ΚΕΦ. ΣΤ.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 217.

Ο μὲν Ἄθροισμὸς τῶν Κλασμάτων συνάπτει τοὺς Ἀριθμητὰς αὐτῶν εἰς Ἕν, ἡ δὲ Ἀφαίρεσις ἀφαιρεῖ αὐτοὺς ἀπ' ἀλλήλων. Διὰ τοῦτο λοιπὸν, καθὼς οἱ πρὸς Ἀφαίρεσιν διδόμενοι ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ ὁμώνυμοι (ὡς §. 51.), οὕτω δεῖ ἵνα ὦσι καὶ τὰ πρὸς Ἀφαίρεσιν διδόμενα Κλάσματα μέρη ὁμοειδῶν καὶ ὁμωνύμων Μονάδων, πρὸς τούτοις δὲ νὰ ἔχωσι καὶ ὁμοίους Παρονομαστὰς, ἵνα δύνανται ἀφαιρεθῆναι ἀπ' ἀλλήλων.

§. 218.

Ὅθεν ὅταν εἰσὶν ὅμοιοι οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομασταὶ, ἀφαιροῦμεν τοὺς Ἀριθμητὰς αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων, τοὐναντίον, πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν εἰς Κλάσματα ὁμοίων Παρονομαστῶν, καθ' ὃν τρόπον ἐλέχθη ἐν τῷ Ἀθροισμῷ, καὶ μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἀκολούθως.

Ἀπὸ $\frac{7}{12}$

ἀφαιρεθήτωσαν $\frac{5}{12}$

Ὑπόλοιπον $\frac{2}{12}$, ὃ διὰ τῶν 2 ἐλατ., ποιεῖ $\frac{1}{6}$.

Ἑρμηνεία. Ἐνταῦθα εἰσὶν ὅμοιοι οἱ Παρονομασταὶ, λοιπὸν ἀφαιροῦμεν εὐθὺς τὸν Ἀριθμητὴν 5 ἐκ τοῦ Ἀριθμητοῦ 7, καὶ μένουσι $\frac{2}{12}$ δωδέκατα, ἤτοι $\frac{1}{6}$. Ἡ περὶ τούτου ἀπόδειξις εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά· διότι καθὼς Π. χ. λέγομεν, 5 Γρόσια ἐξ 7 Γροσίων, μένουσι 2 Γρόσια, οὕτω λέγομεν καὶ ἐνταῦθα, 5 δωδέκατα ἐξ 7 δωδεκάτων, μένουσι 2 δωδέκατα, καθὼς ἐλέχθη εἰς τὸν Ἀθροισμὸν ἐν τῷ §. 203. Διότι· καθὼς ἐκεῖ δὲν ἀθροίζομεν τὴν ὀνομασίαν τοῦ Πράγματος, ἀλλὰ τὰ μέρη αὐτοῦ, οὕτω καὶ ἐνταῦθα δὲν ἀφαιροῦμεν τὴν ὀνομασίαν τοῦ Πράγματος, ἀλλὰ τὰ μέρη αὐτοῦ ἀπ' ἀλλήλων.

Ἰδοὺ καὶ Ὑποδείγματα μὴ ἔχοντα ὁμοίους Παρονομαστάς.

Πρόβλημα. Μᾶς ἐδόθησαν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ . . . . $\frac{6}{7}$

		28. ὁ γενικὸς Παρονομ.
ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ	$\frac{6}{7}$	4 — 24
	$\frac{3}{4}$	7 — 21
Ὑπόλοιπον	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$.

Ἑρμηνεία. Εἰς τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα δὲν εἶναι ὅμοιοι οἱ Παρονομασταὶ, ἄρα πρέπει, καθὼς καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμὸν, νὰ μεταβληθῶσι τὰ Κλάσματα, δι' ἑνὸς γενικοῦ Παρονομαστοῦ, εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, καὶ ἔπειτα νὰ γένῃ ἡ Ἀφαίρεσις. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ Παρονομασταὶ οὐδένα ἔχουσι κοινὸν Παράγοντα, ὅστις ἐδύνατο ν' ἀφεθῇ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι μετ' ἀλλήλων, τὸ δ' ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, ἔσται ὁ γενικὸς Παρονομαστὴς (ὡς §. 215.)· ὅθεν λέγομεν, καθὼς καὶ εἰς τὸν Ἀθροισμὸν, 7 εἰς τὰ 28, τετράκις, τετράκις δὲ 6, ποιοῦσιν 24· εἶτα 4 εἰς τὰ 28, ἑπτάκις, 3 δὲ 7, ποιοῦσιν 21, ἅτινα ἀφαιρούμενα ἐκ τῶν 24 (δηλ. $\frac{21}{28}$ ἐκ τῶν $\frac{24}{28}$), μένει Ὑπόλοιπον $\frac{3}{28}$.

Πρόβλημα. Ἕνας ἐδανείσθει παρ' ἑτέρου $\frac{3}{4}$ Γροσίου, καὶ ἐπλήρωσε $\frac{3}{10}$, ἄρα πόσα χρεωστεῖ εἰσέτι;

Λύσις.

Παράγοντες			40
2	ἀπὸ	$\frac{3}{8}$	15
4			
5	ἀφαιρεθήτωσαν	$\frac{3}{10}$	12
	Ὑπόλοιπον	$\frac{3}{40}$	

§. 219.

Ἐὰν σὺν τοῖς Κλάσμασι δοθῶσι καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοί, καθὼς ἐν τῷ §. 216. τοῦ Ἀθροισμοῦ ἐῤῥέθη, ἀφαιροῦμεν, ὡς συνήθως, πρότερον τὰ Κλάσματα, καὶ ἔπειτα τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς, ὡς.

		12. ὁ γεν. Παρον.
ἀπὸ	$4\frac{2}{3}$	8
ἀφαιρεθ.	$3\frac{1}{4}$	3
Ὑπόλ.	$1\frac{5}{12}$	

Εἴτουν· μεταβληθέντα τὰ Κλάσματα εἰς δωδέκατα, προέκυψαν διὰ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{12}$, καὶ διὰ τὸ $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$· ὅθεν 3 ἐκ τῶν 8, μένουσι $\frac{5}{12}$, καὶ 3 Ἀκέραια ἐκ τῶν 4 Ἀκεραίων, μένει 1, ὁμοῦ δὲ $1\frac{5}{12}$.

§. 220.

Ἐὰν τὸ κάτωθεν Κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἄνωθεν, ἐξ οὗ μέλλει ν' ἀφαιρεθῇ (ὅτι εἰς τοιαύτας πτώσεις πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ Ἀφαιρούμενος καὶ Ἀκέραια, τοῦτο ἐννοεῖται, ἐπειδὴ ἄλλως δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν), τότε δανειζόμεθα ἓν Ἀκέραιον, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τοιαῦτα μέρη, οἷα εἰσὶ τὰ μέλλοντα ἀφαιρεθῆναι, καὶ οὕτως ἀφαιροῦμεν ὡς §. 62, καὶ ἐφεξῆς. Οἷον.

		12. ὁ γενικὸς Παρονομαστής.
ἀπὸ	$5\frac{2}{3}$	8
ἀφαιρεθήτωσαν	$3\frac{3}{4}$	9
Ὑπόλοιπον	$1\frac{11}{12}$	

Ἑρμηνεία. Μεταβληθέντων τῶν Κλασμάτων εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν, προέκυψαν διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν 9 δωδέκατα ἀπὸ 8 δωδεκάτων, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, διὰ τοῦτο λοιπὸν δανειζόμεθα ἐκ τῶν 5 ἓν Ἀκέραιον, διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς δωδέκατα, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῶν τὰ 9 δωδέκατα, λέγοντες· 9 ἐκ τῶν 12, μένουσι 3, καὶ 8 (ἐξ ὧν μηδὲν ἀφῃρέθη), μένουσιν $\frac{11}{12}$. εἶτα 3 ἐκ 4 (διότι ἐκ τῶν 5 ἐδανείσθημεν ἤδη ἕν), μένει 1, ὁμοῦ δὲ $1\frac{11}{12}$.

Πρόβλημα. Εἷς χρεωστεῖ Γρόσια 6, ἐπλήρωσεν ὅμως Γρόσ. $5\frac{3}{4}$, πόσα χρεωστεῖ εἰσέτι;

ἐξ Ἀκεραίων 6
ἀφαιρεθήτωσαν $5\frac{3}{4}$
Ὑπόλοιπον $\frac{1}{4}$.

Ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει Κλάσμα εἰς τὸν ἐπάνω Ἀριθμόν, διὰ τοῦτο δανειζόμεθα ἐκ τῶν 6 ἓν Ἀκέραιον, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τέταρτα (ἐπειδὴ τέταρτα μέλλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν), τὸ ὁποῖον (ὡς §. 173.) περιέχει $\frac{4}{4}$, εἶτα λέγομεν· 3 ἐκ τῶν 4, μένει $\frac{1}{4}$, καὶ 5 ἐκ τῶν 5, μένει μηδέν.

Σημείωσις. Εἰς τοιαύτας πτώσεις, ὅπου ἐπάνω δὲν ὑπάρχει Κλάσμα, ἀφαιροῦμεν τὸν Ἀριθμητὴν ἐκ τοῦ Παρονομαστοῦ, ὁ δ' ἐπάνω Ἀριθμὸς θεωρεῖται δι' ἓν μικρότερος. Εἰς τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα λέγομεν ἀμέσως· 3 ἐκ τῶν 4, μένει $\frac{1}{4}$, καὶ 5 ἐκ τῶν 5, μηδέν, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐκατάληπτον· διότι, ὅταν πρόκηνται ν' ἀφαιρέσωμεν ἁπλῶς Ἀκέραια ἀπὸ Ἀκεραίων καὶ Κλασμάτων, τὸ ἐπάνω Κλάσμα μένει ἀμετάβλητον Ὑπόλοιπον.

§. 221.

Ἰδοὺ καί τινα Ὑποδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

ἀπὸ Παράδ.	$2\frac{1}{3}$	ἀπὸ Παράδ.	4 ,, $\frac{1}{3}$ ἄσπ.
ἀφαιρεθήτω	— 1	ἀφαιρεθ᾽.	— 2 ,, $1\frac{2}{3}$,,
Ὑπόλοιπον Παράδ.	$1\frac{1}{3}$.	Ὑπόλ. Παράδ.	1 ,, $1\frac{2}{3}$ ἄσπ.

ἀπὸ Παράδ.	8 ,, $1\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	ἀπὸ Ἄσπρα	2.
ἀφαιρεθήτ —	5 ,, $2\frac{2}{3}$ —	ἀφαιρεθήτω	. ,, $\frac{1}{3}$ ἄσπρου
Ὑπόλ. Παράδ.	2 ,, $1\frac{2}{3}$ ἄσπρ.	Ὑπόλ. Ἄσπρ.	1 ,, $\frac{2}{3}$ ἄσπρου

ἀπὸ Παράδ.	5 ,, —	ἀπὸ Παράδ.	7 ,, —
ἀφαιρεθ᾽. —	3 ,, $2\frac{2}{3}$ ἄσπρ.	ἀφαιρεθ᾽. —	4 ,, $\frac{1}{3}$ ἄσπρ.
Ὑπόλ. Παράδ.	1 ,, $\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	Ὑπόλ. Παράδ.	2 ,, $\frac{2}{3}$ ἄσπρ.

			15.
ἀπὸ Παράδες	6 ,,	$\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	5
ἀφαιρεθήτωσαν —	3 ,,	$1\frac{2}{5}$ —	6
Ὑπόλοιπον Παράδες	2 ,,	$1\frac{14}{15}$ ἄσπρ.	$\frac{14}{15}$

Εἰς τὰ ἀνωτέρω Ὑποδείγματα εἶναι περιττὴ κάθε ἄλλη ὁδηγία· διότι ἐκ τῶν Ἑρμηνειῶν τῶν προτέρων Παραδειγμάτων δύναται ἕκαστος νὰ πράξῃ ἐν εὐκολίᾳ τὴν Ἀφαίρεσιν.

Περὶ Δοκιμῆς τοῦ Ἀθροισμοῦ καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 222.

Καθὼς εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς ὁ Ἀθροισμὸς καὶ ἡ

Ἀφαίρεσις χρησιμεύουσιν ἀλλήλοις πρὸς Δοκιμὴν, οὕτω καὶ εἰς τὰ Κλάσματα· διότι ἡ βάσις τοῦτε Ἀθροισμοῦ καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως μένει πάντοτε ἡ αὐτὴ, κἂν ὦσιν οἱ ἀριθμοὶ Ἀκέραιοι ἢ Κλασματικοί. Ἰδοὺ Ὑποδείγματά τινα.

Ἀθροισμὸς μετὰ Δοκιμῆς.

Παράγοντες.		24. ὁ γενικὸς Παρον.			
2	$\frac{5}{6}$	4 — 20			
3	$\frac{2}{3}$	8 — 16		$\frac{2}{3}$	8—16
4	$\frac{3}{8}$	3 — 9		$\frac{3}{8}$	3— 9
.	$\frac{5}{12}$	2 — 10		$\frac{5}{12}$	2—10
Ὁλικὸν Κεφ. τῶν Κλασ.	$2\frac{7}{24}$	$\frac{55}{24}$		$1\frac{11}{24}$	$\frac{35}{24}$
Ὁμ., ὡς ἀπεν. πλὴν τῦ πρώτ.	$1\frac{11}{24}$				
Ὑπόλοιπον	$\frac{20}{24}$ | $\frac{5}{6}$ τὸ ἀφεθὲν Κλάσμα.				

Ἐξήγησις. Πρῶτον ἠθροίσαμεν ὅλα τὰ Κλάσματα, καὶ προέκυψαν $2\frac{7}{24}$, εἶτα ἀφήσαντες τὸ πρῶτον, ἠθροίσαμεν τὰ λοιπὰ, καὶ προέκυψαν $1\frac{11}{24}$, τὰ ὁποῖα ἀφαιρέσαμεν ἐκ τῶν $2\frac{7}{24}$· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμητὴς 11 δὲν ἐδύνατο ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ ἑτέρου Ἀριθμητοῦ 7, διὰ τοῦτο ἐδανείσθημεν ἐκ τῶν 2 ἓν Ἀκέραιον, τὸ ὁποῖον διαιρέσαντες εἰς εἰκοσὰ τέταρτα (διότι ὅλα τὰ Κλάσματα εἰσὶν ἤδη εἰκοσὰ τέταρτα), ἀφαιρέσαμεν ἐξ αὐτῶν τὰ 11, καὶ ἔμεινον 13, καὶ 7, ἅτινα ποιοῦσιν ὁμοῦ $\frac{20}{24}$, τούτων δὲ διὰ τῶν 4 ἐλαττωθέντων, προέκυψε τὸ πρῶτον ἀφεθὲν Κλάσμα $\frac{5}{6}$, τὸ ὁποῖον δεικνύει, ὅτι ὁ Ἀθροισμὸς ἔγινεν ὀρθῶς.

Ἀφαιρέσεως Ὑποδείγματα μετὰ Δοκιμῆς.

§. 223.

Πρόβλημα.

		30 ὁ γενικὸς Παρονομαστής
ἀπὸ	$5\frac{5}{6}$	25
ἀφαιρεθήτωσαν	$4\frac{3}{5}$	18
Ὑπόλοιπον	$1\frac{7}{30}$	

Δοκιμή.

	$4\frac{18}{30}$	ἀθροιζόμενα
	$1\frac{7}{30}$	
Ποιοῦσι	$5\frac{5}{6}$.	

Πρόβλημα.

		9. ὁ γενικὸς Παρονομα.
ἀπὸ Παράδ.	5 ,, $1\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	3
ἀφαιρεθήτωσαν —	3 ,, $2\frac{7}{9}$ —	7
Ὑπόλοιπον Παράδ.	1 ,, $1\frac{5}{9}$ ἄσπρ.	

Δοκιμή.

Παράδες	3 ,, $2\frac{7}{9}$ ἄσπρ.	ἀθροιζόμενα
—	1 ,, $1\frac{5}{9}$ —	
Ποιοῦσι Παράδες	5 ,, $1\frac{1}{3}$ ἄσπρ.	

ΚΕΦ. Ζ'.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων.

§. 224.

Κυρίως ὅ,τε Πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ Διαίρεσις τῶν Κλασμάτων δὲν ἔπρεπε νὰ καταταχθῶσιν ὡς ἰδιαίτεραι Μέθοδοι· διότι ἑκάςη πτῶσις αὐτῶν ἐπιλύεται κατὰ τὸν Κανόνα τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου, καθὼς ἀποδειχθήσεται ὕςερον. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἰδιαιτέρων Ἑρμηνειῶν καὶ Ἐξηγήσεων αὐτῶν τῶν δύο Μεθόδων, πηγάζουσι πολλαπλάσιαι πρακτικαὶ Συντομίαι, καὶ τελευταῖον, ἐπειδὴ, ὅπερ τὸ κύριον ἐςὶν, ἡ τῶν Κλασμάτων Ἀνάλυσις καὶ Ἐπαναγωγὴ, αἵτινες εἰς τὴν ἀλληλένδετον Μέθοδον, εἴτουν Ἄλυσον, εἰσὶν ἀναγκαῖαι, θεμελιοῦνται εἰς τὰς Ἑρμηνείας τοῦτε Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως, διὰ τοῦτο εἶναι χρήσιμον, ἵνα πραγματευθῶμεν ἰδιαιτέρως περὶ αὐτῶν τῶν δύο τῆς ἀριθμητικῆς Εἰδῶν.

§. 225.

Καθὼς Ἀριθμός τις ἢ Ἀκέραιος εἶναι ἢ Κλασμάτικὸς, δύναται νὰ ληφθῇ ἅπαξ, ἢ πολλάκις, οὕτω δύναται νὰ ληφθῇ καὶ μέρος τι, ὡς $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. κ. τ. λ., ὅπερ δηλοῖ, κλασματικῶς τὸν Ἀριθμὸν λαμβάνειν, εἴτουν πολλαπλασιάζειν μὲ τὸ Κλάσμα. Π. χ. $\frac{2}{3}$ ἐκ τῶν 45 δηλοῖ, ὅτι ὁ Ἀριθμὸς 45, νὰ μὴ ληφθῇ ὁλόκληρος, ἀλλὰ μόνον $\frac{2}{3}$ μέρη ἐξ αὐτοῦ. Ταὐτὸν δηλοῖ καὶ $\frac{3}{5}$, ἐκ τῶν $\frac{5}{6}$ νὰ μὴ ληφθῶσιν ὁλόκληρα, ἀλλὰ μόνον $\frac{3}{5}$ μέρη ἐξ αὐτῶν, τοῦτ' ἔςι, νὰ φανερώσωμεν, πόσα φέρουσι τὰ $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν $\frac{5}{6}$. Ὅθεν ὁ τρόπος, δι' οὗ ἐκτελοῦνται οἱ τοιοῦτοι πολλαπλασιασμοὶ, εἶναι τὸ ἀντικείμενον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων.

§. 226.

Σχόλιον. Ἐκ τῆς ὄπισθεν ἐκθέσεως τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων ἕκαστος εὐκόλως ἐννοεῖ, ὅτι πολλαπλασιάζοντες μὲ Κλάσμα, πρέπει πάντοτε νὰ προκύψῃ μικρότερος Ἀριθμὸς τοῦ Πολλαπλασιαστέου, ἐπειδὴ δὲν λαμβάνεται ὁλόκληρος, ἀλλὰ μέρος τι, ὅ ἐστὶ, κλασματικῶς. Π. χ. $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30 δηλοῖ, πόσα φέρουσι $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30, ὡς εἰς τὸν πρωτέρω ἐῤῥέθη §.

Πτῶσις Α΄. Πῶς πολλαπλασιάζεται τὸ Κλάσμα μὲ ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ἢ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς (ὅπερ ταὐτὸν ἐστὶ) με Κλάσμα.

§. 227.

Προκειμένου Κλάσματος καὶ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ ἵνα πολλαπλασιασθῶσι μετ' ἀλλήλων, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος, τὸ δὲ Παραγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, ὅστις μένει ἀμετάτρεπτος. Π. χ. $\frac{2}{3}$ ἐκ τῶν 8, λέγομεν· 2×8 ποιοῦσιν 16, εἶτα 3 εἰς τὰ 16, περιέχονται $5\frac{1}{3}$. Ὁμοίως $\frac{3}{4}$ ἐκ τῶν 13, ἢ (ὅπερ ταὐτὸν ἐστὶν ὡς §. 76.) 13 κις $\frac{3}{4}$, δίδουσι τρὶς 13, εἴτουν 39 τέταρτα, ἐν ψηφίοις $\frac{39}{4}$, ποιοῦσι $9\frac{3}{4}$.

Δεῖξις. Ἡ αἰτία ἐσαφηνίσθη ἐν τῷ §. 184, ὅπου καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ Κλάσματος μεγαλύνεται διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ ἰδίουτου Ἀριθμητοῦ. Ὅθεν, ὅταν Κλάσματι, φέρ' εἰπεῖν, $\frac{3}{4}$ μέλλῃ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 13, ὅ ἐστὶ, νὰ μεγαλύνῃ 13 κις, πρέπει ἀναγκαίως νὰ περιέχῃ 13 κις τρία τέταρτα, εἴτουν $\frac{39}{4}$, δηλονότι, νὰ πολλαπλασιασθῇ, κατὰ τὸν Κανόνα, ὁ Ἀριθμητὴς, ὁ δὲ Παρονομαστὴς νὰ μείνῃ ἀμετάβλητος. Ταύτην τὴν ἔννοιαν πληροφορούμεθα σαφέστερον ἀφ' οὗ στοχασθῶμεν, ὅτι ἑκάστη αὔξησις, ἢ ἐλάττωσις ἑνὸς Πράγματος, μεταβάλλει μόνον τὰ μέρη αὐτοῦ, οὐχὶ ὅμως καὶ τὴν ὀνομασίαντου. Διότι· καθὼς, φέρ' εἰπεῖν, 5 ὀκάδες πολλαπλασιαζόμεναι μὲ 12, δίδουσι 12 κις 5 ὀκάδας, ἤτοι 60 ὀκάδας, ὅ ἐςὶν, αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων, ἡ δὲ ὀνομασία ὀκάδες μένει πάντοτε ἡ αὐτή· οὕτω καὶ τὰ 13 κις $\frac{3}{4}$ δίδουσι μεγαλήτερον ἀριθμὸν τετάρτων, εἴτουν 3 × 13 ποιοῦσι $\frac{39}{4}$· τοῦτ' ἔςι, πολλαπλασιάζεται, κατὰ τὸν Κανόνα, ἡ τῶν μερῶν ποσότης (ὁ Ἀριθμητὴς), ἡ δὲ ὀνομασία (ὁ Παρονομαςὴς), μένει ἀμετάβλητος.

§. 228.

Σχόλιον. Ὁ Κανὼν τοῦ πολλαπλασιάζειν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν καὶ διαιρεῖν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ἐδιορίσθη μόνον δι' αὐτοὺς τοὺς Ἀριθμοὺς, οὐχὶ ὅμως καὶ διὰ τὴν Τάξιν, διὰ τοῦτο καὶ δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν εἰς τὴν πρᾶξιν τὰς γνωςὰς Συντομίας ἀνεμποδίςως, δηλονότι· πρότερον νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Παραγόμενον μὲ τὸν Ἀριθμητήν. Π. χ. $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30, εἶναι ταὐτὸν, κἂν εἴπωμεν, τρὶς 30 ποιοῦσιν 90, καὶ 5 ἐκ τῶν 90 δίδουσι 18, ἢ ἂν πρότερον διαιρέσωμεν διὰ τῶν 5 τὰ 30, καὶ προκύψωσιν 6, ἅτινα πολλαπλασιαζόμενα, μὲ 3, δίδουσιν ὡσαύτως 18. Διότι 30 κις $\frac{3}{5}$ δηλοῖ, νὰ πληροφορηθῶμεν, πόσα φέρουσι $\frac{3}{5}$ ἐκ τῶν 30 (ὡς §. 226.), ὅ ἐςὶ, νὰ λάβωμεν τρὶς τὸ πέμπτον ἐκ τῶν 30.

Ὅθεν ὅπου ὁ Παρονομαςὴς τοῦ Κλάσματος ἐμπεριέχεται ἐπίσης εἰς τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιασθήσεται τὸ Κλάσμα, εἶναι πολὺ εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον, πρότερον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Παραγόμενον μὲ τὸν Ἀριθμητὴν, ἐπειδὴ δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου προκύπτουσιν ἔντε τῷ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν μικρότεροι Ἀριθμοί· εἰς ἐκείνας τὰς πτώσεις ὅμως, ὅπου ὁ τοῦ Κλάσματος Παρονομαςὴς δὲν ἐμπεριέχεται ἐξ ἴσου εἰς τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, εἶναι ὠφελιμώτερος ὁ κοινὸς τρόπος, τοῦτ᾽ ἔςι, πρότερον νὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρῶμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ἐπειδὴ ἄλλως προκύπτουσι Κλάσματα εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν, τὰ ὁποῖα προξενοῦσι δυσκολίας.

Πρακτικαὶ Συντομίαι.

§. 229.

Ἐπειδὴ, ὡς πρόδηλον, τὸ 1 μηδὲν πολλαπλασιάζει (διότι ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὁποιουδήποτε Εἴδους, ἅπαξ λαμβανόμενος, εἴτουν μὲ τὸ 1 πολλαπλασιαζόμενος, προκύπτει εἰς τὸ Παραγόμενον αὖθις ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς, τοῦτ᾽ ἔςι, μένει ἀμετάβλητος)· διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Κλάσματος εἶναι 1, δὲν πολλαπλασιάζομεν ποσῶς, ἀλλὰ διαιροῦμεν ἁπλῶς διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ. Π. χ. πρόκειται ἵνα πολλαπλασιάσωμεν $\frac{1}{3}$ μὲ 19· ἐνταῦθα λέγομεν ἀμέσως, 3 ἐκ τῶν 19 (ἐπειδὴ ἅπαξ 19 ποιοῦσιν αὖθις 19), δίδουσιν $6\frac{1}{3}$, καθὼς καὶ $\frac{1}{6}$ ἐκ τῶν 23 δίδουσιν $\frac{23}{6}$, διὸ λέγομεν εὐθὺς, 6 εἰς 23 ἐμπεριέχονται $3\frac{5}{6}$, καὶ ἐφεξῆς.

Πλὴν διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάζωμεν εἰς ἑκάςην πτῶσιν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν (ἔςω καὶ μεγαλήτερος τοῦ 1), διαιροῦμεν τὸ Κλάσμα, μὲ τὸ ὁποῖον μέλλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ὅσον τὸ δυνατὸν εἰς ἄλλα τοιαῦτα Κλάσματα, ὧν οἱ Ἀριθμηταὶ νὰ ἔχωσι πάντοτε 1, διὰ τοῦ ὁποίου τρόπου προκύπτουσι μικρότεροι διαιρέσεως Παρονομαςαὶ, δἰ ὧν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις εὐκόλως. Καθὼς, φέρ᾽ εἰπεῖν, $\frac{7}{8}$ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς $\frac{4}{8} . \frac{2}{8} . \frac{1}{8}$, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον εἶναι $\frac{1}{2}$, τὸ δεύτερον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἡμίσεως, καὶ τὸ τρίτον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτέρου ἡμίσεως. Ὅθεν, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ 7, καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 8, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαςέου τὰ ἥμισυ, εἶτα ἐξ αὐτῶν τὰ ἥμισυ, καὶ τελευταῖον αὖθις τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν δευτέρων ἡμίσεων, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν ὁμοῦ, ὥςε διʼ αὐτοῦ τοῦ τρόπου, ἐξαιρέτως εἰς τοὺς ὀνοματικοὺς μικτοὺς Ἀριθμοὺς, συντέμνεται καὶ εὐκολύνεται πολὺ ἡ πρᾶξις. Π. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ λογαριάσωμεν πόσα πληρωθήσονται διὰ $\frac{7}{8}$ ὀκᾶδος Πράγματός τινος, ἐὰν μία ὀκᾶ τιμᾶται διὰ Γρόσ. 35, 36 παράδ. αὕτη ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ἐν εὐκολίᾳ, ὡς ἀκολούθως.

Γρ'. 35,,36 πρ'. πολλαπλ. μὲ $\frac{7}{8}$
4
2
1

4 ποιοῦσιν $\frac{1}{2}$ γρ., ὅθεν $\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γρ. 35,,36 πρ'. Γρ. 17,,38 πρ'.
2 ,, $\frac{1}{2}$ τῶν 4 ,, $\frac{1}{4}$,, 17,,38 — — 8,,39 —
1 ,, $\frac{1}{2}$,, 2 ,, $\frac{1}{8}$,, 8,,39 — — 4,,19$\frac{1}{2}$ ἤτοι 1$\frac{1}{2}$ ἄσπρ.
Ποιοῦσιν ὁμοῦ Γρ'. 31,,16$\frac{1}{2}$ πρ. ἤτοι 1$\frac{1}{2}$ ἄσπ.

Ἑρμηνεία. Ἀνωτέρω πρόκεινται νὰ ληφθῶσιν $\frac{7}{8}$ ἐκ τῆς Ποσότητος τῆς Ὀκᾶδος, τοῦτʼ ἔςιν, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{8}$, διὰ τοῦτο λοιπὸν διὰ τὴν ἥμισυ ὀκᾶν, ἐλάβομεν τὰ $\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γροσίων. 35 ,, 36 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 17, 38 παράδ., εἶτα διὰ τὸ $\frac{1}{4}$, τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσίων. 17 ,, 38 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 8 ,, 39 παράδ., τελευταῖον διὰ τὸ $\frac{1}{8}$, τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσίων 8 ,, 39 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ 4,, 19$\frac{1}{2}$ παράδ., ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 31 ,, 16$\frac{1}{2}$ παράδ. ὡς ἀνωτέρω.

Σημείωσις Α'. Ἡ πρᾶξις τοῦ ἀνωτέρω Προβλήματος ἐδύνατο νὰ γίνῃ καὶ οὕτω, δηλαδὴ, ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσίων 17,,38 παράδ., ἐδυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τῶν Γροσίων. 35,, 36 παράδ., τὸ ὁποῖον φέρει ὡσαύτως Γρόσ. 8,,39 παράδ., καθὼς καὶ τὸ ὄγδοον μέρος ἐκ τῶν Γροσίων 35,,36 παράδ. φέρει ὁμοίως Γρόσ. 4,,19$\frac{1}{2}$ παράδ., μʼ ὅλον τοῦτο ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι εὐκολώτερος.

Σημείωσις. Β'. Προσέτι δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἐργασία τοῦ ῥηθέντος Ὑποδείγματος καὶ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον, ὅπου ἡ Ποσότης τῶν $\frac{7}{8}$ ἐκ τῶν Γροσ'. 35 ,, 36 παράδ. προκύπτει εὐθὺς, ἐὰν ἐξ αὐτῶν ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{1}{8}$ ὡς ἔμπροσθεν. Διότι ἂν μία Ὀκᾶ τιμᾶται διὰ Γρόσ. 35,, 36 παράδ., τὰ $\frac{7}{8}$ τιμῶνται δὶ $\frac{1}{8}$ ὀλιγώτερον τῆς αὐτῆς τιμῆς. Εἰς τοιαύτας, καὶ ἑτέρας παρομοίας Συντομίας, πρέπει νὰ ἐκλέγῃ ὁ Λογαριάζων, ὡς προελέχθη, ἐκείνην, ἥτις εὐκολύνει καὶ συντέμνει τὴν πρᾶξιν ἑκάστου προκειμένου Προβλήματος, ὡς.

Γρόσ. 35,, 36 παράδ.

ἀφαιρεθήτ. ἐξ αὐτῶν $\frac{1}{8}$ — 4,, 19$\frac{1}{2}$ —

Ποιοῦσι Γρόσ. 31,, 16$\frac{1}{2}$ παράδ. ἤτοι 1$\frac{1}{2}$ἄσπ. ὡς ὄπισθ.

§. 230.

Ἡ διαίρεσις τοῦ Ἀριθμητοῦ γίνεται τοῦ λοιποῦ ἀπαραλλάκτως, καθὼς ἡ διαίρεσις τῶν Παράδων, Λοτίων κ. τ. λ. δηλονότι· λαμβάνομεν ἐξ αὐτοῦ τόσα μέρη, ὅσα ἐπιζητοῦνται δὶ ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κ. τ. λ., εἶτα διαιροῦμεν τὰ ἐναπολειφθέντα μέρη τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ δύναται νὰ ληφθῇ τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου. Τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα σαφηνίζουσι τὰ λεχθέντα.

Πρόβλημα. Πόσα φέρουσιν $\frac{9}{16}$. ἐκ τῶν Γροσίων 78,, 36 παράδ;

Λύσις.

Γρόσ. 78,, 36 παράδ. × $\frac{9}{16}$ διαιροῦνται εἰς 8 καὶ 1.

Γρόσ. 39,, 18 παράδ.

— 4,, 37$\frac{1}{2}$ —

Ποιοῦσι Γρόσ. 44,, 15$\frac{1}{2}$ παράδ. ἤτοι 1$\frac{1}{2}$ ἄσπρου.

Ἑρμηνεία. Ἀντὶ, κατὰ τὸν συνήθη Κανόνα, νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 9, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 16, διῃρέσαμεν τὰ 9 δέκατα ἕκτα εἰς $\frac{8}{16}$ καὶ $\frac{1}{16}$, ἐξ ὧν τὰ $\frac{8}{16}$ ποιοῦσιν $\frac{1}{2}$, διὰ τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσ. 78,, 36 παράδων, καὶ ἔφερον Γρόσ. 39,, 18 παράδ., τὸ δὲ $\frac{1}{16}$, εἶναι τὸ ὄγδοον μέρος ἐκ τῶν $\frac{9}{16}$, διὸ καὶ ἐλάβομεν τὸ ὄγδοον μέρος ἀπὸ ὅσα προέκυψαν ἐκ τῶν $\frac{8}{16}$, εἴτουν ἐκ τῶν Γροσ. 39 „ 18 παράδ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 4 „ 37$\frac{1}{2}$ παράδ., ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 44 „ 15$\frac{1}{2}$ παράδ. ἥτις ἐςὶν ἡ Ποσότης τῶν $\frac{9}{16}$ ἐκ τῶν Γροσ. 78 „ 36 παράδ.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζόμενα Γρόσ. 19 „ 68 ἄσπρα μὲ $\frac{23}{32}$, πόσα ἔσεται τὸ Πηλίκον;

Λύσις.

Γρόσ.	19 „ 68	ἄσπρα	×	$\frac{23}{32}$
Γρόσ.	9 „ 94	ἄσπρα.		16
—	2 „ 83 —	$\frac{1}{2}$ ἄσπ.		4
—	1 „ 41 —	$\frac{3}{4}$		2
—	— „ 80	$\frac{7}{8}$		1
Ποιοῦσι Γρόσ.	14 „ 60	ἄσπρα $\frac{1}{8}$ ἄσπρου		

Ἑρμηνεία. Τὰ $\frac{23}{32}$ διηρέθησαν εἰς 16. 4. 2 καὶ 1, ἐξ ὧν τὰ $\frac{16}{32}$ εἰσὶν $\frac{1}{2}$, διὸ καὶ ἐλήφθησαν τὰ ἥμισυ ἐκ τῶν Γροσ. 19 „ 68 ἄσπρ., καὶ ἔφερον Γρόσ. 9 „ 94 ἄσπρα. τὰ $\frac{4}{32}$ εἰσὶν $\frac{1}{4}$ τῶν $\frac{16}{32}$, διὰ τοῦτο ἐλήφθη τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τῶν Γροσ. 9 „ 94 ἄσπρ., τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ ποσότης τοῦ $\frac{1}{2}$, καὶ ἔφερον Γρόσ. 2 „ 83$\frac{1}{2}$ ἄσπρ. (τὰ $\frac{4}{32}$ ἐδύναντο νὰ ληφθῶσιν ὡς $\frac{1}{8}$ τῶν 32 ἐκ τῶν Γροσ. 19 „ 68 ἄσπρ. ὅπου προέκυπτον ὡσαύτως Γρόσ. 2 „ 83$\frac{1}{2}$ ἄσπρα)· τὰ $\frac{2}{32}$ εἰσὶν $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{4}{32}$, διὸ καὶ ἐλήφθησαν τὰ ἥμισι ἐκ τῶν Γροσ. 2 „ 83$\frac{1}{2}$ ἄσπρ. καὶ ἔφερον Γρόσι 1 „ 41$\frac{3}{4}$ ἄσπρα, τελευταῖον τὸ $\frac{1}{32}$ εἶναι $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{2}{32}$, ὅθεν καὶ ἐλήφθησαν τὰ ἥμισυ ἐκ τοῦ Γροσίου 1 „ 41$\frac{3}{4}$ ἄσπρα, καὶ ἔφερον 80$\frac{7}{8}$ ἄσπρ., σύμπαντα δὲ τὰ $\frac{23}{32}$, ἔφερον Γρόσ. 14 „ 60$\frac{1}{8}$ ἄσπρ, ὡς ἀνωτέρω.

Σημείωσις. Ὅτι ὁ ἄνωθεν τρόπος εἶναι προτιμότερος τοῦ συνήθους, τὸ δεικνύει ἡ πρᾶξις τοῦ ἀνωτέρω Ὑποδείγματος, ἐπειδὴ ἐὰν ἡ ἐργασία ἐγίνετο κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Γρόσ. 19,,68 ἄσπρα μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 23, καὶ νὰ διαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 32, τὸ ὁποῖον εἶναι διεξοδικὸν καὶ κοπιαστικόν.

§. 231.

Προκειμένου Κλάσματος παρὰ τῷ Πολλαπλασιαστέῳ, ἐπιτελεῖται ἡ ἐργασία ὡς ἡ τοῦ τελευταίου Ὑποδείγματος. Π. χ. πρόκειται ἵνα πολλαπλασιασθῶσι Γρόσ. 21,,32 παράδ. $2\frac{2}{3}$ ἄσπρα μὲ 15.

Λύσις.

Γρ'.21,,32πρ.$2\frac{2}{3}$ ἄσπ., πολλαπλασιασθ'. μὲ 15

20			21
10		Γρόσια	315
2	$\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν 15, φέρουσι	—	7,,20 παράδες
	$\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γ.	7,,20πρ. —	3,,30 —
	$\frac{1}{5}$ ἐκ τῶν —	3,,30 — —	-,,30 —
2 ἄσπρα.	$\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν — —	,,30 — —	-,,10 —
$\frac{2}{3}$ —	$\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν — —	,,10 — —	-,, $3\frac{1}{3}$ —
			Ποιοῦσι Γρ'. 327,,$13\frac{1}{3}$ πρ'.

Ἑρμηνεία. Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσια μὲ τὰ 15, ὡς συνήθως, ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς 32 παράδ. εἰς μέρη Γροσίου, εἴτουν εἰς 20. 10 καὶ 2, καὶ λαμβάνομεν αὐτοὺς κλασματικῶς, ὡς ἀνωτέρω· τὰ 2 ἄσπρα εἰσὶ τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῶν 2 παράδ., διὰ τοῦτο ἐλήφθη $\frac{1}{3}$ ἐκ τῆς Ποσότητος αὐτῶν, τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ ἄσπρου εἰσὶ τὸ τρίτον μέρος ἐκ τῶν 2 ἄσπρων· διότι 2 ἄσπρα, ποιοῦσιν 6 τρίτα, ἄρα $\frac{2}{3}$ ἄσπρου, ποιοῦσιν $\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν 6, ὅθεν καὶ ἐλήφθη $\frac{1}{3}$ ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν 2 ἄσπρων.

Ἀντὶ τῶν 32 παράδ. $2\frac{1}{3}$ ἄσπρων, ἐδύναντο νὰ ληφθῶσι παράδ. 33, καὶ ἔπειτα ν' ἀφαιρεθῶσιν ἐκ τῆς ὁλοκλήρου ποσότητος $\frac{1}{3}{}^{5}$ ἄσπρου, εἴτουν 5 παράδ. οἵτινες ἐλήφθησαν περισσότερον.

§. 232.

Ἡ πρᾶξις τῶν τοιούτων Πολλαπλασιασμῶν ἐπιτελεῖται πλέον εὐκόλως καὶ ταχέως, ἐὰν ὁ Πολλαπλασιαςὴς εἶναι μοναδικὸς Ἀριθμὸς, ἢ δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς, ἐπειδὴ μὲ μοναδικοὺς Ἀριθμοὺς πολλαπλασιάζεται εὐκολώτερον ὁ τοῦ κλάσματος Ἀριθμητὴς, χωρὶς ν' ἀναγκασθῶμεν νὰ διαιρέσωμεν αὐτόν. Π. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ πολλαπλασιάσωμεν Γρόσ. 25 ,, 35 παράδ. $1\frac{3}{4}$ ἄσπρα μὲ 7, αὕτη ἡ λύσις γίνεται, ὡς κατωτέρω.

Γρόσια 25 ,, 35 παράδες $1\frac{3}{4}$ ἄσπρα $\times$ 7
7

Ποιοῦσι Γρόσια 181 ,, 9 παράδες $\frac{1}{4}$ ἄσπρου.

λέγοντες (ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ Ἀριθμητοῦ τοῦ Κλάσματος $\frac{3}{4}$) $3 \times 7 — 21$ (τέταρτα), ἅτινα, διὰ τοῦ νοὸς, διὰ τῶν 4 διαιρεθέντα, δίδουσι $5\frac{1}{4}$ ἄσπρα, θέττομεν λοιπὸν τὸ $\frac{1}{4}$, καὶ βαςῶμεν 5 ἄσπρα, εἶτα $1 \times 7 — 7$, καὶ 5 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι 12 ἄσπρα, τὰ ὁποῖα διὰ τῶν 3 διαιρεθέντα, φέρουσι 4 παράδες, ἔπειτα $5 \times 7 — 35$, καὶ 4 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσι 39 παράδ., διὸ θέττομεν 9, καὶ βαςῶμεν 3, μετέπειτα $3 \times 7 — 21$, καὶ 3 τὰ βαςαχθέντα, ποιοῦσιν 24 δεκάδας, ἤτοι Γρόσ. 6, τὰ ὁποῖα καὶ βαςῶμεν, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὰ Γρόσια 25 μὲ τὰ 7, καὶ προσθέττομεν καὶ τὰ Γρόσ. 6, ἃ ἐβαςάξαμεν, ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλημα. Πολλαπλασιαζόμενα Γρόσ. 45 ,, 9 παράδ. $2\frac{5}{8}$ ἄσπρα μὲ 32, πόσον ἔσεται τὸ Πηλίκον;

Λύσις.

Γρόσια 45,, 9 παράδες 2$\frac{5}{8}$ ἄσπρα × $\frac{32}{8}$

Γρόσια 361,, 39 παράδες 4

4

Πηλίκον Γρόσια 1447,, 36 παράδες.

Ἀφ' οὗ διηρέσαμεν τὰ 32 εἰς τοὺς Παράγοντας αὐτῶν 8 καὶ 4, εἴπομεν· 8 κις $\frac{5}{8}$, ποιοῦσι 5 ἄσπρα (δηλ. 5 × 8 — 40, ἅτινα διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 8 διαιρεθέντα, δίδουσι 5 ἄσπρα), εἶτα 2 × 8 — 16 ἄσπρα, καὶ 5 τὰ ἐκ τοῦ Κλάσματος προκύψαντα, ποιοῦσιν 21 ἄσπρα, εἴτουν 7 παράδες, ἔπειτα 8 × 9 — 72 παράδ., καὶ οἱ ῥηθέντες 7, ποιοῦσιν 79 παράδ., οἵτινες διὰ τῶν 40 διαιρεθέντες, ἔδωκαν Γρόσι 1 καὶ 39 παράδ., διὰ τοῦτο καὶ ἐθέσαμεν 39 παράδ., μετέπειτα 5 × 8 — 40 Γρόσ., καὶ τὸ ἀνωτέρω 1, ποιοῦσι 41, διὸ ἐθέσαμεν 1, καὶ ἐβαςάξαμεν 4, μετὰ ταῦτα 4 × 8 — 32, καὶ 4 τὰ βαςαχθέντα ποιοῦσι 36, ὁμοῦ δὲ Γρόσ. 361,, 39 παράδ., τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα καὶ μὲ τὸν ἕτερον Παράγοντα 4, προέκυψε τὸ Πηλίκον, ὡς ἀνωτέρω.

§. 233.

Πρὸς τούτοις προκύπτουσι Κλάσματα, ὡς 7μα, 11τα, 13τα, 17μα, καὶ ἕτερα ὅμοια, τὰ ὁποῖα δὲν διαιροῦνται, ἔξω καὶ νὰ ληφθῶσιν, ὁσαδήποτε μέρη ἐκ τῶν Ἀριθμητῶν αὐτῶν, δὲν προκύπτει μ' ὅλον τοῦτο $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κ.τ.λ. ἐπειδὴ οἱ Παρονομαςαὶ τῶν τοιούτων Κλασμάτων δὲν εἶναι ἀρτίοι. Ὅθεν ὁ Πολλαπλασιασμὸς τῶν τοιούτων Κλαμάτων δὲν ἐπιτελεῖται κατ' ἄλλον συντομώτερον τρόπον, εἰμὴ κατὰ τὸν κοινὸν (ὡς §. 227.), τοῦτ' ἔςι, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ. Π. χ. πρόκειται Γρόσ. 27,,17 παράδ. 2 ἄσπρα ἵνα πολλαπλασιασθῶσι μὲ $\frac{13}{17}$. ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ Παρονομαςὴς 17 δὲν εἶναι διπλοῦς, διὰ τοῦτο ὁ Ἀριθμητὴς 13 δὲν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μικρότερα Κλασματικὰ μέρη, ἀλλὰ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Γρόσ. 27,,17 παράδ. 2 ἄσπρα μὲ 13, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρεθῇ τὸ Παραγόμενον διὰ τῶν 17, ὁ ὁποῖος Πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται ἢ διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν παράδων καὶ ἄσπρων εἰς Κλασματικὰ μέρη, ἢ κατὰ τὸν §. 143.

Διὰ τῆς Διαιρέσεως.

Γρ. 27,,17 π. 2 ἄσπρα . × 13

πρ. 10, ἢ $\frac{1}{4}$ γροσίου   27

— 5, - $\frac{1}{2}$ τῶν 10 π.   351,, —

— 2, - $\frac{1}{5}$ — —   3,, 10 π. ($\frac{1}{4}$ ἐκ τῶν 13)

1,, 25 - ($\frac{1}{2}$ — γρ. 3,,10 π)

-,, 26 - ($\frac{1}{5}$ — — —.)

-,, 8 π. 2 ἄσ. ($\frac{1}{3}$ ἐκ τῶν 26 π. διὰ τὰ 2 ἄσ.)

διὰ τοῦ παρονομαςοῦ 17 Γρ. 356,,29 π. 2 ἄσ.

Ποιοῦσι Γρ. 20,,39 π. 1$\frac{3}{17}$ ἄσ.

Κατὰ τὸν §. 143

Γρόσια 27,,17 πρ. 2 ἄσπρα. × 13

Γρόσια 82,,13 πρ.   3

Γρόσια 329,,12 πρ.   4

27,,17 — 2 ἄσπρα   1

διὰ τοῦ παρονομ. 17 Γρόσια 356,,29 πρ. 2 ἄσπρα

Φέρουσι Γρόσια 20,,39 πρ. 1$\frac{3}{17}$ ἄσπρα.

Πτῶσις Β'. Ὅταν ὁ Πολλαπλασιαςὴς σύγκηται ἐξ ἀκεραίου Ἀριθμοῦ καὶ Κλάσματος.

§. 234.

Κατὰ δύο τρόπους δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ ἀκέραιον Ἀριθμὸν καὶ Κλάσμα, φέρ' εἰπεῖν, μὲ $5\frac{7}{8}$, μὲ $7\frac{3}{4}$ κ. τ. λτ. Ἐνταῦθα ἢ πολλαπλασιάζομεν πρότερον μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ὡς συνήθως, καὶ ἔπειτα μὲ τὸ Κλάσμα, ὡς ἐῤῥέθη, ἢ μεταβάλλομεν τὸν μικτὸν Ἀριθμὸν εἰς νόθον Κλάσμα (δηλ. πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν μὲ τὸν Παρονομαστὴν, ἀθροίζοντες ὁμοῦ καὶ τὸν Ἀριθμητὴν), μὲ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ὡς μὲ κύριον Κλάσμα, καθὼς τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

Α΄. Τρόπος.

Πολλαπλασιασθ΄. Γρ. 35,, 36 π. μὲ $9\frac{7}{8}$

9 — 4 ἢ $\frac{1}{2}$

Γρ΄. 329,, 4 π. — 2 - $\frac{1}{2}$ τῶν 4

$\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν Γρ΄. 35,, 36 π. — 17,, 38 - — 1 - $\frac{1}{2}$ - 2

$\frac{1}{2}$ — — — 17,, 38 — — 8,, 39 -

$\frac{1}{2}$ — — — 8,, 39 — — 4,, $19\frac{1}{2}$ -

Ποιοῦσι. Γρ΄. 354,, $20\frac{1}{2}$ παράδες

Β΄. Τρόπος.

Πολλαπλασιασθ΄. Γρ΄. 35,, καὶ πρ΄. 36 μὲ $9\frac{7}{8}$

79,, — 20 — 79

Γρ΄. 2765,, — 10 — 8

20 π. $\frac{1}{2}$ ἐκ τῶν 79 . — 39,, 20 π. — 5

10 - $\frac{1}{2}$ — — Γρ. 39,, 20 π. — 19,, 30 - — 1

5 - $\frac{1}{2}$ — — — 19,, 30 - — 9,, 35 -

1 $\frac{1}{2}$ — — — 9,, 35 - — 1,, 39 -

διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8 Γρ΄. 2836,, 4 παράδες

Ποιοῦσι Γρ΄. 354,, $20\frac{1}{2}$ παράδες