ὅτι τὰ τοιαῦτα Κλάσματα δὲν ἐλαττοῦνται, καὶ πρέπει νὰ μείνωσιν εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἀριθμοὺς αὐτῶν.

§. 188.

Διὰ νὰ δυνάμεθα λοιπὸν νὰ μεταβάλωμεν ἕκαςον Κλάσμα εἰς τοὺς πλέον ἐλαχίςους Ἀριθμοὺς, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἠξεύρωμεν, ἂν, καὶ διὰ ποίου Ἀριθμοῦ ἐλαττοῦται, ὃ ἐςὶ, πρέπει νὰ γινώσκωμεν εἰς τὸ, νὰ διακρίνωμεν, ἂν ὁ Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς ἔχωσι κοινὸν Διαιρέτην, καὶ τίς ἐςὶν αὐτὸς ὁ Ἀριθμός· περὶ οὗ εἰς τὸ ἑπόμενον Κεφάλαιον ἕπεται ἡ ἀναγκαία Ἑρμηνεία.

ΚΕΦ. Δ΄.

Περὶ τοῦ κοινοῦ Διαιρέτου δύο Ἀριθμῶν, εἴτουν τοῦ Κλάσματος ἐν γένει.

§. 189.

Ὁ Ἀριθμὸς, δἰ οὗ δύο ἢ καὶ περισσότεροι ἄλλοι Ἀριθμοὶ δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν ἐξ ἴσου ἐπ᾽ ἀκριβὲς, ὀνομάζεται, μέγιςος καὶ κοινὸς αὐτῶν Διαιρέτης. Τοῦτον εὑρίσκομεν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον, διὰ τῶν ἑπομένων ἰδιαιτέρων Σημείων ἑκάςου Διαιρέτου.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 2.

Ἐὰν ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς τελειόνωσιν εἰς ἀρτίους, ἤγουν διπλοῦς Ἀριθμοὺς· ὅ ἐςίν, εἰς 2, 4, 6, 8 ἢ 0, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 2· διότι, ἐπειδὴ ἑκάςη δεκὰς σύγκειται ἐκ δὶς 5· ἑκάςη ἑκατοντὰς ἐκ δὶς 50· ἑκάςη χιλιὰς ἐκ δὶς 500 καὶ ἐφεξῆς, τοῦτ᾽ ἐςίν, ὅλαι αἱ τάξεις ἐκ τῶν δεκάδων καὶ ἑξῆς σύγκεινται ἐν γένει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 2, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρῶνται ἐξ ἴσου ὡσαύτως διὰ τοῦ 2. ὅθεν ἐὰν ἡ Μονὰς (ἐφ᾽ ἧς ἀποβλέπειν δεῖ) διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 2, ἐσμὲν βέβαιοι, ὅτι ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 2. Φέρ᾽ εἰπεῖν· μᾶς ἐδόθη νὰ σμικρύνωμεν τὸ Κλάσμα $\frac{14}{16}$, ἐνταῦθα βλέπομεν ἐκ τοῦ προδοθέντος σημείου, ὅτι τόσον ὁ Ἀριθμητὴς 14, ὅσον καὶ ὁ Παρονομαςὴς 16 διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 2, ἄρα τὸ ῥηθὲν Κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, καὶ δίδει $\frac{7}{8}$. (α)

§. 190.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 3.

Διὰ τοῦ 3 διαιρεῖται ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ἐὰν τὸ Κεφάλαιον τῶν ψηφίων, ἐξ ὧν σύγκειται, διαιρῆται διὰ τοῦ 3. Οἷον ὁ Ἀριθμὸς 513 διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3, ἐπειδὴ τὰ ψηφία 5, 1 καὶ 3 ἀθροιζόμενα ὁμοῦ, ποιοῦσιν 9, ἅτινα διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3. Ἐξ ἐναντίας ὁ Ἀριθμὸς 314 δὲν διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3, ἐπειδὴ 3, 1 καὶ 4, ποιοῦσιν ὁμοῦ 8, τὰ ὁποῖα δὲν διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 3.

(α) Αὐτὸν τὸν ἴδιον τρόπον μεταχειριζόμεθα εἰς ὅλους τοὺς τοιούτους ἑπομένους Κανόνας.

Δεῖξις. Ἐκ τοῦ ἀξιώματος τῆς Ἀριθμήσεως εἶναι φανερὸν, ὅτι διαιρουμένη μία Δεκὰς (συνιςαμένη ἐκ τρεῖς 3, ἤτοι 9 καὶ 1), ἑπομένως καὶ μία Ἑκατοντὰς, Χιλιὰς καὶ ἐφεξῆς διὰ τοῦ 3, πρέπει νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 1, ὅπερ οὐχ' ἁπλῶς ὡς ἓν, ἀλλ' ὡς ἁπλῆ Μονὰς ἐννοεῖται. Λοιπὸν ὅσαι Μονάδες, Δεκάδες, Ἑκατοντάδες καὶ ἐφεξῆς διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 3, τόσα ὑπόλοιπα προκύπτουσιν ἀνὰ 1· ὅθεν ἐπὶ τοῦτο ἀποβλέπειν δεῖ ἁπλῶς, ἐὰν καὶ τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν τῶν ὑπολοίπων (ἀφ' οὗ ἀθροισθῶσιν ὡς ἁπλαῖ μονάδες), διαιρῆται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, τοῦ ὁποίου γενομένου, πρέπει ἀναγκαίως καὶ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3. Παρ. χ. 3685 κτλ. διαιρεθήτωσαν διὰ τοῦ 3, δηλοῖ, 3 Χιλιάδες, 6 Ἑκατοντάδες, 8 Δεκάδες καὶ 5 Μονάδες νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 3· ἐπειδὴ λοιπὸν, ὡς εἴρηται, 1 Χιλιὰς, 1 Ἑκατοντὰς, 1 Δεκὰς, 1 Μονὰς διαιρούμεναι διὰ τοῦ 3, προκύπτει ἐξ ἑκάςης ὑπόλοιπον, διὰ τοῦτο ἐκ 3 Χιλιάδων, μένουσι τρεῖς ἕν· ἀπὸ 6 Ἑκατοντάδων, ἑξάκις ἕν· ἀπὸ 8 Δεκάδων, ὀκτάκις ἕν· καὶ ἀπὸ 5 Μονάδων, πεντάκις ἕν, ὅθεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ, ὅστις μέλλει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 3., θεωροῦνται ἁπλῶς ὡς μοναδικὰ ὑπόλοιπα, διὸ καὶ τὰ ἀθροίζομεν ὡς ἁπλᾶς μονάδας, ἵνα ἴδωμεν, ἐὰν ποιῶσιν ὁμοῦ τοιοῦτον Ἀριθμὸν, ὅς τις διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 3.

§. 191.

Σχόλιον. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων, ὡς ἀνωτέρω, προκύψῃ τόσον μεγάλος Ἀριθμὸς, ὥςε νὰ μὴ διακρίνηται εὐθὺς, ἐὰν διαιρῆται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, τότε μεταχειριζόμεθα καὶ εἰς αὐτὸν τὸν Ἀριθμὸν τὴν δοθεῖσαν δοκιμὴν ἐπὶ τοσοῦτον, ἕως ὅτου νὰ προκύψῃ ὁ ἴδιος Διαιρέτης 3, ἢ ἕτερος Ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα εὐκόλως διακρίνειν, ἐὰν διαρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3. Οἷον· ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων ἑνὸς ὁποιουδήποτε Ἀριθμοῦ, προέκυψε Κεφάλαιον 84; καὶ δὲν δυνάμεθα ἀμέσως διακρίνειν, ἐὰν 84 διαιρῶνται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, λοιπὸν ἀθροίζομεν πάλιν 8 καὶ 4 ποιοῦσι 12, εἶτα 2 καὶ 1 ποιοῦσι 3· ἄρα διαιρεῖται καὶ ὁ ἀρχαῖος Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 3. Προσέτι· ἐξ ἑτέρου ἀθροίσματος, προέκυψε Κεφάλαιον 78· καὶ ἐνταῦθα λέγομεν· 7 καὶ 8 ποιοῦσι 15, ἔπειτα, 5 καὶ 1 ποιοῦσιν 6, ἅτινα, ἐπειδὴ διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 3, ἄρα διαιρεῖται καὶ ὁ ἀρχαῖος Ἀριθμὸς ἐπίσης διὰ τοῦ 3.

§. 192.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου. 4.

Ἐὰν τὰ τελευταῖα δύο Ψηφία τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ (ἤγουν αἱ Μονάδες καὶ Δεκάδες), διαιρῶνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 4, διαιρεῖται ἐπίσης καὶ ὅλος ὁ Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 4. Φέρ' εἰπεῖν· ὁ Ἀριθμὸς 42916 διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 4, ἐπειδὴ αἱ Μονάδες, καὶ Δεκάδες αὐτοῦ, δηλονότι 16, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 4.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ ἑκάστη 100 σύγκειται ἐκ τετράκις 25, διὰ τοῦτο αἱ 100 τάδες, ἑπομένως καὶ αἱ 1000 άδες, καὶ αἱ ἐφεξῆς ὑψηλότεραι τοιαῦται τάξεις, διαιροῦνται ἀναντιῤῥήτως ἐπίσης διὰ τοῦ 4, ὅθεν δοκιμάζομεν μόνον, ἐὰν αἱ Δεκάδες καὶ Μονάδες τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ ὁμοῦ, διαιρῶνται ὡσαύτως ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 4.

§. 193.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 5.

Ἐὰν τὸ τελευταῖον Ψηφίον τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ δεξιῶς, εἶναι 5 ἤτοι 0, διαιρεῖται ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς ἐξ

11 *

ἴσου διὰ τῶν 5. Οἷον· 425, 530 κτλ. διαιρούμενα διὰ τῶν 5 δὲν μένει ὑπόλοιπον.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ αἱ Δεκάδες σύγκεινται ἐκ δὶς 5, διαιροῦνται ἀναντιῤῥήτως ἐξ ἴσου διὰ τῶν 5, ἄρα καὶ αἱ Ἑκατοτάδες, Χιλιάδες καὶ αἱ ἐφεξῆς ὑψηλότεραι τάξεις διαιροῦνται ὡσαύτως ἐπίσης διὰ τῶν 5, τὸ ὁποῖον ὅμως γίνεται τότε, ἐὰν ὁ Ἀριθμὸς σύγκηται ἐκ τῶν ψηφίων 5 ἢ 0 (ὅπερ δεικνύει τὴν παντελῆ ἔλλειψιν τῶν Μονάδων), ἐπειδὴ ἐξ ὅλων τῶν ψηφίων μέχρι τῶν 9, μόνον τὸ 5 διὰ τοῦ 5 ἐπίσης διαιρεῖται.

§. 194.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 6.

Ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμὸς 6 σύγκειται ἐκ δὶς 3, διὰ τοῦτο διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 6 ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 2, ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ 3, ὧν τὰ Σημεῖα προελέχθησαν. Παρ. χ. ὁ Ἀριθμὸς 81342, ἔχων διπλῆν τὴν Μονάδα, διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 2, ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ 3· διότι 8, 1, 3, 4 καὶ 2, ποιοῦσιν ὁμοῦ 18, τὰ ὁποῖα διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 3, ἄρα διαιρεῖται καὶ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 6, ἐπειδὴ δὶς 3 ποιοῦσιν 6.

Δεῖξις. Ταὐτὸν ἐςὶν, ὡς πολλάκις ἐλέχθη, κἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἐν μιᾷ μὲ ἕνα Ἀριθμὸν, ἢ κατ' ἰδίαν μὲ τοὺς Παράγοντας αὐτοῦ (ὡς §. 138.), ὅθεν ἕκαςος Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ τοῦ 2, ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ 3 διαιρεῖται ἄνευ ὑπολοίπου, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁμοίως καὶ διὰ τοῦ Κεφαλαίου ἐκ δὶς 3, ἤγουν διὰ τοῦ 6, ἄνευ ὑπολοίπου.

§. 195.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 8.

Ἐὰν τὰ τελευταῖα τρία Ψηφία τοῦ προκειμένου Ἀριθμοῦ (εἴτουν αἱ Ἑκατοντάδες, αἱ δεκάδες καὶ Μονάδες), διαιρῶνται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 8, διαιρεῖται ἐπίσης καὶ ὁ ὁλόκληρος Ἀριθμὸς διὰ τοῦ 8. Θές· ὁ ἀριθμὸς 964360 διαιρεῖται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 8, ἐπειδὴ τὰ τελευταῖα τρία ψηφία, τοῦτ' ἔςι 360, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 8.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ ἡ Χιλιὰς σύγκειται ἐξ ὀκτάκις 125, διὰ τοῦτο αἱ Χιλιάδες, καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ ὑψηλότεραι τάξεις, διαιροῦνται ἐπίσης διὰ τοῦ 8· ὅθεν μένει νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν ἡ Ποσότης τῶν Ἑκατοντάδων, Δεκάδων καὶ Μονάδων διαιρῶνται ὡσαύτως διὰ τοῦ 8 ἐξ ἴσου.

§. 196.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 9.

Τὸ σημεῖον τοῦ 9 εἶναι ὡς ἐκεῖνο τοῦ 3. Δηλαδὴ ἀθροίζομεν τὰ Ψηφία τοῦ πρὸς δοκιμὴν δοθέντος Ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 9, διαιρεῖται καὶ ὁ ἴδιος Ἀριθμός.

Ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ αὐτή, ὡς ἡ τοῦ ἀριθμοῦ 3· διότι ἑκάςη Δεκὰς, Ἑκατοντὰς καὶ ἐφεξῆς, διαιρούμεναι διὰ τοῦ 9, μένει ἐξ ἑκάςης ὑπόλοιπον 1, ὡς εἰς τὸν §. 190. ἐκταντικῶς ἐλέχθη.

Σημείωσις. Δὲν εἶναι τόσον ἀναγκαῖον νὰ ἀθροίσωμεν ὅλα τὰ Ψηφία διὰ νὰ ἰδῶμεν, ἐὰν τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 9, ἀλλ' ἀθροίζοντες ἕως τῶν 9, ἀποβάλλομεν αὐτὰ ὁσάκις προκύψουσι, καὶ ἐὰν ἐν τῷ τέλει προκύψωσιν 9, χωρὶς νὰ μείνῃ κἀνὲν ὑπόλοιπον, εἶναι φανερὸν, ὅτι ὁ Ἀριθμὸς διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 9. Παρ. χ. διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν ὁ Ἀριθμὸς 745263 διαιρῆται ἐξ ἴσου διὰ τοῦ 9, λέγομεν· 3 καὶ 6, ποιοῦσιν 9· εἶτα 2 καὶ 5 ποιοῦσιν 7, καὶ 4 ποιοῦσιν 11, μένουσι 2 (ὑπὲρ τῶν 9), καὶ 7, ποιοῦσιν 9, ἄνευ ὑπολοίπου· ὁ δοθεὶς λοιπὸν Ἀριθμὸς διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 9.

§. 197.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 10.

Διὰ τῶν 10 διαιρεῖται ἐπίσης κάθε Ἀριθμὸς, ὅστις ἐν τῷ τέλει (δεξιῶς) ἔχει ἓν 0· διὰ τῶν 100, ἐὰν ἔχῃ δύο· διὰ τῶν 1000, ἐὰν ἔχῃ τρία μηδενικὰ, καὶ ἐφεξῆς, ἡ δὲ διαίρεσις γίνεται (ὡς §. 112.)

Δεῖξις. Ἡ αἰτία παρίσταται ἀμέσως πρὸ ὀφθαλμῶν· διότι ἓν 0 δεικνύει, ὅτι ἐν τῷ προκειμένῳ Ἀριθμῷ δὲν ὑπάρχουσι μονάδες, ἀλλ' ἁπλῶς δεκάδες, διὸ καὶ διαιρεῖται διὰ τῶν 10. Ὁμοίως δεικνύουσι δύο 0, ὅτι ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς σύγκειται ἁπλῶς ἀπὸ Ἑκατοντάδων· τρία μηδενικκὰ, ἁπλῶς ἐκ Χιλιάδων, καὶ ἐφεξῆς, ὅθεν πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τῶν 100, διὰ τῶν 1000 ἐπίσης, καὶ οὕτω καθεξῆς.

§. 198.

Σημεῖον τοῦ Διαιρέτου 11.

Διὰ νὰ πληροφορηθῶμεν, ἐὰν ὁ προκείμενος Ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ τῶν 11 ἐξ ἴσου ἢ οὐχὶ, ἀφαιροῦμεν τὴν Μονάδα ἐκ τῆς Δεκάδος, τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς ἐκ τῆς Ἑκατοντάδος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τέλους ὅλων τῶν ψηφίων, καὶ ἐὰν μετὰ ταῦτα δὲν μείνει ὑπόλοιπον, διαιρεῖται ὁ ὁλόκληρος ἀριθμὸς διὰ τῶν 11 ἐπίσης. Φέρ' εἰπεῖν· νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν 58652 διαιρῶνται διὰ τῶν 11, ἀρχόμεθα ἐκ τῆς Μονάδος, λέγοντες· 2 ἐκ τῶν 5, μένουσι 3, εἶτα 3 ἐκ τῶν 6, μένουσι 3, ἔπειτα 3 ἐκ τῶν 8, μένουσι 5, τελευταῖον 5 ἐκ τῶν 5, μένει μηδέν· ὁ δοθεὶς λοιπὸν Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τῶν 11 ἐπίσης.

Δεῖξις. Ἡ αἰτία, δι' ἣν ἀφαιροῦμεν τὴν Μονάδα ἐκ τῆς Δεκάδος καὶ ἐφεξῆς, προέρχεται ἐκ τούτου, ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον τῶν 11 συνίσταται πάντοτε ἐκ τῶν Μονάδων, ἔπειτα ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν Μονάδων καὶ Δεκάδων, ἐκ τῆς Ποσότητος τῶν Δεκάδων καὶ Ἑκατοντάδων καὶ τῶν ἐφεξῆς, ἑνὸς πολλαπλασιασθέντος Ἀριθμοῦ (ὡς §. 88.), αἱ ὁποῖαι διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει πάλιν νὰ διαλυθῶσιν, ἐὰν τὸ κεφάλαιον τοῦ πρὸς δοκιμὴν δοθέντος ἀριθμοῦ σύγκηται ἐξ 11, καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ διαιρεθῇ διὰ τῶν 11 ἐπίσης.

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, ὄντες πολλαπλοῖ τῶν 11, διαιροῦνται δι' αὐτῶν ἅπαντες ἐξ ἴσου, τὸ ὁποῖον μᾶς δεικνύει ἡ ἀφαίρεσις· διότι ἀφαιροῦντες 2 ἐκ 2· 3 ἐκ 3 καὶ ἐφεξῆς, μένει μηδέν. Τοὺς ἐπέκεινα τῶν 100 πολλαπλοῦς Ἀριθμοὺς τῶν 11 ὅμως, μὴ δυνάμενοι νὰ τοὺς διακρίνωμεν εὐθύς, ἐὰν διαιρῶνται διὰ τῶν 11 ἐπίσης, μεταχειριζόμεθα εἰς αὐτοὺς τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς ἀνωτέρω.

§. 199.

Σχόλιον. Ὅτι ἡ ῥηθεῖσα ἀφαίρεσις γίνεται μὲ ὀρθὸν λόγον, δυνάμεθα σαφέστερον πληροφορηθῆναι, ἐὰν καταστρώσωμεν ἐν τάξει τὰ ὑπόλοιπα τοῦ ἀριθμοῦ 58652 (ὡς §. 198.), καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ μὲ 11, ὅπου θέλει προκύψη Πηλίκον ὁ ἴδιος Ἀριθμὸς 58652. Οἷον· τὸ πρῶτον ψηφίον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ δεξιῶς, εἶναι 2, ὅ ἐστι, 2 Μονάδες· τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον 3, ἤτοι 3 Δεκάδες· τὸ τρίτον ὑπόλοιπον 3, ἤτοι 3 Ἑκατοντάδες· καὶ τὸ τέταρτον ὑπόλοιπον 5, ἤτοι 5

Χιλιάδες· ὁμοῦ δὲ 5332, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιαζόμενα μὲ 11, προκύπτει ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς 58652.

§. 200.

Σημεῖα τῶν Διαιρέτων 12, 14, 15, 16 καὶ τῶν ἐφεξῆς.

Δι' ὅλους τοὺς τοιούτους Ἀριθμοὺς, οἵτινες εἰσὶ Κεφάλαια μοναδικῶν ψηφίων, δὲν εἶναι ἀναγκαῖοι ἕτεροι χωριςοὶ Κανόνες· διότι ἅπας Ἀριθμὸς, ὅστις διὰ 3 καὶ διὰ 4 ἐξ ἴσου διαιρεῖται (τὸ ὁποῖον διακρίνομεν ἐκ τῶν προδοθέντων Σημείων τῶν αὐτῶν), διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν 12 ἐπίσης, ὡς τὸ Παραγόμενον ἐκ 3 × 4. Ὁμοίως παράγονται τὰ 16 ἐκ 2 × 8 καὶ ἐφεξῆς· ὅθεν ὅλοι οἱ Ἀριθμοὶ, οἵτινες διαιροῦνται ἐξ ἴσου διὰ τῶν 2 καὶ διὰ τῶν 8, διαιροῦνται ὡσαύτως καὶ διὰ τοῦ Παραγομένου αὐτῶν, εἴτουν διὰ τῶν 16 ἐπίσης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐν γένει δὲν εἶναι ἀναγκαῖον, ἵνα σμικρύνωμεν διὰ μιᾶς διὰ τοῦ μεγίςου Διαιρέτου, ἀλλ' ὀλίγον κατ' ὀλίγον, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται εὐκολώτερον καὶ ταχύτερον. Φέρ' εἰπεῖν· τὸ κλάσμα $\frac{75}{90}$ σμικρύνεται ἐν μιᾷ διὰ τῶν 15. πλὴν ἐπειδὴ δὲν διακρίνομεν αὐτὸ εὐθὺς, ὡς τὸ Σημεῖον τῶν 5 καὶ 3, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν πρότερον μὲ 5, καὶ προκύπτουσι $\frac{15}{18}$, καὶ ἰδοὺ βλέπομεν, ὅτι αὐτὸ τὸ νέον Κλάσμα διαιρεῖται ἐπομένως μὲ 3, καὶ προκύπτει τὸ μικρότατον $\frac{5}{6}$.

§. 201.

Σημείωσις. Διὰ τοὺς λοιποὺς ἀριθμοὺς ὑπὲρ 11, οἵτινες δὲν παράγονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μοναδικῶν ψηφίων, ἀλλ' εἰσὶν Αὐτοπαράγοντες, καὶ ἐπομένως δὲν ἔχουσι Παράγοντας, ὡς· 13, 17, 19, 23, 29 καὶ ἐφεξῆς (μεταξὺ αὐτῶν δυνάμεθα συναριθμῆσαι καὶ τὰ 7, ἐπειδὴ ἡ εὕρεσις τοῦ Σημείου των ἐμποδίζει περισσότερον, παρ' ὅσον ὠφελεῖ, διὰ τοῦτο ἂς γίνηται ἡ δοκιμὴ ἀμέσως διὰ τῶν 7, ἐὰν ὁ προκείμενος Ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ ἐπίσης), δὲν ὑπάρχουσιν ἕτερα Σημεῖα, εἰμὴ ὁ ἑπόμενος γενικὸς Κανών, τὸν ὁποῖον μεταχειριζόμεθα εἰς τοὺς διὰ τῶν μέχρι τοῦδε δοθέντων Σημείων ἀδιαιρέτους Ἀριθμούς.

§. 202.

Γενικὸς Κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ Διαιρέτου, ὅπου δὲν ἐξαρκοῦσι καὶ αὐτοὶ οἱ δοθέντες Κανόνες.

Πάμπολλοι Ἀριθμοὶ ὑπάρχουσιν, οἵτινες ἐξ ἴσου διαιροῦνται, χωρὶς νὰ ἐρευνήσωμεν διὰ τῶν μέχρι τοῦδε δοθέντων Κανόνων, τίς ἐςιν ὁ Διαιρέτης αὐτῶν. Ὅθεν διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ ειπῶμεν μὲ βεβαιότητα εἰς κάθε πτῶσιν, ἐὰν δύο ὁποιοιδήποτε προκείμενοι Ἀριθμοὶ ἔχωσι κοινὸν Διαιρέτην, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑπόμενον Κανόνα.

α'. Διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον Ἀριθμὸν διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἐὰν γένῃ ἡ διαίρεσις ἐπίσης, ἔσεται ὁ μικρότερος κοινὸς Διαιρέτης· β'. ἐὰν ὅμως ἐν τῇ διαιρέσει μείνῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου τὸν Διαιρέτην, καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, διαιροῦντες πάντοτε διὰ τοῦ ἑκάςην φορὰν προκύπτοντος ὑπολοίπου τὸν Διαιρέτην, ἐξ οὗ προέκυψεν αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον, ἄχρις οὗ νὰ γένῃ ἡ διαίρεσις ἐξ ἴσου· ὁ τελευταῖος οὖν Διαιρέτης, δι' οὗ ἡ διαίρεσις ἔγινεν ἐπίσης, ἔσεται ὁ κοινὸς Διαιρέτης ἀμφοτέρων τῶν Ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ ὁ τελευταῖος Διαιρέτης εἶναι 1, δῆλον, ὅτι καὶ οἱ Ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσιν ἕτερον κοινὸν Διαιρέτην, εἰμὴ τὸ 1, ὅ ἐςὶν, οὐδ' ἕνα· διότι τὸ 1 εἶναι κοινὸν ἑκάςου Ἀριθμοῦ, καὶ ὡς ἦν γνωςὸν, οὔτε αὐξάνει, ἀλλ' οὔτε σμικρύνει κἀνένα Ἀριθμόν. Τὰ ἑπόμενα Ὑποδείγματα θέλει σαφηνίσουσιν αὐτὸν τὸν Κανόνα.

Α΄. Ὅπου ἡ πρώτη Διαιρέσις γίνεται ἐπίσης.

Θετέον· μᾶς ἐδόθη νὰ δοκιμάσωμεν, ἄν, καὶ διὰ τίνος Ἀριθμοῦ σμικρύνηται τὸ κλάσμα $\frac{79}{474}$· λοιπὸν διαιροῦμεν, κατὰ τὸν Κανόνα, διὰ τοῦ μικροτέρου Ἀριθμοῦ 79 τὸν μεγαλήτερον 474, καὶ ἐπειδὴ ὁ 79 ἐμπεριέχεται ἐπίσης εἰς τὸν 474 ἑξάκις, ἄρα 79 εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, δι' οὗ σμικρύνονται ὅτε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς· διότι ἕκαςος Ἀριθμὸς ἐμπεριέχεται ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ, λοιπὸν καὶ ὁ 79 εἰς τὸν 79 ἐμπεριέχεται ἅπαξ· εἰς τὸν 474 ὅμως ἐμπεριέχεται ἑξάκις (ὡς ἡ διαίρεσις δεικνύει), ὅθεν τὸ ἐλαττωθὲν Κλάσμα εἶναι $\frac{1}{6}$.

Β΄. Ὅπου ἡ πρώτη Διαίρεσις δὲν γίνεται ἐπίσης.

Φέρ' εἰπεῖν· θέλομεν νὰ δοκιμάσωμεν, ἄν, καὶ διὰ τίνος Ἀριθμοῦ ἐλαττοῦται τὸ Κλάσμα $\frac{391}{552}$· λοιπὸν διαιροῦμεν, κατὰ τὸν Κανόνα, ὡς ἑπομένως.

α΄. Διαιρ΄. 391 εἰς 552 | 1. Παραγ΄. α΄.
391
β΄. Διαιρ΄. 161 Ὑπόλ., εἰς 391 | 2 Παραγ΄. β΄.
322
γ΄. Διαιρ΄. 69 Ὑπέλ. εἰς 161 | 2 Παραγ΄. γ΄.
138
δ΄. Διαιρ΄. 23 Ὑπ΄. εἰς 69 | 3 Πα. δ΄.
69
0

Δεῖξις. Πρῶτον διαιροῦμεν, ὡς εἰς τὸ Α΄. Ὑπόδειγμα, διὰ τοῦ Ἀριθμοῦ 391 τὸν 552, καὶ μένει ὑπόλοιπον 161· δι᾽ αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν πάλιν τὸν Διαιρέτην 391 (ἐξ οὗ προέκυψε τὸ ὑπόλοιπον 161), καὶ μένει ὑπόλοιπον 69· δι᾽ αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν αὖθις τ᾽ ἄνωθεν 161, καὶ μένει ὑπόλοιπον 23· δι᾽αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν πάλιν τ᾽ ἄνωθεν 69, καὶ μένει ὑπόλειπον μηδέν· ἐπειδὴ λοιπὸν διὰ τῶν 23 ἔγινεν ὁμοία διαίρεσις, ἐσμὲν βέβαιοι, ὅτι ὁ 23 Ἀριθμὸς εἶναι ὁ κοινὸς Διαιρέτης, δι᾽ οὗ ὅ,τε Ἀριθμητὴς 391 καὶ ὁ Παρονομαςὴς 552 ἐπίσης διαιροῦνται· ἐπειδὴ δὲ τὰ 23 εἰς τὰ 391 ἐμπεριέχονται 17 φοραῖς· εἰς τὰ 552 ὅμως 24 φοραῖς, προκύπτει τὸ εἰς τοὺς πλέον ἐλαχίςους Ἀριθμοὺς σμικρυνθὲν Κλάσμα $\frac{17}{24}$.

Γ. Ὅπου προκύπτει ὁ τελευταῖος Διαιρέτης 1.

Πρόβλημα. Ἄρα ἐλαττοῦται τὸ κλάσμα $\frac{83}{178}$, καὶ τίς ἐςὶν ὁ Διαιρέτης αὐτοῦ; Οὐχί· διότι αὐτοὶ οἱ δύο Ἀριθμοὶ ἔχουσι διὰ κοινὸν Διαιρέτην μόνον τὸν ἀριθμὸν 1, ὡς δεικνύει ἡ ἑπομένη Λύσις, ὅτι ὁ τελευταῖος Διαιρέτης, δι᾽ οὗ ἡ διαίρεσις γίνεται ἐπίσης, ὁ 1 ἐςὶν, ὅστις, ὡς γνωςὸν, εἶναι κοινὸς ἑκάςου Ἀριθμοῦ, καὶ ἑπομένως δὲν δύναται οὔτε νὰ αὐξήσῃ, ἀλλ᾽ οὔτε νὰ σμικρύνῃ κἀνένα Ἀριθμὸν, ὡς.

α'. 83 εἰς 173 | 2
146
β'. 27 εἰς 83 | 2
54
γ'. 19 εἰς 27 | 1
19
δ'. 8 εἰς 19 | 2
16
ε'. 3 εἰς 8 | 2
6
ς'. 2 εἰς 3 | 1
2
ζ'. 1 εἰς 2 | 2
2
0

ΚΕΦ. Ε'.

Περὶ Ἀθροισμοῦ τῶν Κλασμάτων.

§. 203.

Ὁ Ἀθροισμὸς τῶν Κλασμάτων διδάσκει, τίνι τρόπῳ δυνάμεθα ἀθροίζειν περισσότερα Κλάσματα ὁμοῦ, τὸ δὲ Κεφάλαιον αὐτῶν (ἔσω Ἀκέραιον ἢ Κλασματικὸν), νὰ προφέρωμεν δι' ἑνὸς καὶ μόνου Ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ, ὡς γνωςὸν, μόνον ὁμοειδεῖς Ἀριθμοὶ, ὃ ἐςὶ, τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ ὀνομασίας,