α'. 83 εἰς 173 | 2
146
β'. 27 εἰς 83 | 2
54
γ'. 19 εἰς 27 | 1
19
δ'. 8 εἰς 19 | 2
16
ε'. 3 εἰς 8 | 2
6
ϛ'. 2 εἰς 3 | 1
2
ζ'. 1 εἰς 2 | 2
2
0

ΚΕΦ. Ε'.

Περὶ Ἀθροισμοῦ τῶν Κλασμάτων.

§. 203.

Ὁ Ἀθροισμὸς τῶν Κλασμάτων διδάσκει, τίνι τρόπῳ δυνάμεθα ἀθροίζειν περισσότερα Κλάσματα ὁμοῦ, τὸ δὲ Κεφάλαιον αὐτῶν (ἔσω Ἀκέραιον ἢ Κλασματικὸν), νὰ προφέρωμεν δἰ ἑνὸς καὶ μόνου Ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ, ὡς γνωςὸν, μόνον ὁμοειδεῖς Ἀριθμοὶ, ὅ ἐςὶ, τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ ὀνομασίας, δύνανται νὰ συναφθῶσιν εἰς Ἓν (ὡς §. 34.), διὰ τοῦτο ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ, ὅτι καὶ τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν διδόμενα Κλάσματα, πρέπει νὰ εἶναι οὐχὶ μόνον μέρη ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Πράγματος, ἀλλὰ νὰ ἔχωσι καὶ ὁμοίους Παρονομαςάς. Οὕτω, φέρ' εἰπεῖν· $\frac{2}{5}$ Γροσίου, καὶ $\frac{2}{3}$ Πήχης δὲν δύνανται κατ' οὐδένα τρόπον νὰ ἀθροισθῶσιν εἰς Ἓν, ἐπειδὴ εἰσὶ μέρη ἑτεροειδῶν Μονάδων. Ὡσαύτως δὲν δυνάμεθα νὰ συνάψωμεν ὁμοῦ $\frac{1}{5}$ Ὀκάδος καὶ $\frac{3}{10}$ τῆς ἰδίας Ὀκάδος, καίτοι ἀμφότερα τὰ μέρη εἰσὶ τῆς αὐτῆς Ὀκάδος, ἐπειδὴ δὲν ἔχουσιν ὁμοίαν ὀνομασίαν· ἐκτὸς ἐὰν προφέρωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ διὰ $\frac{2}{10}$, δι' οὗ ἀμφότερα τὰ Κλάσματα, χωρὶς μεταβολὴν τῆς τιμῆς των, μεταφέρονται εἰς ὁμοίαν ὀνομασίαν· ὅπερ ἐςὶν ἡ Ἑρμηνεία τοῦ Ἀθροισμοῦ.

§. 204.

Ὅθεν, ἐὰν τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντα Κλάσματα ἔχωσιν ὁμοίους Παρονομαςὰς, τότε, χωρὶς νὰ ἐξετάσωμεν περαιτέρω, ἀθροίζομεν τοὺς Ἀριθμητὰς, καὶ διαιροῦμεν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ, ὅστις εἶναι κοινὸς ὅλων. Ἡ κατάςρωσις γίνεται τοῦ λοιποῦ ὡς ἡ τοῦ συνειθισμένου Ἀθροισμοῦ, ὥσπερ τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα δεικνύουσιν.

α'. $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{9}$

9 εἰς 18 (τῶν 9.

Κεφ'. 2

β'. $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{5}{13}$

13 εἰς 15 (τῶν 13

Κεφ'. $1\frac{2}{13}$.

γ'. $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$

Κεφ'. $\frac{7}{8}$.

Εἰς τὸ α΄. ἀθροισθέντες ὅλοι οἱ Ἀριθμηταί, ἔδωκαν Κεφάλαιον 18, τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα διὰ τοῦ κοινοῦ Παρονομαστοῦ 9, ἀπέδωκαν 2 Ἀκέραια.

Εἰς τὸ β΄. προέκυψε Κεφάλαιον τῶν Ἀριθμητῶν 15, ἅτινα διαιρεθέντα διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ αὐτῶν 13, ἀπέδωκαν 1 Ἀκέραιον, καὶ προσέτι $\frac{2}{13}$.

Εἰς τὸ γ΄. ἐσυνάχθη τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἀριθμητῶν μόνον 7, τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ αὐτῶν 8, ἀπέδωκαν τὸ Κλάσμα $\frac{7}{8}$ (ὡς §. 176.)

§. 205.

Σχόλιον. Πρόδηλον ἐστί, δι' ἣν αἰτίαν ἐν τῷ ἀθροίζειν δὲν ἀναφέρομεν τὴν ὀνομασίαν τῶν Πραγμάτων, ἐπειδὴ μηδέποτε δυνάμεθα συναριθμῆσαι τὸ ὄνομα, ἢ τὴν ὀνομασίαν τῶν Πραγμάτων, ἀλλὰ μόνον τὰ μέρη αὐτῶν, καὶ καθώς, φέρ' εἰπεῖν, τῶν Γροσίων 2. Γροσ΄. 8. Γροσ΄. 5. κτλ. δὲν ἀριθμοῦμεν τὴν ὀνομασίαν Γρόσια, ἀλλὰ μόνον τοὺς Ἀριθμοὺς αὐτῶν 2, 8, 5, καὶ προφέρομεν αὐτοὺς δι' ἑνὸς Ἀριθμοῦ Γρ΄. 15,,— κτλ., ὡσαύτως ἀθροίζομεν παρ. χ. καὶ τῶν 1 ὀγδόου, 2 ὀγδόων, 3 ὀγδόων, 1 ὀγδόου κτλ. οὐχὶ τὴν ὀνομασίαν ὄγδοα, ἀλλὰ τοὺς Ἀριθμοὺς αὐτῶν 1, 2, 3, 1, ὧν τὸ Ἄθροισμα φέρει ὁμοῦ 7 ὄγδοα, κανονικῶς δὲ $\frac{7}{8}$.

§. 206.

Ἐὰν ὅμως τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντα Κλάσματα δὲν ἔχωσιν ὁμοίους Παρονομαστάς, θετέον $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ κτλ. (προϋποθέτοντες, ὅτι εἰσὶ Κλάσματα ἑνὸς Πράγματος), τότε πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν εἰς Κλάσματα ὁμοίας ὀνομασίας, διὰ νὰ γένωσιν ἐπιδεκτικὰ πρὸς Ἀθροισμόν, ὅπου πράττομεν κατὰ τὸν ἑπόμενον Κανόνα.

Κανών. Πρῶτον ζητοῦμεν ἕνα Κεφαλαιώδη, ἤτοι γενικὸν Παρονομαστήν, ὅ ἐστιν, ἕνα Αριθμὸν, εἰς ὃν νὰ περιέχωνται ἐπίσης ὅλοι οἱ Παρονομαςαὶ τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων (α). Αὐτὸν τὸν γενικὸν Παρονομαςὴν διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ ἑκάςου Κλάσματος, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ Παραγόμενον μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος· εἶτα ἀθροίζομεν ὅλους αὐτοὺς τοὺς νεοφανέντας Ἀριθμητὰς, ὧν τὸ Κεφάλαιον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γενικοῦ Παρονομαςοῦ καὶ προκύπτει τὸ Ζητούμενον. Παρ. χ. τ' ἀπέναντι Κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ τίθενται ὑπ' ἄλληλα (ὡς §. 204.), καὶ ἀθροίζονται ὡς ἑπομένως.

	30 γενικ. Παρον.	νέοι Ἀριθμηταί.	
$\frac{2}{3}$	10 Παραγ. $\times 2$	— 20	ἀθροιζόμενοι.
$\frac{3}{5}$	6 ὅμοιον $\times 3$	— 18	
$\frac{5}{6}$	5 ὅμοιον $\times 5$	— 25	
ὁλόκλ. Ποσ. $2\frac{1}{10}$.		ςαίνουσι $\frac{63}{30}$, εἴτ. $2\frac{3}{30}$, ἢ $2\frac{1}{10}$.	

Ἑρμηνεία. Μετὰ τὴν τακτικὴν κατάςρωσιν τῶν Κλασμάτων, ζητοῦμεν, ὡς ἐῤῥέθη, τὸν γενικὸν Παρονομαςὴν, ὅ ἐςὶν, ἕνα Ἀριθμὸν, εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ὅλοι οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ ἄνευ Ὑπολοίπου, ὅστις εἰς τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα εἶναι ὁ 30, ἐπειδὴ εἰς ἄλλον μικρότερον Ἀριθμὸν δὲν ἐμπεριέχονται ἐπίσης οἱ Παρονομαςαὶ 3, 5 καὶ 6. Λοιπὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 3 τὰ 30, καὶ προκύπτει Παραγόμενον, 10 τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 2 (ὅστις ἀνήκει εἰς τὸν

(α) Περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ γενικοῦ Παρονομαςοῦ θέλει εἴπωμεν τὰ ἀναγκαῖα εἰς τὸν πρόσω §. 210 καὶ ἑξῆς.

Παρονομαστὴν 3), καὶ προκύπτει ὁ νέος Ἀριθμητὴς 20, ἅτινα τίθενται ἀπέναντι τοῦ Κλάσματος $\frac{2}{3}$ δεξιῶς, ὡς ὄπισθεν, Ἀπαραλλάκτως πράττομεν καὶ μὲ τὸ ἑπόμενον Κλάσμα $\frac{3}{5}$, διαιροῦμεν δηλαδὴ διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5 τὰ 30, καὶ προκύπτει Παραγόμενον 6, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιαζόμενα μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος 3, προκύπτει ὁ νέος Ἀριθμητὴς 18. Τελευταῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 6 (ὅστις ἀνήκει τοῦ τελευταίου Κλάσματος) τὰ 30, καὶ προκύπτει Παραγόμενον 5, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἰδίου Κλάσματος 5, καὶ προκύπτει ὁ νέος Ἀριθμητὴς 25. Αὐτοὺς τοὺς νέους Ἀριθμητὰς 20, 18 καὶ 25 ἀθροίζομεν, καὶ δίδουσιν ὁμοῦ 63, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ γενικοῦ Παρονομαστοῦ 30, προκύπτει Κεφάλαιον 2 $\frac{1}{10}$, ὅ ἐστιν, ἡ ὁλόκληρος Ποσότης ὅλων τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων.

§. 207.

Σχόλιον. Ὅλος ὁ σκοπὸς τοῦ ἀνωτέρω τρόπου ἀποβλέπει ἁπλῶς εἰς τὸ, νὰ μεταβάλλῃ τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν διδόμενα Κλάσματα, χωρὶς μεταβολὴν τῆς τιμῆς των, εἰς ἕτερα Κλάσματα ὁμοίας ὀνομασίας.

Γνωστὸν ἐστὶν (ὡς §. 186.), ὅτι πολλαπλασιαζόμενος ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς μὲ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν Ἀριθμὸν, μένει ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμή· ἄρα ἐσμὲν ἐλεύθεροι διὰ νὰ λάβωμεν, ὁσάκις θέλομεν, μεγαλήτερον τὸν τοῦ Κλάσματος Παρονομαστὴν, φθάνει μόνον νὰ λάβωμεν τοσάκις μεγαλήτερον καὶ τὸν τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος Ἀριθμητήν.

Ὅθεν δοθέντων Κλασμάτων ἐκ διαφορετικῶν Παρονομαστῶν πρὸς Ἀθροισμὸν, διαιροῦμεν τὸ Ἀκέραιον εἰς, ὅσα θέλομεν, ὅμοια μέρη· διότι συναπτόμενα ὅλα τὰ μέρη ὁμοῦ, ἢ πολλὰ εἰσὶν, ἢ ὀλίγα, προκύπτει πάντοτε τὸ Ἀκέραιον (ὡς

§. 172.) ὅταν λοιπὸν δοθῶσι διάφορα μέρη νὰ ἀθροίσωμεν, διαιροῦμεν τὸ Ἀκέραιον (ἐξ οὗ μέλλουσι ληφθῆναι αὐτὰ τὰ μέρη) εἰς τόσα ὅμοια μέρη, ὥςε νὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν ἀκριβῶς τὰ πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντα Κλασματικὰ μέρη. Εἰς τὸ προτεθὲν Ὑπόδειγμα ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, πόσα ςαίνουσιν ὁμοῦ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, καὶ $\frac{5}{6}$ ἑνὸς ὁποιουδήποτε Πράγματος· αὐτὸ τὸ Πρᾶγμα λοιπὸν διαιροῦμεν εἰς 30 ὅμοια μέρη, δηλαδὴ εἰς $\frac{30}{30}$ (ἐπειδὴ 30 εἶναι ὁ μικρότατος Ἀριθμὸς, ἐξ οὗ δυνάμεθα λαβεῖν ἀκριβῶς τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{6}$), καὶ δοκιμάζομεν ἑπομένως, πόσα ληφθήσονται ἐξ αὐτῶν διὰ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{6}$.

Διὰ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 3 τὰ 30, ἵνα ἴδωμεν, πόσα προκύπτουσι δὶ 1 τρίτον, διὰ νὰ λάβωμεν διὰ τὰ $\frac{2}{3}$ δὶς τόσα, καὶ ἐπειδὴ βλέπομεν, ὅτι τὰ 3 εἰς τὰ 30 ἐμπεριέχονται 10 φοραῖς, ὅ ἐςιν, ἐξ αὐτῶν τῶν τριακοςῶν προκύπτουσι 10 δὶ 1 τρίτον, ἄρα τὰ $\frac{2}{3}$, ποιοῦσι δὶς 10, ἤτοι $\frac{20}{30}$ (α). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πληροφορούμεθα διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ἑτέρων Παρονομαςῶν 5 καὶ 6, ὅτι δὶ $\frac{1}{5}$ προκύπτουσιν 6, καὶ δὶ $\frac{1}{6}$ προκύπτουσι 5 ἐκ τῶν ἰδίων τριακοςῶν, καὶ ἑπομένως ποιοῦσι $\frac{3}{5}$ τρὶς 6, ἤτοι $\frac{18}{30}$, καὶ $\frac{5}{6}$ πεντάκις 5, ἤτοι $\frac{25}{30}$· ὅθεν, ἀντὶ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, προκύπτουσι πρὸς Ἀθροισμὸν τὰ ὁμώνυμα Κλάσματα 20, 18 καὶ 25 τριακοςὰ, ἅτινα ποιοῦσιν ὁμοῦ 63 τριακοςὰ, διὰ χαρακτήρων δὲ $\frac{63}{30}$, ἤτοι 2 $\frac{3}{10}$.

(α) Διὰ τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως 3 εἰς 30, προέκυψαν 10, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα μὲ τὸν Αριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαςὴν τοῦ Κλάσματος $\frac{2}{3}$, ηὐξήνθη δεκάκις τὸ Κλάσμα, καὶ οὕτως, ἀντὶ $\frac{2}{3}$, προέκυψαν $\frac{20}{30}$, ἅτινα ποιοῦσι τόσα, ὅσα ποιοῦσι καὶ τὰ $\frac{2}{3}$· διότι διαιρούμενα τὰ $\frac{20}{30}$ διὰ τῶν 10 (ὡς §. 197), προκύπτουσι πάλιν $\frac{2}{3}$· ἄρα ἔμεινεν ἀμετάβλητος ἡ τοῦ Κλάσματος τιμὴ (ὡς §. 186.).

Διὰ νὰ γίνηται λοιπὸν ἡ διαίρεσις πάντοτε ἐπίσης, πρέπει εἰς κάθε Πρόβλημα νὰ ἐκλέγωμεν ἕνα τοιοῦτον Ἀριθμὸν (οἷον· ὅσον δυνάμεθα μικρότατον), εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ἐξ ἴσου ἅπαντες οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομασταί.

§. 208.

Σημείωσις. Ἐν ᾧ διαιροῦμεν διὰ τῶν Παρονομαστῶν, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ παραθέττωμεν πάντοτε τὰ Παραγόμενα· τοῦτο γίνεται ἁπλῶς διὰ νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκολώτερον οἱ Ἀριθμηταὶ μὲ αὐτὰ, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα ν' ἀποφύγωμεν, ὅπου ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται διὰ τοῦ νοὸς εὐκόλως. Εἰς τὸ προτεθὲν Ὑπόδειγμα, ὅπου 3 εἰς 30 ἐμπεριέχονται 10 φοραῖς, λέγωμεν ἀμέσως· 2×10 ποιοῦσιν 20, χωρὶς πρότερον νὰ γράψωμεν ἐκεῖ τὸν Ἀριθμὸν 10. Ἐν γένει ἀπαιτεῖ ἡ συντομία, εἰς κάθε λογαριασμὸν, ν' ἀποφεύγωμεν ὅσα ψηφία δυνηθῶμεν.

§. 209.

Ἐὰν οἱ τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομασταὶ περιέχωνται εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν ἐπίσης, τότε δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ζητήσωμεν γενικὸν Παρονομαστὴν, ἐπειδὴ ἔχομεν ἐκεῖνον, εἰς ὃν ἐμπεριέχονται ἐξ ἴσου ὅλοι οἱ λοιποὶ Παρονομασταί. Παρ. χ. μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀθροίσωμεν $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{9}{16}$· ἐνταῦθα βλέπομεν, ὅτι οἱ Παρονομασταὶ 2, 4 καὶ 8 ἐμπεριέχονται ἐπίσης εἰς τὸν Παρονομαστὴν 16, λοιπὸν εἶναι πάντη περιττὸν νὰ ζητήσωμεν ἕτερον Ἀριθμὸν, εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ἐξ ἴσου ὅλοι οἱ τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων Παρονομασταί· διότι ἐὰν ζητήσωμεν, εὑρίσομεν πολλοὺς, ὧν ὁ μικρότερος (μετὰ τὸν 16), εἶναι ὁ 32, εἰς ὃν περιέχονται ὅλοι οἱ τῶν Κλασμάτων Παρονομασταὶ 2, 4, 8 καὶ 16 ἐπίσης. Πλὴν ἐπειδὴ ἐῤῥέθη, ὅτι πρέπει, ὅσον δυνάμεθα, νὰ συντέμνωμεν τὴν ἐργασίαν τῶν λογαριασμῶν, διὰ τοῦτο, ἀντὶ τοῦ Ἀριθμοῦ 32, λαμβάνομεν τὸν 16 διὰ γενικὸν Παρονομαςὴν, δι' οὗ γίνεται εὐκολώτερον, καὶ συντομώτερον ἡ ἐργασία, ὡς.

16 γενικὸς Παρονομας'.		12 γενικὸς Παρονομ.	
$\frac{1}{2}$	8	$\frac{2}{3}$	8
$\frac{3}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	3
$\frac{7}{8}$	14	$\frac{5}{6}$	10
$\frac{9}{16}$	9	$\frac{7}{12}$	7
Ποσ'. $2\frac{11}{16}$.	$\frac{43}{16}$ ςαίν. $2\frac{11}{16}$.	Ποσ'. $2\frac{1}{3}$.	$\frac{28}{12}$ ςαίν. $2\frac{4}{12}$ ἢ $2\frac{1}{3}$.

Ἀπαραλλάκτως πράττομεν πάντοτε, ὅταν οἱ τῶν πρὸς Ἀθροισμὸν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ ἐμπεριέχονται εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν ἐπίσης.

§. 210.

Ἡ βάσις τοῦ τῶν Κλασμάτων Ἀθροισμοῦ, θεμελιοῦται κατ' ἐξοχὴν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἑκάςοτε ἀπαιτουμένου γενικοῦ Παρονομαςοῦ, τοῦτ' ἔςι, νὰ ἠξεύρωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Ἀριθμὸν, εἰς ὃν νὰ ἐμπεριέχωνται ὅλοι οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ ἐπίσης. Ὁ τοιοῦτος Ἀριθμὸς ἤθελε προκύψει πάντοτε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μετ' ἀλλήλων τοὺς τῶν **Κλασμάτων Παρονομαςὰς**· διότι ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις παρήχθη διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Παρονομαςῶν, πρέπει νὰ διαιρεθῇ πάλιν δι' αὐτῶν ἐξ ἴσου, (ὡς §. 123.)· πλὴν πολλάκις δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἀντὶ τοῦ Κεφαλαίου τῶν Παρονομαςῶν, ἄλλον πολλὰ μικρότερον Ἀριθμὸν, τὸ ὁποῖον εὐκολύνει καὶ συντέμνει τὸν Ἀθροισμόν. Φέρ' εἰπεῖν· οἱ Παρονομαςαὶ τῶν Κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, ἤτοι 3, 4 καὶ 6 πολλαπλασιαζόμενοι μετ' ἀλλήλων, ἀποδίδουσι Κεφάλαιον, ὃ ἐςὶ, γενικὸν Παρονοςὴν, τὸν Ἀριθμὸν 72, δηλαδὴ 3 × 4 ποιοῦσι 12, καὶ 6 × 12 ποιοῦσιν 72· ἀντ' αὐτοῦ ὅμως χρησιμεύει ὡσαύτως ὁ πολλὰ μικρότερος Ἀριθμὸς 12, εἰς ὃν περιέχονται οἱ τῶν Κλασμάτων Παρονομασαὶ 3, 4 καὶ 6 ἐπίσης.

§. 211

Διὰ νὰ προκύπτῃ λοιπὸν πάντοτε ὁ μικρότατος γενικὸς Παρονομαςὴς, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ πολλαπλασιάζωμεν τοὺς ἰδίους Παρονομαςὰς, ἀλλὰ τοὺς ἀναγκαίους Παράγοντας, οἵτινες παράγουσιν αὐτοὺς τοὺς ἰδίους Παρονομαςὰς, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, εἶναι ὁ μικρότατος Ἀριθμὸς, εἰς ὃν ὅλοι οἱ Παρονομασαὶ ἐξ ἴσου περιέχονται.

Π. χ. τὰ 4. 6. 8. καὶ 12 ἔχουσι Παράγοντας τοὺς ἀριθμοὺς 2. 3. καὶ 4. διότι τὰ 12 σύγκεινται ἐκ τρὶς 4, τὰ 8 ἐκ δὶς 4, καὶ τὰ 6 ἐκ δὶς 3., ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ 4. 6. 8. καὶ 12, πρέπει νὰ περιέχωνται ἐπίσης εἰς ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸν, ὅστις διὰ τῶν Παραγόντων 2. 3. καὶ 4 δύναται νὰ διαιρεθῇ ἐξ ἴσου, ἐπειδὴ ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ τοῦ 2, καὶ διὰ τοῦ 3 ἐπίσης διαιρεῖται, διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν δὶς 3, εἴτουν διὰ τῶν 6 ἐξ ἴσου· καὶ πάλιν ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ 3, καὶ διὰ 4 ἐπίσης διαιρεῖται, διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν τρὶς 4, εἴτουν διὰ τῶν 12 ἐξ ἴσου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, (ὡς §. §. 194 καὶ 200.). Τὸ Κεφάλαιον λοιπὸν ἐκ δὶς 3, καὶ τρὶς 4. δηλ. 24 (ἐπειδὴ δὶς 3 ποιοῦσιν 6, καὶ τετράκις 6 ποιοῦσιν 24), εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ἐν ᾧ ἐξ ἴσου τὰ 4. 6. 8 καὶ 12 περιέχονται.

§. 212.

Διὰ τοῦτο εἰς κάθε Ἀθροισμὸν, ὅπου ζητεῖται ὁ γενικὸς Παρονομαςὴς, πράττομεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· πρότερον διαιροῦμεν τὸν Παρονομαςὴν τοῦ πρώτου Κλάσματος εἰς τοὺς αὐτοῦ Παράγοντας (τὸ ὁποῖον διὰ τῶν ἤδη δοθέντων Σημείων εἶναι πολλὰ εὔκολον), καὶ θέττομεν αὐτοὺς κατὰ μέρος, εἶτα διαιροῦμεν ὁμοίως καὶ τὸν τοῦ δευτέρου Κλάσματος Παρονομαστὴν εἰς τοὺς αὐτοῦ Παράγοντας, καὶ θέττομεν ἐξ αὐτῶν εἰς τοὺς προτέρους ἐκεῖνον, ὅστις δὲν ὑπάρχει ἐκεῖ, ἐκεῖνον δὲ, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τοὺς προτέρους, ἀφίνομεν. Ἀπαραλλάκτως διαιροῦμεν καὶ τοὺς Παρονομαστὰς ὅλων τῶν ἄλλων Κλασμάτων, καὶ θέττομεν ἐκ τῶν Παραγόντων αὐτῶν εἰς τοὺς προτέρους ἐκείνους, οἵτινες δὲν ὑπάρχουσιν ἐκεῖ, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς τοὺς κατὰ μέρος τεθέντας Παράγοντας μετ' ἀλλήλων, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ κατὰ πάντα ἐλάχιστος γενικὸς Παρονομαστής.

Θετέον· μᾶς ἐδόθησαν νὰ ἀθροίσωμεν $\frac{5}{6}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{3}{7}$. καὶ $\frac{9}{14}$· αὐτὰ ἀθροίζομεν ὡς κατωτέρω.

Παράγοντες.		210. ὁ γενικὸς Παρονομαστής.		
† 2	$\frac{5}{6}$	35	—	175
3	$\frac{7}{10}$	21	—	147
5	$\frac{3}{7}$	30	—	90
7	$\frac{9}{14}$	15	—	135
				$\frac{547}{210}$ φέρουσιν Ἀκέραια $2\frac{127}{210}$.

Ἑρμηνεία. Τὸν γενικὸν Παρονομαστὴν ζητοῦμεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Πρῶτον διαιροῦμεν τὸν τοῦ πρώτου Κλάσματος Παρονομαστὴν 6 εἰς τοὺς αὐτοῦ Παράγοντας 2. 3., καὶ βάλλομεν αὐτοὺς πλησίον τοῦ κατὰ μέρους †, ὡς ἀνωτέρω. Τοῦ δευτέρου Κλάσματος ὁ Παρονομαστὴς σύγκειται ἐκ 2×5, πλὴν ἐπειδὴ ὁ Παράγων 2 προέκυψεν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου Παρονομαστοῦ, διὰ τοῦτο πρὸς ἀναπλήρωσιν τοῦ Ἀριθμοῦ 10, εἶναι ἀναγκαῖος ἔτι ὁ Παράγων 5, ὅστις ὑπὸ τῶν προτέρων Παραγόντων 2. 3. ἐτέθη. Ὁ Παρονομαστὴς τοῦ τρίτου Κλάσματος 7 δὲν ἔχει Παράγοντας, ἐπειδὴ εἶναι αὐτὸς Αὐτοπαράγων, ὅθεν καὶ ἐτέθη ὁλόκληρος ὑπὸ τῶν ῥηθέντων Παραγόντων. Τελευταῖον ὁ τοῦ τετάρτου Κλάσματος Παρονομαςὴς 14. σύγκειται ἐκ 2×7, ἀλλ' ἐπειδὴ τόσον ὁ Παράγων 7, ὅσον καὶ ὁ 2 προέκυψαν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν προτέρων Παρονομαςῶν, διὰ τοῦτο δὲν ἐτέθη μηδὲν διὰ τὰ 14 ὑπὸ τῶν προτέρων Παραγόντων. Ὅθεν ὁ Ἀριθμὸς, εἰς ὃν περιέξονται ἐξ ἴσου οἱ τῶν λεχθέντων Κλασμάτων Παρονομαςαὶ 6. 10. 7 καὶ 14, προκύπτει ἁπλῶς ἐκ τῶν κατὰ μέρους Παραγόντων 2. 3. 5 καὶ 7, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι μετ' ἀλλήλων, προκύπτει ὁ Ἀριθμὸς 210 (δηλονότι· 2×3, ποιοῦσιν 6, εἶτα 5×6, ποιοῦσι 30, καὶ 7×30, ποιοῦσι 210). Ὅθεν ὁ γενικὸς Παρονομαςὴς τῶν δοθέντων Κλασμάτων, εἶναι ὁ 210, καὶ οὕτω πράττομεν τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸν §. 206., δηλονότι· διαιροῦμεν διὰ τοῦ Παρονομαςοῦ 6 τὸν γενικὸν Παρονομαςὴν 210, καὶ προκύπτουσι 35, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν 5, καὶ προκύπτουσιν 175, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὥςε προκύπτει τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Κλασμάτων $\frac{527}{210}$, ἤτοι $2\frac{107}{210}$, ὡς ὄπισθεν.

§. 213.

Ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω συντομίας, τὴν ὁποίαν προξενεῖ ἡ διαίρεσις τῶν Παρονομαςῶν εἰς τοὺς αὐτῶν Παράγοντας, προκύπτει καὶ ἑτέρα ὠφέλεια εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν Διαίρεσιν, ἐπειδὴ ἀνακουφίζει παντάπασι καὶ αὐτὴν τὴν διὰ τῶν Παρονομαςῶν διαίρεσιν· εὑρίσκομεν καὶ τὰ Παραγόμενα αὐτῶν, πολλαπλασιάζοντες ἁπλῶς τοὺς Παράγοντας μετ' ἀλλήλων, τὸ ὁποῖον εἰς μεγάλους καὶ γενικοὺς Παρονομαςὰς, ὅπου ἡ διαίρεσις εἶναι ὁπωσοῦν ἐπίπονος, προξενεῖ μεγάλην εὐκολίαν καὶ συντομίαν, ὡς ἑπομένως.

Ἀθροισθήτωσαν $\frac{7}{12}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{24}$ καὶ $\frac{17}{36}$.

Παράγοντες		432. ὁ γενικὸς Παρονομαστής.
3	$\frac{7}{12}$	36
4	$\frac{11}{18}$	24
6	$\frac{13}{24}$	18
6	$\frac{17}{36}$	12

Ἑρμηνεία. Ἀφ' οὗ διὰ τῶν Παραγόντων εὑρήκαμεν τὸν γενικὸν Παρονομαστὴν 432, ἔπρεπε, κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον, νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν Παρονομαστῶν 12. 18. 24 καὶ 36, ἡ ὁποία διαίρεσις, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ δύο ἀριθμῶν, εἶναι διεξοδική, καὶ μάλιστα εἰς μεγαλητέρους Ἀριθμοὺς ἔσεται καὶ φορτική. Ὅθεν διὰ ν' ἀποφύγωμεν αὐτὸν τὸν κόπον, πράττομεν οὕτω· δηλαδή, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 12 τὸν γενικὸν Παρονομαστὴν 432, πολλαπλασιάζομεν τοὺς Παράγοντας τοῦ γενικοῦ Παρονοστοῦ μετ' ἀλλήλων, ἀφίνοντες τοὺς τὰ 12 Παράγοντας 3 × 4, καὶ λέγομεν· 6 × 6 ποιοῦσι 36, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ἴδιος Ἀριθμὸς, ὅστις προκύπτει, ἐὰν διὰ τῶν 12 διαιρέσωμεν τὰ 432. Ὡσαύτως· ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 18, ἀφίνοντες τοὺς Παράγοντας αὐτῶν 3 × 6, πολλαπλασιάζομεν μόνον 4 × 6 ποιοῦσιν 24, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ Παραγόμενον τῶν 18 ἐκ τῶν 432. Εἶτα· ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 24, ἀφίνοντες τοὺς Παράγοντας αὐτῶν 4 × 6, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἑτέρους 3 × 6 ποιοῦσι 18, τὰ ὁποῖα εἶναι ὡσαύτως τὸ Παραγόμενον τῶν 24 ἐκ τῶν 432. Τελευταῖον δὲ· ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν 36, ἀφίνοντες τοὺς αὐτῶν Παράγοντας 6 × 6, πολλαπλασιάζομεν μόνον 3 μὲ 4, καὶ προκύπτουσι 12 διὰ τὸ Παραγόμενον τῶν 36 ἐκ τῶν 432, ὥστε τοιουτοτρόπως, χωρὶς ποσῶς νὰ διαιρέσωμεν, προκύπτουσι τὰ τῶν Κλασμάτων Παραγόμενα ἐν εὐκολίᾳ καὶ συντομίᾳ, καὶ τοῦτο τόσον συντομώτερον, ὅσον εἰσὶ μεγαλήτεροι οἱ Παρονομασταί.

Δεῖξις. Ἡ βάσις αὐτοῦ τοῦ τρόπου εἶναι αὕτη. Ἐπειδὴ ὁ γενικὸς Παρανομαστὴς εἶναι τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Παραγόντων, διὰ τοῦτο διαιρούμενος αὐτὸς πάλιν διὰ μερικῶν αὐτῶν τῶν Παραγόντων, ἤτοι διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, ὅστις εἶναι τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν τῶν Παραγόντων, προκύπτει μόνον τὸ Κεφάλαιον τῶν ὑπολοίπων Παραγόντων.

§. 214.

Σχόλιον. Τὸν ῥηθέντα τρόπον τοῦ πολλαπλασιάζειν τοὺς Παράγοντας μεταχειριζόμεθα, ὅπου προξενεῖ τῷ ὄντι εὐκολίαν καὶ συντομίαν· ὅπου ὅμως ἐκτελοῦνται εὐκόλως καὶ ταχέως αἱ διαιρέσεις, καθὼς αἱ τῶν διὰ τῶν μοναδικῶν Παρονομαστῶν, ἐπιμένομεν εἰς τὸν συνήθη τρόπον. Κυρίως ὁ Λογαριάζων πρέπει νὰ ἐκλέγῃ, ποῖος τρόπος μεταξὺ τῶν περισσοτέρων εἶναι ὠφελιμώτερος διὰ τὸ προκείμενον Ὑπόδειγμα.

§. 215.

Ἐὰν οἱ τῶν δοθέντων Κλασμάτων Παρονομασταὶ δὲν ἔχωσι Παράγοντας, ἀλλ' οὔτε περιέχονται ἐξ ἴσου εἰς οὐδένα ἐξωτερικὸν Ἀριθμὸν, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ὅλοι μετ' ἀλλήλων, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, ἔσται ὁ γενικὸς Παρονομαστὴς ὅλων τῶν πρὸς Ἄθροισιν δοθέντων Κλασμάτων, εἶτα πράττομεν ὡς καὶ εἰς τὰ προτεθέντα Ὑποδείγματα. Φέρ' εἰπεῖν· πρόκεινται ν' ἀθροίσωμεν $\frac{5}{7}$. $\frac{4}{9}$. $\frac{9}{13}$. ἐνταῦθα δῆλον ἐστίν, ὅτι οἱ προκείμενοι Παρονομασταὶ δὲν ἔχουσιν οὔτε Παράγοντας, ἀλλ' οὔτε περιέχεταί τις εἰς ἕτερον αὐτῶν, μήτε εἰς κἀνένα ἐξωτερικὸν Ἀριθμὸν ἅπαντες ἐξ ἴσου, ἀλλ' ἕκαστος ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ, τουτ' ἔστιν, εἰσὶν Αὐτοπαράγοντες· διὰ τοῦτο λοιπὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι μετ' ἀλλήλων, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν προκύπτον Κεφάλαιον, ἔσεται ὁ γενικὸς Παρονομαστής. Οἷον.

Πολλαπλ. τῶν Παραγ.		819. ὁ γενικὸς Παρονομαστής.
7	$\frac{5}{7}$	117 — 585
9		
63	$\frac{4}{9}$	91 — 364
13		
189	$\frac{9}{13}$	63 — 567
63		1516
γεν. Παρον. 819.		$\frac{1516}{819}$ φέρουσιν $1\frac{697}{819}$.

§. 216.

Ἐὰν μὲν σὺν τοῖς Κλάσμασι δοθῶσι καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ πρὸς Ἄθροισιν, αὐτὸ οὐδεμίαν προξενεῖ εἰς τὸν Ἀθροισμὸν μεταβολὴν, ἀλλ' ἀθροίζομεν, ὡς συνήθως, πρότερον τὰ Κλάσματα, καὶ λαμβάνομεν τὰ εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν, ἂν τύχωσιν, Ἀκέραια, καὶ τὰ ἀθροίζομεν μὲ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς. Θὲς, ὅτι μᾶς ἐδόθησαν ν' ἀθροίσωμεν.

	24. ὁ γεν. Παρ.	Παράγ.
Γρ. 5,,33 Π. 2 $\frac{5}{6}$ Ἄσπρ.	20	2
— 8,,24 — 1 $\frac{7}{8}$ —	21	3
— -,,29 — 2 $\frac{7}{12}$ —	14	4
— -,,38 — 2 $\frac{3}{4}$ —	18	
Ποιοῦσ. Γρ. 16,,7 Π. 1 $\frac{1}{24}$ ἄσπρ.	$\frac{73}{24}$ ποιοῦσι $3\frac{1}{24}$ ἄσπρ.	

Ἐνταῦθα, χωρὶς ν' ἀποβλέψωμεν εἰς τὰ Ἀκέραια, ἀρχόμεθα τὴν Ἄθροισιν ἐκ τῶν Κλασμάτων, ἐπειδὴ αὐτὴ εἶναι ἡ κατωτέρα τάξις τοῦ προκειμένου Ὑποδείγματος (ἀπαραλλάκτως κατὰ τὸν Κανόνα τῶν ἁπλῶν Κλασμάτων), ὧν ἡ ὁλικὴ Ποσότης φέρει $3\frac{1}{24}$ ἄσπρα., λοιπὸν θέττομεν τὸ $\frac{1}{24}$ ὑπὸ τῶν Κλασμάτων, τὰ δ' Ἀκέραια 3 ἄσπρα ἀθροίζομεν μετὰ τῶν λοιπῶν, λέγοντες· 3 καὶ 2 ποιοῦσι 5, καὶ 2 ποιοῦσιν 7, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἄχρις οὗ ν' ἀθροισθῶσι τὰ ἄσπρα, Παράδες, καὶ τὰ Γρόσια.