Κλάσμα, καθὼς ἀπεδείχθη ἐν τῷ §. 234. Περὶ τῶν τοιούτων Πτώσεων ἕπονται Ὑποδείγματα, τὰ ὁποῖα ὁδηγήσουσι τὸν μετερχόμενον τὴν Ἀριθμητικὴν, διὰ νὰ ἐκλέγῃ μόνος τὸν ὠφελιμώτερον τρόπον εἰς ἕκαςον Ὑπόδειγμα.

Πτῶσις. Γ'. Πῶς πολλαπλασιάζεται τὸ Κλάσμα μὲ ἕτερον Κλάσμα.

§. 237.

Προκειμένου Κλάσματος ἵνα πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕτερον Κλάσμα, φέρ' εἰπεῖν, $\frac{2}{3}$ μὲ $\frac{4}{5}$ κ. τ. λ. πολλαπλασιάζεται Ἀριθμητὴς μὲ Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαςὴς μὲ Παρονομαςὴν, εἶτα διαιρεῖται ἢ τῷ ὄντι, ἢ κλασματικῶς, τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἀριθμητῶν διὰ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονομαςῶν. Ἰδοὺ Ὑποδείγματα τοιαῦτα.

α'. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$	β'. $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}$	γ'. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8}$
Ποιοῦσιν $\frac{8}{15}$.	Ποιοῦσιν $\frac{5}{16}$.	Ποιοῦσιν $\frac{20}{40}$. ἐλατ. $\frac{1}{2}$.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ α'. προέκυψε τὸ τῶν Ἀριθμητῶν Κεφάλαιον $2 \times 4 - 8$, καὶ τὸ τῶν Παρονομαςῶν $3 \times 5 - 15$, διαιρούμενα λοιπὸν τὰ 8 διὰ τῶν 15, δίδουσιν (ὡς §. 176.) $\frac{8}{15}$.

Εἰς τὸ β'. προέκυψε τὸ τῶν Ἀριθμητῶν Κεφάλαιον 5, καὶ τὸ τῶν Παρονομαςῶν 16, ὅθεν διαιρουμένων τῶν 5 διὰ τῶν 16, δίδουσι $\frac{5}{16}$.

Εἰς τὸ γ'. λέγομεν ὡσαύτως, $4 \times 5 - 20$, καὶ $5 \times 8 - 40$, ποιοῦσιν $\frac{20}{40}$, ἅτινα διὰ τῶν 2 ἐλαττωθέντα, δίδουσιν $\frac{1}{2}$.

Δεῖξις. Ἡ βάσις τοῦ ἀπέναντι τρόπου πηγάζει ἐκ τῶν §. 184 καὶ 185, ὅπου ἐλέχθη, ὅτι ἡ τοῦ Κλάσματος τιμὴ μεγαλύνεται διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ Ἀριθμητοῦ, καὶ ἐλαττοῦται διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ Παρονομαστοῦ.

Τὰ Κλάσματα λοιπὸν πολλαπλασιάζονται ἀλλήλοις τοιουτοτρόπως· ὁ Πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ, εἶτα διαιρεῖται διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ (ὡς §. 222.). Ὅθεν ὅταν ὁ Πολλαπλασιαστέος εἶναι Κλάσμα, φέρ' εἰπεῖν $\frac{4}{5}$, καὶ μέλλῃ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ $\frac{2}{3}$, τότε πολλαπλασιάζεται ὁ Πολλαπλασιαστέος $\frac{4}{5}$ μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ 2, καὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 3, τοῦτ' ἐστι, τὰ $\frac{4}{5}$ πρέπει νὰ ληφθῶσι δὶς περισσότερον, καὶ ἔπειτα πάλιν τρὶς ὀλιγώτερον· εἴτουν ὁ Α-Α'ριθμητὴς 4 πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἕτερον Ἀριθμητὴν 2 (ὡς §. 184), καὶ ὁ Παρονομαστὴς 5 μὲ τὸν ἄλλον Παρονομαστὴν 3 (ὡς §. 185.), ὃ ἐστὶν ἀπόδειξις, ὅτι κατὰ τὸν Κανόνα, πολλαπλασιάζεται Ἀριθμητὴς μὲ Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς μὲ Παρονομαστήν.

§. 238.

Ἂν σὺν τοῖς Κλάσμασι πρόκηνται καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοί, εἶναι, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ὠφελιμώτερον νὰ μεταβληθῶσιν οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ εἰς νόθα Κλάσματα, διότι τότε ἐπιτελεῖται ἡ πρᾶξις ὡς μὲ κύρια Κλάσματα. Π. χ. πρόκεινται ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν $6\frac{3}{5}$ μὲ $8\frac{2}{3}$· μεταβάλλομεν λοιπὸν τόσον τὰ $6\frac{3}{5}$, ὅσον καὶ τὰ $8\frac{2}{3}$ εἰς νόθα Κλάσματα, καὶ οὕτω προκύπτουσι πρὸς Πολλαπλασιασμὸν $\frac{33}{5}$, καὶ $\frac{26}{3}$, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ πολλαπλασιασθέντες μετ' ἀλλήλων, γίνεται ἔπειτα ἡ διαίρεσις (ὡς §. 237.)

$$\begin{array}{ccc} 6\frac{3}{5} & \times & 8\frac{2}{3} \\ \hline 33 & & 26 \\ & & 33 \\ \hline & & 78 \\ & & 78 \\ \hline 15 & \text{εἰς} & 858 \end{array}$$

παρέχονται $57\frac{3}{15}$ ἤτοι $\frac{1}{5}$.

Ἑρμηνεία. Ἀμφότεροι οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ μετεβλήθησαν εἰς τὰ παρευρισκόμενα Κλασματικάτων μέρη, δηλονότι· $5 \times 6 = 30$ (πέμπτα), καὶ 3 (πέμπτα), ποιοῦσιν ὁμοῦ 33 πέμπτα· εἶτα $3 \times 8 = 24$ (τρίτα), καὶ 2, ποιοῦσιν ὁμοῦ 26 τρίτα, ἔπειτα πολλαπλασιασθέντες οἱ Ἀριθμηταὶ 33 καὶ 26 μετ᾽ ἀλλήλων, προέκυψαν 858, ἅτινα διὰ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονμαστῶν τρὶς 5, εἴτουν 15 διαιρεθέντα, πρόκυψε τὸ Ζητούμενον $57\frac{1}{5}$.

Ἐὰν μόνον εἷς τῶν δοθέντων Ἀριθμῶν ἦ μικτὸς, μεταβάλλεται αὐτὸς μόνον· φέρ᾽ εἰπεῖν, πρόκεινται ἵνα πολλαπλασιασθῶσι $\frac{4}{5}$ μὲ $3\frac{5}{6}$, ματαβάλομεν λοιπὸν μόνον τὰ $3\frac{5}{6}$ εἰς νόθον Κλάσμα, τὰ γὰρ $\frac{4}{5}$ εἰσὶ Κλάσμα, διὸ καὶ μένει, ὡς ἕπεται.

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{5} & \times & 3\frac{5}{6} \\ \hline & & 23\ (\text{ἕκτα}) \\ \text{μὲ} & . & .\ 4\ (\text{πέμτα}) \\ \hline & 30\ \text{εἰς}\ 92 & \end{array}$$

Ποιοῦσι $3\frac{2}{30}$ ἤτοι $\frac{1}{15}$

Πρόβλημα. Ἐὰν μία πήχη Πράγματός τινος τιμᾶται διὰ Γρόσια $5\frac{1}{5}$, πόσα πληρωθήσονται διὰ $\frac{1}{2}$ πήχην;

Λ ύ σ ι ς.

Ἐπειδὴ 1 ἀκέραια πήχη τιμᾶται διὰ Γρόσια $5\frac{1}{5}$, ἄρα ἡ $\frac{1}{2}$ πήχη τιμᾶται μόνον τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν Γροσίων $5\frac{1}{5}$,

ὅθεν τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{26}{5}$

δίδει $\frac{26}{10}$, ἤτοι Γρ'. $2\frac{3}{5}$

Ἤτοι πλέον εὐκολώτερον· ἐὰν, ἀντὶ Γρόσια $5\frac{1}{5}$, θέσωμεν Γρόσια 5 ,, 8 παράδες, καὶ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τὰ ἥμισυ, φέρουσι Γρόσια 2 ,, 24 παράδες, τὰ ὁποῖα ποιοῦσιν ὡσαύτως Γρόσια $2\frac{3}{5}$, ὡς ἀνωτέρω· ἐνταῦθα ὅμως ἐγένετο διὰ τοῦτο ἡ πρώτη λύσις, ἵνα δείξωμεν μόνον, τίνι τρόπῳ πολλαπλασιάζεταί κοινῶς τὸ Κλάσμα μὲ ἕτερον Κλάσμα, καὶ ἀκέραιον Ἀριθμόν.

§. 240.

Σ υ ν τ ο μ ί α ι.

Μεταξὺ τῶν τοιούτων Πολλαπλασιασμῶν προκύπτουσι πολλάκις καὶ διάφοραι Συντομίαι, ἐξ ὧν ἡ ὠφελιμωτέρα καὶ προτιμοτέρα εἶναι αὕτη, ἵνα σμικρύνωμεν, ὅσον δυνάμεθα, τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἑνὸς Κλάσματος πρὸς τὸν Παρονομαςὴν τοῦ ἑτέρου, ἢ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτὸν ὁλοτελῶς, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώσεως εὐκολύνεται τὸ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν, ἐνίοτε δὲ συμβαίνει καὶ ἐκλείπουσιν ἀμφότερα, καὶ προκύπτει ἀμέσως τὸ Ζητούμενον. Π.χ. πρόκειται ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν $\frac{6}{7}$ μὲ $\frac{7}{10}$· ἐνταῦθα ὄντες ὅ,τε Ἀριθμητὴς 7 τοῦ ἑνὸς Κλάσματος, καὶ ὁ Παρονομαςὴς 7 τοῦ ἑτέρου ὅμοιοι, ἐκλείπουσι δι' ὅλου, ὁ δ' Ἀριθμητὴς 6 τοῦ ἄλλου Κλάσματος πρὸς τὸν Παρονομαςὴν 10 τοῦ ἑτέρου, σμικρύνονται ἐπίσης διὰ τῶν 2, καὶ οὕτω προκύπτουσι πρὸς Πολλαπλασιασμὸν μόνον $\frac{1}{5}$ μὲ 3, τὰ ὁποῖα δίδουσιν ἀμέσως $\frac{3}{5}$. Ἰδοὺ τοιαῦτα Ὑποδείγματα.

Α΄.

$$\frac{2 \cdot \cancel{14}}{5 \cdot \cancel{15}} \times \frac{\cancel{18} \cdot 6}{\cancel{35} \cdot 5}$$

Ποιοῦσι $\frac{12}{25}$.

Β΄.

$$5\tfrac{3}{5} \times 8\tfrac{3}{4}$$

$$\frac{7 \cdot \cancel{28}}{\cancel{5}} \quad \frac{\cancel{35} \cdot 7}{\cancel{4}}$$

Φέρουσι 49

Γ΄.

$$\frac{\cancel{6}}{7} \times 5\tfrac{5}{6}$$

$$\frac{\cancel{35} \cdot 5}{\cancel{6}}$$

Δίδουσι 5.

Εἰς τὸ Α΄. σμικρύνονται ὅ,τε Ἀριθμητὴς 14, καὶ ὁ Παρονομαςὴς 35 διὰ τοῦ 7, λοιπὸν 7 εἰς τὰ 14 ἐμπεριέχονται 2 φοραῖς, καὶ 7 εἰς τὰ 35· 5, διὰ τοῦτο ἐξαλείφομεν τὰ 14 καὶ 35, καὶ θέττομεν ἀντ᾿ αὐτῶν τοὺς σμικρυνθέντας Ἀριθμούς των 2 καὶ 5. Ἀκολούθως ὁ Παρονομαςὴς 15, καὶ ὁ Ἀριθμητὴς 18 σμικρύνονται διὰ τοῦ 3, εἴτουν, 3 εἰς τὰ 15, 5, καὶ 3 εἰς τὰ 18, 6, λοιπὸν ἐξαλείφομεν τὰ 15 καὶ 18, καὶ θέττομεν ἀντ᾿ αὐτῶν 5 καὶ 6. Μὲ αὐτοὺς τοὺς ἐλαττωθέντας ἀριθμοὺς πράττομεν ἀκολούθως κατὰ τὸν κανόνα, καθὼς ἔπρεπε νὰ πράξωμεν μὲ τοὺς μὴ ἐλαττωμένους ἀριθμούς, δηλονότι· πολλαπλασιάζομεν τὸν Ἀριθμητὴν 2 μὲ τὸν ἕτερον Ἀριθμητὴν 6, καὶ τὸν Παρονομαςὴν 5 μὲ τὸν ἄλλον Παρονομαςὴν 5, καὶ οὕτω προκύπτουσι $\frac{12}{25}$, ἐξ οὗ δεικνύεται σαφῶς ἡ ὠφέλεια τῆς ἐλαττώσεως· διότι ἐὰν δὲν ἐσμικρύναμεν, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 14 μὲ 18, καὶ τὰ 15 μὲ τὰ 35, ἐκτὸς δὲ τούτου τοῦ διεξοδικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἤθελε προκύψῃ καὶ τὸ ἀσυγκρίτως μεγαλήτερον καὶ ἀσαφὲς Κλάσμα $\frac{252}{525}$.

Εἰς τὸ Β΄. ἀφ᾿ οὗ μεταβάλλωμεν τοὺς μικτοὺς Ἀριθμούς, προέκυψαν τὰ νόθα Κλάσματα $\frac{28}{5}$ καὶ $\frac{35}{4}$, ἐξ ὧν ὁ Παρονομαςὴς 4 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 28, καὶ ὁ Παρονομαςὴς 5 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 35 ἐξέλειπον ὁλοτελῶς, δηλονότι, 4 εἰς τὰ 28, 7, καὶ 5 εἰς τὰ 35, 7, λοιπὸν ἐξαλείφομεν τὰ 4, καὶ ἀντὶ τῶν 28, θέττομεν 7, ὡσαύτως ἐξαλείφομεν τὰ 5, καὶ ἀντὶ τῶν 35, θέττομεν 7· ὅθεν ἐπειδὴ ἐξέλειπον, καὶ δὲν ὑπάρχουσι πλέον Παρονομαςαὶ, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζονται ἁπλῶς οἱ δύο Ἀριθμηταὶ 7 X 7 μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν 49 δίδει τὸ Ζητούμενον.

Εἰς τὸ Γ'. ἀφ' οὗ μετεβάλλωμεν τὰ $5\frac{5}{6}$ εἰς $\frac{35}{6}$, ὁ Παρονομαςὴς 6 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 6 ἐξέλιπον ὁλοτελῶς, ὁ δὲ Παρονομαςὴς 7 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 35 ἐξέλιπεν ὡσαύτως, καὶ ἔμεινε μόνον ὁ Ἀριθμητὴς 5, ὅςτις, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ἕτερος ἀριθμὸς διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ, δίδει τὸ Ζητούμενον.

Δεῖξις. Ὅτι ἡ ἀνωτέρω βάσις τῆς ἐξαλείψεως καὶ ἐλαττώσεως ἐνεργεῖται χωρίς τινος βλάβης τῆς τοῦ λογαριασμοῦ ὀρθότητος, δύναταί τις εὐθέως νὰ τὸ ἐννοήσῃ, ἀρκεῖ μόνον νὰ ςοχασθῇ, ὅτι οἱ Ἀριθμηταὶ τῶν Κλασμάτων εἰσὶ, καὶ θεωροῦνται ὡς Παράγοντες τοῦ ἐσομένου Ἀριθμητοῦ, καὶ οἱ Παρονομαςαὶ ὡς Παράγοντες τοῦ ἐσομένου Παρονομαςοῦ, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἐσόμενος Ἀριθμητὴς δύναται νὰ σμικρυνθῇ εἰς τὸν ἐσόμενον Παρονομαςὴν, καθὼς ἀπεδείχθη εἰς τὴν Μεταφορὰν τῶν Κλασμάτων, ἄρα δύνανται νὰ σμικρυνθῶσι καὶ οἱ Παράγοντες αὐτῶν, ἐπειδὴ διὰ ταύτης τῆς ἐλαττώσεως σμικρύνεται τοσάκις ὁ ἐσόμενος Ἀριθμητὴς, ὁσάκις καὶ ὁ ἐσόμενος Παρονομαςὴς, καὶ οὕτω, κατὰ τὸν §. 186., μένει ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος Τιμή.

§. 241.

Σχόλιον. Πλὴν ἂς σημειώσωμεν καλῶς, ὅτι πρὶν μεταβληθῶσιν οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ εἰς νόθα Κλάσματα, δὲν δυνάμεθα νὰ σμικρύνωμεν τοὺς Ἀριθμητὰς καὶ Παρονομαςὰς αὐτῶν. Φέρ' εἰπεῖν· πρόκειται ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν $8\frac{7}{10}$ μὲ $\frac{5}{7}$· ἐνταῦθα δὲν δυνάμεθα νὰ σμικρύνωμεν πρότερον οὔτε τὸν Ἀριθμητὴν 5 πρὸς τὸν Παρονομαςὴν 10, οὔτε τὸν Παρονομαςὴν 7 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 7, ἀλλ' ἀφ' οὗ μεταβληθῶσι τὰ $8\frac{7}{10}$ εἰς τὸ νόθον Κλάσμα $\frac{87}{10}$· διότι, ἐὰν πρὸ τῆς μεταφορᾶς τῶν $8\frac{7}{10}$ σμικρύνωμεν τὸν Παρονομαςὴν 10 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 5 τοῦ ἑτέρου Κλάσματος, καὶ ἐξαλείψωμεν ἔπειτα καὶ τὸν Ἀριθμητὴν 7 πρὸς τὸν τοῦ ἄλλου Κλάσματος Παρονομαςὴν 7, προκύπτουσι πρὸς Πολλαπλασιασμὸν διὰ μὲν τὰ $8\frac{7}{10}$, μόνον $8\frac{1}{2}$, ἤτοι ἀναλυθέντα $\frac{17}{2}$, διὰ δὲ τὰ $\frac{5}{7}$ μόνον $\frac{1}{1}$, τοῦτ᾽ ἔςι, μηδὲν, ἐν ᾧ κατὰ τὸν Κανόνα, διὰ μὲν τὰ $8\frac{7}{10}$ (δηλ. ἀφ᾽ οὗ μεταβληθῶσιν εἰς τὸ νόθον Κλάσμα λέγοντες· 8×10 — 80, καὶ 7 ποιοῦσιν $\frac{87}{10}$, καὶ σμικρυνθῇ ὁ Παρονομαςὴς 10, ὡσαύτως καὶ τοῦ ἑτέρου Κλάσματος ὁ Ἀριθμητὴς 5.) πρέπει νὰ προκύψωσιν $\frac{87}{2}$, διὰ δὲ τὰ $\frac{5}{7}$ προκύπτει $\frac{1}{7}$, εἴτουν $\frac{87}{2}$ νὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ $\frac{1}{7}$, οὐχὶ δὲ $\frac{17}{2}$ μὲ $\frac{1}{1}$, ὡς ἀνωτέρω, τὰ ὁποῖα δύο τελευταῖα Κλάσματα δεικνύουσι σαφῶς, ὅτι ἐὰν πρὸ τῆς μεταφορᾶς τοῦ μικτοῦ Ἀριθμοῦ $8\frac{7}{10}$ σμικρύνωμεν, προκύπτουσι Κλάσματα ψευδῆ, καὶ ἑπομένως ψευδὲς Πηλίκον. Ὅθεν προσεκτέον, ὅτι ἕκαςος μικτὸς Ἀριθμὸς πρέπει πρότερον νὰ μεταβληθῇ εἰς τὸ ἀνῆκον αὐτοῦ νόθον Κλάσμα, καὶ ἔπειτα νὰ σμικρυνθῇ ὁ Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς αὐτοῦ.

§. 242.

Ἀπαραλλάκτως πολλαπλασιάζονται καὶ περισσότερα Κλάσματα μετ᾽ ἀλλήλων. Π. χ. $\frac{3}{5}$ μὲ $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{9}$ μὲ $\frac{1}{4}$ καὶ ἐφεξῆς, πολλαπλασιάζονται ὅλοι οἱ Ἀριθμηταὶ 3, 5 καὶ 8 (τὸ γὰρ 1 μηδὲν πολλαπλασιάζει), καὶ ὅλοι οἱ Παρονομαςαὶ 5, 8, 9, καὶ 4 μετ᾽ ἀλλήλων· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Ἀριθμητῶν προκύπτει ὁ Ἀριθμητὴς, καὶ ἐκ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονομαςῶν προκύπτει ὁ Παρονομαςὴς τοῦ ἐσομένου Κλάσματος, καθὼς ἐν τῇ Δείξει τοῦ §. 240. ἀπεδείχθη, διὰ τοῦτο οἱ ῥηθέντες Ἀριθμηταὶ καὶ Παρονομαςαὶ δύνανται καὶ πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ ἐλαττωθῶσιν, ἢ παντάπασι νὰ ἐξαλειφθῶσιν. Οἷον· $\frac{3}{5}$ μὲ $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{9}$ μὲ $\frac{1}{4}$ ποιοῦσιν

$\frac{1}{12}$· διότι ὁ Παρονομαςὴς 5 τοῦ πρώτου Κλάσματος πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 5 τοῦ δευτέρου Κλάσματος, καὶ ὁ Ἀριθμητὴς 8 τοῦ τρίτου πρὸς τὸν Παρονομαςὴν 8 τοῦ δευτέρου, ὄντες ὅμοιοι ἐκλείπουσιν ὁλοτελῶς, ὁ δ' Ἀριθμητὴς 3 τοῦ πρώτου πρὸς τὸν Παρονομαςὴν 9 τοῦ τρίτου σμικρύνονται διὰ τοῦ 3, καὶ μένει διὰ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἐσομένου Κλάσματος, μόνον ὁ Ἀριθμὸς 1, καὶ διὰ τὸν Παρονομαςὴν αὐτοῦ 3 καὶ 4, ἅτινα πολλαπλασιαζόμενα, δίδουσιν $\frac{1}{12}$ Πηλίκον.

Δεῖξις. Τὴν ἀνωτέρω Βάσιν πληροφορούμεθα ἀμέσως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν τὸ ἓν Κλάσμα μετὰ τοῦ ἑτέρου· δηλ. $\frac{3}{5}$ μὲ $\frac{5}{8}$, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ 3 καὶ 5, καὶ οἱ Παρονομαςαὶ 5 καὶ 8 πολλαπλασιαζόμενοι ἰδιαιτέρως μετ' ἀλλήλων, προκύπτει Κλάσμα $\frac{15}{40}$, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὸ ἄλλο Κλάσμα $\frac{8}{9}$, προκύπτει ἕτερον $\frac{120}{360}$, αὐτὸ δὲ πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὸ τελευταῖον $\frac{1}{4}$, προκύπτει τὸ ὁλόκληρον νόθον Κλάσμα $\frac{120}{1440}$, ὅπερ διαιρούμενον διὰ τῶν 120, προκύπτει $\frac{1}{12}$, ὡς ἀνωτέρω. Ὅθεν δῆλον, ὅτι ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἐσομέμιου Κλάσματος εἶναι τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ἀριθμητῶν, καὶ ὁ Παρονομαςὴς αὐτοῦ τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Παρονομαςῶν τῶν δοθέντων Κλασμάτων, ἂν καὶ δοθῶσιν ὁσαδήποτε.

§. 243.

Πρόβλημα. Θετέον, ὅτι ἐρώτησέ τις, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι $\frac{2}{5}$ μὲ $\frac{9}{10}$, εἶτα μὲ $7\frac{1}{2}$, καὶ τελευταῖον μὲ $3\frac{1}{3}$, ἄρα πόσον ἔσεται τὸ Παραγόμενον αὐτῶν;

Λύσις καὶ Ἑρμηνεία.

Πρότερον μεταβάλλονται οἱ μικτοὶ Ἀριθμοὶ $7\frac{1}{2}$ καὶ $3\frac{1}{3}$ εἰς νόθα Κλάσματα, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον δίδει $\frac{15}{2}$, καὶ τὸ δεύτερον $\frac{10}{4}$, λοιπὸν πρόκειται ἤδη ἵνα πολλαπλασιασθῶσι $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{15}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$ μετ' ἀλλήλων, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ 2 καὶ 10 πρὸς τοὺς Παρονομαςὰς αὐτῶν 2 καὶ 10, καθὼς ὁ Παρονομαςὴς 5 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 15, καὶ ὁ Παρονομαςὴς 3 πρὸς τὸν Ἀριθμητὴν 9 ὄντας ὅμοιοι ἐκλείπουσιν ὁλοτελῶς, καὶ μένουσι διὰ τὸ Ζητούμενον μόνον 3 καὶ 3, τὰ ὁποῖα αὐτὰ πολλαπλασιαζόμενα, δίδουσιν 9, ὡς κατωτέρω.

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{9}.\,3}{\cancel{10}} \qquad \frac{\cancel{15}.\,3}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{10}}{\cancel{3}}$$

Ποιοῦσιν 9.

§. 244.

Σχόλιον. Εἰς ὅλας τὰς Πτώσεις τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἐξαρκοῦσε κυρίως μόνος ὁ Κανὼν, εἴτουν, νὰ πολλαπλασιάζηται Ἀριθμητὴς μὲ Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαςὴς μὲ Παρονομαςὴν, ἐν ᾧ καὶ αὐτὸς ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, (οὗ ὁ Παρονομαςὴς τὸ 1 ἐςὶ) θεωρεῖται ὡς Κλάσμα. Π. χ. 5, 7, 9 καὶ ἐφεξῆς, ὡς $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{9}{1}$ (διότι τὸ 1 μηδὲν διαιρεῖ), ὥςε εἰς κάθε πτῶσιν προέκυπτεν, ἵνα πολλαπλασιασθῇ μόνον Κλάσμα μὲ Κλάσμα, οἷον 6κις $\frac{2}{3}$, ὡς $\frac{6}{1} \times \frac{2}{3}$, 5κις $2\frac{3}{5}$, ὡς $\frac{5}{1} \times \frac{13}{5}$, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐδύνατο νὰ περιωρισθῇ ἁρμοδίως ὁ Πολλαπλασιασμὸς εἰς μερικοὺς §. §., ἐὰν δὲν ἀπέβλεπεν ὁ σκοπὸς διὰ τὴν πρακτικὴν χρῆσιν (ὡς §. 229), ἥτις εἰς τὸ μέλλον, μάλιςα δὲ εἰς τοὺς λογαριασμοὺς τῶν Τόκων κ. τ. λ. προξενεῖ μεγάλην ὠφέλειαν. Δι' αὐτὸ τοῦτο λοιπὸν ἐκτάνθη τὸ Κεφάλαιον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ· ἄλλως γὰρ δὲν ἠθέλαμεν πραγματευθῇ οὔτε τὸν Πολλαπλασιασμὸν, ἀλλ' οὔτε τὴν Διαίρεσιν τῶν Κλασμάτων ὡς ἰδιαιτέρας Μεθόδους, καθὼς ἐν τῷ §. 224. ἐλέχθη περὶ τούτων, ἐπειδὴ ὅλοι, ὁποιοιδήποτε, λογαριασμοὶ αὐτοῦ

τοῦ τρόπου, ἀνήκουσιν εἰς τὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν, δι' ἧς καὶ ἐπιλύονται, ὡς ἀποδειχθήσεται ἐν τῷ δέοντι τόπῳ.

ΚΕΦ. Γ'.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 245.

Ἡ Διαίρεσις τῶν Κλασμάτων διδάσκει τίνι τρόπῳ δυνάμεθα διαιρεῖν δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ τὸ Κλάσμα, καθὼς δι' ἀκεραίου Ἀριθμοῦ ἕτερον Ἀκέραιον σὺν Κλάσματι· ἔτι δὲ διὰ Κλάσματος ἀκέραιον Ἀριθμὸν σὺν Κλάσματι, καὶ τελευταῖον διὰ Κλάσματος ἕτερον Κλάσμα κ. τ. λ., ὅπου προκύπτουσιν ὁμοίως αἱ διάφοραι πτώσεις, καθὼς καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιασμόν.

§. 246.

Σχόλιον. Τὰ περισσότερα ἀριθμητικὰ βιβλία διδάσκουσι τὴν Διαίρεσιν τῶν Κλασμάτων ὡς ἄλλον Πολλαπλασιασμὸν, βάλλοντα Βάσιν εἰς τὸ, νὰ ἀνατρέπωμεν ἁπλῶς τὸν Διαιρέτην, ὥςε ὁ Ἀριθμητὴς νὰ ἐπέχῃ τὸν τόπον τοῦ Παρονομαςοῦ, ὁ δὲ Παρονομαςὴς τὸν τόπον τοῦ Ἀριθμητοῦ, εἶτα νὰ μετερχώμεθα ἀπαραλλάκτως τὴν πρᾶξιν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. Π. χ. πρόκειται ἵνα διαιρέσωμεν Κλάσμα τι, ἢ ἀκέραιον Ἀριθμὸν (ὅς τις θεωρεῖται ὡς Κλάσμα ὑποτιθέμενον τὸ 1, ὡς §. 244.) δι' $\frac{1}{4}$, ἢ διὰ $\frac{3}{5}$, ἢ διὰ 3, διὸ ἀντὶ $\frac{1}{4}$, θέττομεν $\frac{4}{1}$, ἀντὶ $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, ἀντὶ $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$, καὶ ἐφεξῆς. Διότι, διὰ νὰ διαιρέσωμεν διὰ 3 δηλοῖ, νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον μέρος ἐξ ἑνὸς Πράγματος· ὡσαύτως διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$ διαιρεῖν δηλοῖ τὸ,