ῥίζαντης τὰ 24. ϗ γίνονται 11448. ϗ ἕνα ἡ κορυφὴ γίνονται 11449. ϗ πάλιν ἔπαρε ϗ τὴν ἄλλην ῥίζαν τοῦ μερισμοῦ, ἤγουν τὰ 4. ϗ πολυπλασίασε ταῖς 11449. ϗ γίνονται 45796. ϗ τόσος ἔγινεν ὁ μεριζόμενος ποσὸς μοιράσει γοῦν ϗ ταῖς 45796 μὲ τὸν μεριστὴν, ταῖς 2568 ϗ εὐγαίνουν 17 $\frac{2140}{2568}$ ἤγουν $\frac{5}{6}$ ϗ εἶναι σωστὸς ὁ ἄνωθεν πολυπλασιασμός.

477 $\frac{3}{24}$ μὲ 26 $\frac{3}{4}$

11449 107

24 4

45796 2568

214
0669
20220
45796 | 17 $\frac{2140}{2568}$ ἤγουν $\frac{5}{6}$
25688
256

Ἕτερος πολυπλασιασμὸς ἀκέραια, μὲ ἀκέραια ϗ τζάκισμα.
Κεφάλαιον. λζ.

Θέλεις ἂν ἔχεις νὰ πολυπλασιάσῃς ἀκέραια, μὲ ἄλλα ἀκέραια ϗ τζάκισμα, ποίησον οὕτως. πολυπλασίασον πρῶτον ἐκεῖνο τὸ μέρος ποῦ ἔχει τὸ τζάκισμα μὲ τὴν ῥίζαν του, ϗ πρόσθες ϗ τὴν κορυφήν του. ἔπειτα πολυπλασίασον τὰ δύο μέρη, καὶ μέρισε μὲ τὴν ῥίζαν, ϗ ὅτι εὐγῇ τόσον ἔγινεν. Τὸ λοιπὸν θέλομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν 148 μὲ 25 $\frac{1}{2}$ καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 25 μὲ τὰ 2 τὴν ῥίζαν ϗ γίνονται 50 καὶ ἕνα ἡ κορυφὴ γίνονται 51 πάλιν πολυπλασιάζομεν τὰ 148 μὲ τὰ 51 καὶ γίνονται 7548 ϗ αὐτὰ τὰ μερίζομεν μὲ τὰ 2. ἤγουν μὲ τὴν ῥίζαν καὶ εὐγαίνουν 3774 καὶ τόσα ἔγιναν.

Παράδειγμα γ.

148 πρὸς 25 $\frac{1}{2}$

51 51

148

740

7548

00
2200 |
7548 | 3774
2222

Ἕτερος μερισμὸς ἀκέραια μὲ ἀκέραια καὶ τζάκισμα, ϗ ἡ δοκιμὴ τοῦ ἄνωθεν πολυπλασιασμοῦ. Κεφ. λη.

Ὁμοίως πάλιν ἂν θέλῃς νὰ μερίσῃς ἀκέραια, μὲ ἀκέραια ϗ τζάκισμα ποίησον οὕτως. πολυπλασίασον πρῶτον τὸ μέρος ποῦ ἔχει τὸ τζάκισμα μὲ τὴν ῥίζαν του, ϗ πρόσθες ϗ τὴν κορυφήν του. ϗ πάλιν πολυπλασίασον μὲ αὐτὴν τὴν ῥίζαν ϗ τὸ ἄλλο μέρος ἔπειτα μέρισε. ϗ ὅτι εὐγῇ αὐτὸ εἶναι. Τὸ λοιπὸν θέλομεν νὰ μερίσωμεν ταῖς 3774 μὲ τὰ 25 $\frac{1}{2}$ διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν, τοῦ ἄνωθεν πολυπλασιασμοῦ, ϗ πολυπλασιάζομεν

Παράδειγμα δ.

ζομεν τὸ 25 μὲ τὰ 2 γίνονται 50 καὶ ἕνα ἡ κορυφὴ γίνονται 51 πάλιν πολυπλασιάζομεν καὶ τὰς 3774 μὲ τὰ 2 ἤγουν μὲ τὴν ῥίζαν. καὶ γίνονται 7548 αὐτὰ γοῦν τὰ μερίζομεν μὲ τὸν μεριστὴν, ἤγουν μὲ τὰ 51 καὶ εὑρίσκου 148 καὶ εἶναι σωστὸς ὁ ἄνωθεν πολυπλασιασμός· ἢ ἐὰν ἔχομεν νὰ μερίσωμεν ἄσπρα 3774 εἰς 25 $\frac{1}{2}$ μερτικὰ, ἐπῆρεν τὸ κάθε μερτικὸν ἄσπρα 148 ὡσὰν βλέπῃς εἰς τὰ ψηφία.

3774 μὲ 25 $\frac{1}{2}$
2 | 51
7548

000
2400
7848 | 148
8xxx
88

Ἕτερος πολυπλασιασμὸς, ἀκέραια μὲ τζάκισμα μόνον. Κεφ. λθ'.

Πάλιν ἂν θέλῃς νὰ πολυπλασιάσῃς ἀκέραια μὲ τζάκισμα μόνον, ποίησον οὕτως, πολυπλασίασον τὰ ἀκέραια μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ τζακίσματος, καὶ τὰ μέρισε μὲ τὴν ῥίζαν, καὶ εἴτι εὕγῃ αὐτὸ εἶναι θετέον. λέγομεν ὅτι ἠγοράσαμεν πήχεις πανὶ 245 πρὸς $\frac{2}{3}$ τοῦ ἄσπρου τὴν κάθε πήχυν τί χρειαζοῦμεν νὰ δώσωμεν. Θέλομεν γοῦν νὰ πολυπλασιάσωμεν τὰ 245 μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 245 μὲ τὰ 2 ἤγουν τὴν κορυφὴν τοῦ τζακίσματος καὶ γίνονται 490 καὶ αὐτὰ τὰ μερίζομεν μὲ τὴν ῥίζαν, ἤγουν μὲ τὰ 3 καὶ εὑγαίνει 163 $\frac{1}{3}$ καὶ τόσα χρεωστοῦμεν νὰ πληρώσομεν. Καὶ διατί ὅταν πολυπλασιάζομεν πληθαίνει ἡ ὁμάδα, καὶ ἐδὼ ὀλιγοστεύει, λέγομεν δὲ ὅτι ἂν ἠθέλαμεν πληρώσει τὸ πανὶ ἀπὸ ἕνα ἄσπρον τὴν κάθε πήχυν, ἐτύχαινε νὰ δώσωμεν ὅσες πήχες εἶτον τόσα ἄσπρα, τὸ λοιπὸν ἡμεῖς τὸ ἐπληρώσαμεν ὀλιγότερον παρὰ ἕνα ἄσπρον τὴν κάθε πήχυν καὶ διατοῦτο ἦλθαν καὶ τὰ ἄσπρα ὀλιγότερα.

Παράδειγμα, δ'.

Ἐρώτησις

Ἀπόκρισις.

245 μὲ $\frac{2}{3}$
2
490

00
xx1
490 | 163 $\frac{1}{3}$
333

Ἀκόμι ἠξεύρε ὅτι αὐτὸς ὁ λογαριασμὸς γίνεται ἐὰν εἴπωμεν ὅτι θέλομεν νὰ πάρομεν τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τὰ 245 ἄσπρα.

Ἕτερος μερισμὸς ἀκέραια καὶ τζάκισμα, μὲ τζάκισμα, καὶ ἡ δοκιμὴ τοῦ ἄνωθεν πολυπλασιασμοῦ. Κεφ. μ'.

Ἂν θέλῃς νὰ μερίσῃς ἀκέραια καὶ τζάκισμα, μὲ ἄλλον τζάκισμα, ποίησον οὕτως. πολυπλασίασον τὰ ἀκέραια μὲ τὴν ῥίζαν του. καὶ πρόσθες καὶ τὴν κορυφήν του. ἔπειτα ἔπαρε καὶ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος, ἤγουν τοῦ μερισοῦ, καὶ τὰ πολυπλασίασον. καὶ πάλιν ἔπαρε τὴν ῥίζαν τοῦ μεριζομένου ποσοῦ καὶ πολυπλασίασον τὴν κορυφὴν τοῦ τζακίσματος, ἤγουν τοῦ μερισοῦ. ἔπειτα μοίρασε. καὶ εἴτι εὕγη τόσον εἶναι. Τὸ λοιπὸν θέλομεν νὰ μερίσομεν τὰ 163 $\frac{1}{3}$ μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ ἄνωθεν πολυπλασιασμοῦ. καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ ἀκέραια μὲ τὴν ῥίζαν τους, ἤγουν τὰ 163 μὲ τὰ 3. καὶ γίνονται 489 καὶ ἕνα ἡ κορυφὴ γίνονται 490. καὶ αὐτὰ εἶναι τρεῖς. ἔπειτα πέρνομεν καὶ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος, ἤγουν τὰ 3 καὶ τὰ πολυπλασιάζομεν πάλιν μὲ τὰ 490 καὶ γίνονται 1470 καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ μεριζόμενος ποσός. ἔπειτα πέρνομεν τὴν ῥίζαν τῆς ὁμάδος, ἤγουν τὰ 3 καὶ πολυπλασιάζομεν τὴν κορυφὴν τοῦ τζακίσματος ἤγουν τὰ 2 καὶ γίνονται 6 καὶ αὐτὰ εἶναι ὁ μεριστής. τώρα μερίζομεν τὰ 1470 μὲ τὰ 6 καὶ εὑγαίνουν 245. αὐτὰ εἶναι σωστὴ ἡ δοκιμή.

Παράδειγμα, δ'.

163 $\frac{1}{3}$ —— μὲ $\frac{2}{3}$ 00

490 $\frac{2}{3}$ 0220

3 3 1470 | 245

ὁ μεριζόμενος. 1470 6 | ὁ μεριστής. 666

Ἐρώτησις.

Καὶ διατί ὅταν μερίζομεν εὑγαίνει πάντα ὀλιγότερον τὸ μέρος ἀπὸ τὴν ὁμάδαν, καὶ ἐδῶ ἐμερίσαμεν, καὶ εὐγῆκεν περισσότερον τὸ μέρος ἀπὸ τὴν ὁμάδαν, ἤγουν ἀπὸ τὸν μεριζόμενον ποσόν. Λέγομεν, ὅτι ἐὰν τινὰς ἄνθρωπος εἶχεν νὰ μερίσῃ ἄσπρα 163 $\frac{1}{3}$ ἀπὸ ἕνα ἄσπρον εἰς τὸ κάθε μερτικὸν χρεία ἦτον νὰ ἔλθουν, 163 μερτικὰ πάλιν καὶ ἕνα τρίτον τὸ λοιπὸν ἡμεῖς τὰ ἐμερίσαμεν, μὲ ὀλιγότερα ἤγουν μὲ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀκεραίου, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι χρεία νὰ ἔλθουν περισσότερα, τὰ μερτικὰ ὡσὰν βλέπεις καὶ εὐγῆκαν εἰς τὸν μερισμόν.

Ἀπόκρισις.

Ἕτερος πολυπλασιασμὸς ἀκέραια καὶ τζάκισμα, μὲ τζάκισμα.

Κεφάλαιον. μα'.

Ὁμοίως ἂν θέλῃς νὰ πολυπλασιάσῃς. ἀκέραια καὶ τζάκισμα, μὲ τζάκισμα ποίησον πάλιν οὕτως. πολυπλασίασον τὰ ἀκέραια μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος καὶ πρόσθες καὶ τὴν κορυφήν του, καὶ ὅσα γίνουν πάλιν τὰ πολυπλασίασον μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ ἄλλου τζακίσματος. καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ μεριζόμενος ποσός. ἔπειτα πολυπλασίασον καὶ τὰς δύο ῥίζας τῶν τζακισμάτων, καὶ εἴτι εὕγη εἶναι ὁ μεριστής. μέρισε γοῦν τὴν ὁμάδα μὲ τὸν μεριστὴν καὶ εἴτι εὕγη τόσον εἶναι. Τὸ λοιπὸν ἔχομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν, 247 $\frac{2}{3}$ πρὸς $\frac{5}{6}$ καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 247 μὲ τὰ τρία ῥίζαν τους καὶ γίνονται 741. καὶ 2 ἡ κορυφὴ γίνονται 743 πέρνομεν καὶ τὴν κορυφὴν τοῦ ἄλλου τζακίσματος. ἤγουν τὰ 5 καὶ τὰ πολυπλασιάζομεν αὐτὰ τὰ 743 καὶ γίνονται, 3715 καὶ τόσον ἔγινεν ὁ μεριζόμενος ποσός. ἔπειτα πολυπλασιάζομεν.

Παράδειγμα, ε'.

ζομεν ταῖς δύο ῥίζες κὴ λέγομεν 3 οἱ 6 γίνονται 18 καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ μεριστής. τώρα μερίζομεν ταῖς 3715 μὲ τὰ 18 καὶ εὐγαίνει 206 $\frac{7}{18}$ καὶ βλέπεις εἰς τὰ ψηφία, καὶ τόσον εἶναι.

247 $\frac{2}{3}$ πρὸς $\frac{5}{6}$ 000

743 —— 5 1187

3 —— 6 3718 | 206 $\frac{7}{18}$

ὁ μεριζόμενος. 3715 | 18. ὁ μεριστής. 1888

11

Ἀκόμι ἤξευρε ὅτι ἂν ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{5}{6}$ τῶν 247 $\frac{2}{3}$ ἢ καὶ ἄλλων μέρων γίνεται οὕτως, ὡς ἄνωθεν.

Ἀκόμι μερίζομεν τὰ 206 $\frac{7}{18}$ μὲ τὰ $\frac{5}{6}$ διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ἄνωθεν δοκιμήν, κὴ εὐγῆκαν 247 $\frac{2}{3}$ καὶ εἶναι σωστὴ ὡσὰν βλέπης εἰς τὰ ψηφία. Παράδειγμα, ε΄.

206 $\frac{7}{18}$ μὲ $\frac{5}{6}$ 00

3715 ╳ 5 01 46

18 ╳ 6 22290 | 247 $\frac{2}{3}$

ὁ μεριζόμενος. 22290 | 90. ὁ μεριστής. 9000

99

Ἕτερος μερισμὸς ἀκέραια μὲ τζάκισμα. Κεφ. μβ΄.

Θετέον ἔχεις νὰ μερίσης ἀκέραια μὲ τζάκισμα. ποίησον οὕτως πολυπλασίασον τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος μὲ τὰ ἀκέραια, κὴ ἔπειτα γένουν τὰ μέρισε μὲ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ, κὴ ὅσα εὔγουν τόσα εἶναι. Θετέον ἔχομεν νὰ μερίσωμεν ἄσπρα 464 μὲ $\frac{5}{8}$ κὴ τὰ πολυπλασιάζομεν μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος, ἤγουν μὲ τὰ 8 κὴ γίνονται 3712. κὴ αὐτὰ τὰ μερίζομεν μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ τζακίσματος, ἤγουν μὲ τὰ 5 κὴ εὐγαίνουν 742 $\frac{2}{5}$, καὶ τόσοι εἶναι. κὴ ἂν θέλης νὰ κάμης τὴν δοκιμὴν πολυπλασίασον πάλιν τὰ 742 $\frac{2}{5}$ μὲ τὰ $\frac{5}{8}$ καὶ ἂν εὔγουν 464 εἶναι σωστή εἰ δὲ καὶ δὲν εὔγουν τόσον ξανὰ κάμετην. Παράδειγμα, ϛ΄.

464 μὲ $\frac{5}{8}$ 0

8 020

3712 3712 | 742 $\frac{2}{5}$

555

Τὸ λοιπὸν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 742 $\frac{2}{5}$ μὲ τὰ $\frac{5}{8}$ κὴ εὐγῆκαν 464 κὴ εἶναι σωστὴ ὡσὰν βλέπης κὴ εἰς τὰ ψηφία.

742 $\frac{2}{5}$ μὲ $\frac{5}{8}$ 00

371 $\frac{2}{5}$ ——— $\frac{5}{48}$ 0210 |

18560 | 40 18560 | 464

4000

44

Ἔτερος πολυπλασιασμὸς τζάκισμα, μὲ τζάκισμα.

Κεφ. μγ΄.

Ἀκόμι ἂν ἔχης νὰ πολυπλασιάσης τζάκισμα μὲ ἄλλον τζάκισμα,
Παράδειγμα, ζ΄. ποίησον οὕτως. πολυπλασίασον τὴν κορυφὴν τοῦ ἑνὸς τζακίσματος, μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ ἄλλου, καὶ εἴτι εὔγη τὰ γράψε ἔπειτα πάλιν
1 —— 3 πολυπλασίασον καὶ τὰς δύο ῥίζας καὶ εἴτι εὔγη τὰ γράψε ὑποκάτω, καὶ ὅσα
4 —— 8 γίνου τόσον εἶναι. Θετέον ἔχομεν νὰ πολυπλασιάσομεν $\frac{1}{4}$ μὲ $\frac{3}{8}$ καὶ πολυπλασιάζομεν τὴν κορυφὴν τοῦ ἑνὸς, τζακίσματος μὲ τοῦ ἄλλου τζακίσματος ἤγουν τὰ 3 μὲ τὸ ἕνα καὶ γίνονται 3 καὶ αὐτὰ τὰ γράφομεν. ἔπειτα
3
32 πάλιν πολυπλασιάζομεν, καὶ ταῖς δύο ῥίζαις καὶ λέγομεν 4 οἱ 8 γίνονται
Σημείωσαι 32 καὶ τὰ γράφομεν ὑποκάτω εἰς τὰ 3 καὶ ἔγιναν $\frac{3}{32}$ ἤγουν τρία τῶν τριαντα-δύο. Εἶναι τινὲς ὁποῦ ἔχουν δίστασιν εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν δύο τζακισμάτων ἔσοντας ὅτι ὅταν πολυπλασιάζουσιν τζάκισμα μὲ ἄλλο τζάκισμα ὀλιγοστεύει πολλά. καὶ ὅσοι δὲν ἠξεύρουν τὴν θεωρίαν τῆς μεθόδου λέγουσι, ὅτι αὐτὴ ἡ μέθοδος. δὲν εἶναι σωστή. ἡμεῖς λέγομεν ὅτι ἡ μέ-
Ἀπόδειξις, α΄. θοδος αὐτὴ εἶναι σωστὴ ὡσὰν καὶ ταῖς ἄλλαις μέθοδες. καὶ ἐὰν δὲν ἦτον σωστὴ δὲν ἤθελαν τὴν ἔχουν οἱ παλαιοὶ οὐδὲ οἱ διδάσκαλοι ἡμῶν. πλὴν τοῦτο λέγομεν διὰ νὰ καταλάβη ὁ κάθε εἷς τὴν θεωρίαν τῆς μεθόδου. κατὰ λόγον ἡμεῖς ἐπολυπλασιάσαμεν ἄνωθεν $\frac{1}{2}$ μὲ $\frac{3}{8}$ ἔγιναν $\frac{3}{32}$ καὶ αὐτὸ εἶναι πολλὰ ὀλιγότερον παρὰ τὸ ἕνα τέταρτον. τὸ λοιπὸν λέγομεν ὅτι ἠγοράσαμεν πανὶ $\frac{1}{4}$ τῆς πήχης ἀπὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἄσπρου τὴν κάθε πῆχυν, τί χρεωστοῦμεν. νὰ πλη-
1 —— 1 ρώσωμεν. λέγομεν ὅτι ἡ μία πῆχυ τὸ πανὶ ἔχει $\frac{3}{8}$ τοῦ ἄσπρου, ἡ $\frac{1}{2}$ πῆχυ
2 —— 2 εἶναι χρεία νὰ ἔχη τὰ μισὰ τῶν $\frac{3}{8}$ ἤγουν $\frac{3}{16}$ τὸ λοιπὸν αὐτὸ εἶναι ἕνα τέταρτον ποῦ εἶναι μισὸν ἀπὸ τὴν μισὴν πῆχυν, χρεία εἶναι νὰ ἔχη ἡ τιμή του τὰ
1 μισὰ τῶν $\frac{3}{16}$, καὶ τὰ μισὰ τῶν $\frac{3}{16}$ εἶναι $\frac{3}{32}$ ὡσὰν εὐγῆκεν καὶ εἰς τὴν μέθοδον
4 ἄνωθεν. Καὶ πάλιν λέγομεν ὅτι ἠγοράσαμε $\frac{1}{2}$ πῆχυ πανὶ ἀπὸ $\frac{1}{2}$ ἄσπρο
Ἀπόδειξις, β΄. τὴν κάθε πῆχυν τί χρεωστοῦμεν νὰ δώσωμεν. πολυπλασιάζομεν καὶ αὐτὰ τὰ δύο τζακίσματα ὡς ἄνωθεν καὶ εὐγαίνει $\frac{1}{4}$ καὶ αὐτὸ χρεωστοῦμεν. καὶ πάλιν λέγομεν καὶ ἰδὼ ὅτι ἐὰν ἡ μία πῆχυ εἶχεν κουκκία 4 ποῦ εἶναι μισὸν ἄσπρον, χρεία εἶναι ἡ μισὴ πῆχυ νὰ ἔχει κουκκία 2 ποῦ εἶναι ἕνα τέταρτον τοῦ ἄσπρου, καὶ πάλιν ἐὰν ἡ μία πῆχυ εἶχε τιμὴ $\frac{1}{2}$ ἡ μισὴ χρεία εἶναι νὰ ἔχει τὰ μισὰ τοῦ μισοῦ ποῦ εἶναι $\frac{1}{4}$ ὡσὰν εὐγῆκεν καὶ εἰς τὰ ψηφία. καὶ ἰδοῦ ποῦ
Σημείωσαι ἀποδείξαμεν, ὅτι εἶναι σωστὴ ἡ μέθοδος. Ἀκόμι ἠξεύρε ὅτι ἡ δοκιμὴ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τῶν δύο τζακισμάτων εἶναι ὁ μερισμὸς τῶν δύο τζακισμάτων. καὶ ἂν θέλης νὰ κάμης τὴν δοκιμὴν μέρισε ἐκεῖνο ποῦ εὐγῆκεν μὲ τὸ ἕνα μέρος, καὶ ἂν εὔγη ὡσὰν τὸ ἄλλον, εἶναι σωστὴ εἰδὲ, ξανὰ κάμε-την.

Μερισμὸς τζάκισμα μὲ τζάκισμα, καὶ ἡ δοκιμὴ τοῦ ἄνωθεν πολυπλασιασμοῦ. Κεφ. μδ΄.

Ἀκόμι ἂν θέλῃς νὰ μερίσῃς τζάκισμα, μὲ τζάκισμα, ποίησον οὕτως· βάλε εἰς τὴν ζερβὴν μερίαν τὸ μεριζόμενον, ἤγουν τὸ τζάκισμα ποῦ θέλεις νὰ μερίσῃς· καὶ τὸν μεριστὴν βάλε δεξιά, ἤγουν τὸ τζάκισμα ποῦ θέλῃς νὰ μερίσῃς τὸ ἄλλο τζάκισμα· ἔπειτα πολυπλασίασον τοῦ δεξιοῦ χειρὸς τὴν ῥίζαν, ἤγουν τοῦ μεριστοῦ, μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ μεριζομένου, καὶ εἴτι γίνουν τόσον ἔναι ὁ μεριζόμενος ποσὸς καὶ τὰ γράψε. ἔπειτα πολυπλασίασον καὶ τὴν ῥίζαν τοῦ μεριζομένου μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ μεριστοῦ καὶ ὅσα γίνουν τὰ γράψε ὑποκάτω τοῦ μεριζομένου καὶ αὐτὸς ἔναι ὁ μεριστής. καὶ εἰ μὲν εἶναι ὁ μεριστὴς ὀλιγότερα παρὰ τὸν μεριζόμενον μέρισε, καὶ εἴτι εὕγῃ τόσον ἔναι, εἰδὲ καὶ ἔναι περισσότερα ἄφες το οὕτως καὶ ἔναι τζάκισμα. τὸ λοιπὸν θέλομεν νὰ μερίσωμεν $\frac{3}{32}$ μὲ $\frac{1}{4}$ διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ ἄνωθεν πολυπλασιασμοῦ. καὶ τὰ στρώνομεν εἰς τὴν τάξιν τους, ἔπειτα πολυπλασιάζομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεριστοῦ τὰ 4 μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ μεριζομένου, ἤγουν τὰ 3 καὶ γίνονται 12 καὶ αὐτὰ τὰ γράφομεν, ἔπειτα πάλιν πολυπλασιάζομεν τὴν κορυφὴν τοῦ μεριστοῦ, ἤγουν τὸ 1 μὲ τὰ 32 καὶ λέγομεν μία φορὰ 32 γίνονται 32 καὶ αὐτὰ τὰ γράφομεν ὑποκάτω εἰς τὰ 12 καὶ τόσον ἔγινεν τὸ τζάκισμα. ἤγουν $\frac{12}{32}$ τώρα λέγομεν τὸ τέταρτον τῶν 12 ἔναι 3 καὶ τὸ τέταρτον τῶν 32 ἔναι 8 καὶ ἰδοὺ ποῦ ηὕγῆκαν $\frac{3}{8}$ καὶ ἔναι σωστή· ἀκόμι ἠξεύρε ὅτι ἡ δοκιμὴ τοῦ ἄνωθεν μερισμοῦ ἔναι ὁ πολυπλασιασμός, ὡσὰν ἔναι καὶ ὁ μερισμὸς τοῦ πολυπλασιασμοῦ. Ἔχουσι τινὲς καὶ εἰς τὸν μερισμὸν τῶν δύο τζακισμάτων δίστασιν διατὶ λέγουσιν ὅταν μερίζουν ηὕγαίνῃ τὸ μέρος ὀλιγότερον παρὰ τὸ μεριζόμενον ποσόν, καὶ αὐτὸ ἔναι ἐναντίον τοῦ μερισμοῦ, ὡσὰν κατὰ λόγον ποῦ ἐμερίσαμεν ἄνωθεν τὰ $\frac{3}{32}$ καὶ ηὕγῆκεν $\frac{3}{8}$ ποῦ ἔναι περισσότερον πολλὰ παρὰ τὰ $\frac{3}{32}$. Λέγομεν καὶ αὐτοὺς ὅτι δὲν ἔναι οὐδὲ μία δίστασις εἰς τὸν μερισμόν. διότι ἐὰν ἐθέλαμεν νὰ μερίσωμεν τὰ $\frac{3}{32}$ μὲ ἕνα ἀκέραιον ἔρχετον εἰς τὸ μερτικὸν πάλιν $\frac{3}{32}$ καὶ πάλιν ἐὰν ἐθέλαμεν μερίσει μὲ $\frac{1}{2}$ χρεία ἦτον νὰ ἔλθουν δύο φορὲς τὰ $\frac{3}{32}$ ποῦ ἔναι $\frac{3}{16}$ τὸ λοιπὸν ἐδῶ ἐμερίσαμεν μὲ $\frac{1}{4}$ χρεία ἔναι νὰ ἔλθουν τέσσαρες φορὲς ὅσον ἔναι τὰ $\frac{3}{8}$ ὡσὰν ηὕγῆκαν καὶ εἰς τὸν μερισμὸν ὡσὰν βλέπεις. καὶ πάλιν μερίζομεν $\frac{1}{4}$ μὲ $\frac{1}{2}$ καὶ εὐγαίνει $\frac{1}{2}$ ἤγουν λέγομεν ὅτι ἐὰν ἐπουλιέτον τὸ πανὶ ἀπὸ μισὸν ἄσπρον ἡ κάθε πῆχυ, ἤγουν κυκκία 4 χρεία εἶτον νὰ δώσω 4 κυκκία νὰ πάρω μίαν πῆχυν. καὶ ἐγὼ ἔδωσα ἕνα τέταρτον, ἤγουν 2 κυκκία χρεία ἔναι νὰ πάρω μισὴ πῆχυ πανί, ὡσὰν ηὕγῆκεν καὶ εἰς τὰ ψηφία. καὶ οὕτω μέριζε ὅλα τὰ τζακίσματα, καὶ ποτὲ νὰ μὴν σφάλῃς.

Παράδειγμα, ζ΄.

$$\frac{3}{32} \times \frac{1}{4}$$

12

32

3 χίσε

8

Σημείωσαι

Ἀπόδειξις, ά.

Ἀπόδειξις, β΄.

Πολυπλασιασμὸς ἀκέραια, μὲ ἀκέραια καὶ τζάκισμα, εἰς ἄλλον τρόπον. Κεφ. μέ.

Λέγομεν ὅτι ἂν θέλης νὰ πολυπλασιάσης ἀκέραια, μὲ ἀκέραια καὶ τζάκισμα μὲ ἄλλον τρόπον ποίησον οὕτως. γράψε τὰ ψηφία ὡσὰν καὶ εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν ὅπου δὲν ἔχει τζακίσματα, καὶ τὰ πολυπλασίασε ὁμοῦ ὅλα τὰ ἀκέραια. ἔπειτα ἂν εἶναι τὸ τζάκισμα μισόν, ἔπαρε τὰ μισὰ ἀπὸ ἐκεῖνο τὸ μέρος ποῦ δὲν ἔχει τζάκισμα. εἰδὲ εἶναι $\frac{1}{3}$ ἔπαρε τὸ ἕνα τρίτον. εἰδὲ εἶναι $\frac{2}{3}$ ἔπαρε τὰ δύο τρίτα. εἰδὲ εἶναι $\frac{1}{4}$ ἔπαρε καὶ ἴσου τὸ ἕνα τέταρτον. εἰδὲ εἶναι $\frac{2}{5}$ ἔπαρε καὶ ἴσου τὰ δύο πέμπτα, καὶ ἁπλῶς εἰπεῖν, ἔτι ὅσον εἶναι τζάκισμα, τόσον ἔπαρε καὶ ἴσου ἀπὸ τὰ ἀκέραια καὶ τὰ γράφε ὑποκάτω εἰς τὴν ἐμάδαν. ἔπειτα συμμάρισε ὅλα ὁμοῦ καὶ ὅσα εὕγουν τόσον ἔγινεν. Θετέον ἔχομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν, 45 πρὸς 46 $\frac{1}{2}$ καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 45 μὲ τὰ 46 καὶ γίνονται 2070 ἔπειτα πέρνομεν τὰ μισὰ ἀπὸ τὰ ἀκέραια, ἤγουν ἀπὸ τὰ 45 ἔσοντας εἶναι μισόν. ἤγουν λέγομεν τὰ μισὰ τῶν 4 εἶναι 2 καὶ τὰ γράφομεν ὑποκάτω τῆς δεκάδος, διατὶ εἶναι καὶ αὐτὰ δεκάδα. καὶ πάλιν λέγομεν τὰ μισὰ τῶν 5 εἶναι 2 καὶ μισὸν καὶ τὰ δύο τὰ γράφομεν ὑποκάτω τῆς μονάδας ἔσοντας καὶ εἶναι καὶ αὐτὰ μονάδα, καὶ τὸ μισὸν ποῦ ἔμεινεν τὸ γράφομεν ἔξω. ἔπειτα τὰ συμμαρώνομεν καὶ γίνονται 2092 $\frac{1}{2}$ καὶ τόσον εἶναι. Πάλιν θέλομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν 236 πρὸς 54 $\frac{2}{3}$ καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 236 μὲ τὰ 54 καὶ γίνονται 12744 θέλομεν νὰ πάρωμεν, καὶ τὰ δύο τρίτα τῶν 236 διὰ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ λέγομεν, τὸ τρίτον τῶν 23 εἶναι 7 καὶ τὰ γράφομεν ὑποκάτω τῆς δεκάδος ἔσοντας καὶ εἶναι δεκάδα, ἔπειτα λέγομεν 3 οἱ 7 γίνονται 21 ἕως τὰ 23 θέλομεν 2 καὶ αὐτὰ λογίζονται 20 καὶ 6 τὸ παρεμπρὸς ψηφίον γίνονται 26 καὶ πάλιν λέγομεν, τὸ τρίτον τῶν 26 εἶναι 8 καὶ τὰ γράφομεν ὑποκάτω τῆς μονάδος, διατὶ εἶναι καὶ αὐτὰ μονάδα. ἔπειτα λέγομεν 3 οἱ 8 γίνονται 24 ἕως τὰ 26 θέλομεν 2 καὶ αὐτὰ εἶναι $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ γράφομεν ἔξω. ἔπειτα βάζομεν ὑποκάτω εἰς αὐτὰ διὰ τὸ ἄλλον τρίτον ἄλλα τόσα ἤγουν 78 $\frac{2}{3}$ ἔσοντας καὶ ἐπάραμεν μὲ δύο τρίτα. ἔπειτα τὰ συμμαρώνομεν καὶ λέγομεν, 2 τρίτα καὶ δύο γίνονται 4 τρίτα καὶ γράφομεν ἕνα τρίτον καὶ κρατοῦμεν ἕνα ἀκέραιον, καὶ ἐκεῖνο τὸ ἄλλον ψηφίον εἶναι ἐννέα, καὶ γίνονται 17 καὶ 4 γίνονται, 21 καὶ γράφομεν τὸ ἕνα καὶ κρατοῦμεν τὰ δύο ὅπως συμμαρώνομεν καὶ τὰ ἐπίλοιπα πάντα κατὰ τὴν τάξιν τοῦ συμμαρισμοῦ καὶ ἔγιναν 12901 $\frac{1}{3}$ ὡσὰν βλέπεις εἰς τὰ ψηφία. Πάλιν θέλομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν 476 πρὸς 67 $\frac{1}{4}$ καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 476 μὲ τὰ 67 $\frac{1}{4}$ καὶ γίνονται 31892 πέρνομεν δὲ καὶ τὸ τέταρτον οὕτως. τὸ τέταρτον τῶν 4 εἶναι ἕνα, καὶ τὰ γράφομεν ὑποκάτω τῆς ἑκατοντάδος, ἔσοντας ὅτι εἶναι αὐτὰ ἑκατοντάδα, καὶ πάλιν λέγο-

μεν

Ἰδὲ καὶ τὰ παραδείγματα τῆς αὐτῆς ἑρμηνείας. παράδειγμα, α.

45
46 $\frac{1}{2}$
270
180
2070
22 $\frac{1}{2}$
2092 $\frac{1}{2}$

Παράδειγμα, β.

236
54
944
1180
12744
78 $\frac{2}{3}$
78 $\frac{2}{3}$
12901 $\frac{1}{3}$

Παράδειγμα, γ.

476
67 $\frac{1}{4}$
31892
119
32011

μὲν τὸ τέταρτον τῶν 7 ἔναι ἕνα, καὶ τὸ γράφομεν καὶ αὐτὸ παρεμπρὸς εἰς τὴν δεκάδα καὶ λέγομεν μία φορὰ 4 ἔναι 4 ἀπὸ τὰ 7 μένει 3 καὶ αὐτὰ λέγον- Παράδειγ-
ται 30 καὶ ἔξι τὸ παρεμπρὸς ψηφὶν γίνονται 36 καὶ πάλιν λέγομεν τὸ τέ- μα, δ'.
ταρτον τῶν 36 ἔναι 9 καὶ τὰ γράφομεν καὶ αὐτὰ ὑποκάτω τῆς μονάδος. ἔπειτα τὰ συμαζόνομεν καὶ γίνονται ὅλα αὐτάμα 32011 & τόσοι ἔγινεν. Ὁμοίως θέλομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν 78 πρὸς 8 $\frac{1}{5}$ πολυπλασιάζομεν τὰ 78 μὲ τὰ 8 καὶ γίνονται 624 πέρνομεν καὶ τὸ πέμπτον τῶν 78 ἔναι 15 $\frac{3}{5}$ καὶ αὐτὰ τὰ γράφομεν ὑποκάτω εἰς τὴν σοῦμαν. γράφομεν δὲ καὶ ἄλλα 15 $\frac{3}{5}$ διὰ τὸ ἄλλον πέμπτον ἴσονται καὶ εἴπαμεν μὲ $\frac{2}{5}$ καὶ τὰ συμαζόμεν μὲ τὰ 624 καὶ γίνονται 655 $\frac{1}{5}$ ὡσὰν βλέπεις εἰς τὰ ψηφία, Πάλιν θέλομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν 456 $\frac{1}{2}$ μὲ 5 καὶ πολυπλασιάζωμεν καὶ αὐτὰ ὁμοίως. ἤγουν τὰ 456 μὲ τὰ 5 καὶ γίνονται 2280 ἔπειτα πέρνομεν τὰ μισὰ ἀπὸ τὰ ἀκέραια ἤγουν ἀπὸ τὰ 5 καὶ αὐτὰ ἔναι 2 $\frac{1}{2}$ & τὰ συμαζόμεν μὲ τὰ 2280 καὶ γίνονται 2282 $\frac{1}{2}$ ὡσὰν βλέπεις ἤξευρε ὅτι πάντοτε νὰ πέρνης τὸ μισὸν, ἢ τὸ τρίτον, ἢ τὸ τέταρτον, ἢ τὸ πέμπτον. ἢ τὸ ἕκτον. ἢ ὅτι τζάκισμα καὶ ἂν ἔναι ἀπὸ τὰ ἀκέραια ψηφία ὡς καθὼς ἐδιδάχθης ἄνωθεν ἤγουν ἐὰν εἴπῃς πήχεις 145 πρὸς ἄσπρα 46 $\frac{1}{2}$ τὴν κάθε πῆχυν ἔπαρε τὰ μισὰ ἀπὸ τὰ 145 καὶ πάλιν ἐὰν εἴπῃς λύτρες 456 $\frac{1}{2}$ ἀπὸ 5 ἄσπρα τὴν κάθε λύτραν, ἔπαρε τὰ μισὰ ἀπὸ τὰ ἀκέραια ἤγουν ἀπὸ τὰ 5 οὕτως κάμνε πάντα καὶ ποτὲ νὰ μὴν σφάλης.

78	
8 $\frac{1}{5}$	
624	
15 $\frac{3}{5}$	
15 $\frac{3}{5}$	
655 $\frac{1}{5}$	

Παράδειγμα, ε'.

456 $\frac{1}{2}$	
5	
2280	
2 $\frac{1}{2}$	
2282 $\frac{1}{2}$	

Ἕτερος πολυπλασιασμὸς καὶ μερισμὸς μὲ ἄλλον τρόπον πολλὰ εὔκολον, εἰς τζακίσματα. Κεφάλαιον. μϛ'.

ΕΙ'ς τὴν Τουρκίαν ἔχουσι συνήθειαν, ὅταν θέλουν νὰ πολυπλασιάσουν ψηφία καὶ τζάκισμα μὲ ἄλλα ψηφία καὶ τζάκισμα. ἢ $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{4}$ ἢ $\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{1}{8}$ ἢ $\frac{3}{8}$ ἢ $\frac{5}{8}$ ἢ καὶ $\frac{7}{8}$ δὲν ἀναλύουσιν τὰ ψηφία κατὰ τὴν τάξιν τῆς μεθόδου. μόνον ὅταν θέλουν νὰ πολυπλασιάσουν ψηφία ποῦ νὰ ἔχουν μισὸν, ἀντὶς τοῦ $\frac{1}{2}$ προσθέτουν εἰς τὰ ψηφία ποῦ ἔχουν τὸ μισὸν 5 εἰδὲ καὶ ἔχουν τὰ ψηφία $\frac{1}{4}$ προσθέτουν 25 εἰ δὲ καὶ ἔχουν $\frac{3}{4}$ προσθέτουν 75 ἤγουν τρεῖς φορὲς τὰ 25 εἰ δὲ καὶ ἔχουν $\frac{1}{8}$ προσθέτουσιν 125 εἰδὲ, καὶ ἔχουσιν $\frac{3}{8}$ προσθέτουν τρεῖς φορὲς τὰ 125 ἤγουν 375 εἰδὲ καὶ ἔχουσιν $\frac{5}{8}$ προσθέτουν πέντε φορὲς τὰ 125 ἤγουν 625 εἰδὲ καὶ ἔχουσιν $\frac{7}{8}$ προσθέτουσιν 7 φορὲς τὰ 125 ἤγουν 875 καὶ οὕτως πολυπλασιάζουν, ἔπειτα κόπτουσιν ἐκ τῆς ὁμάδος ὅσα ψηφία ἐπροσέθησαν. καὶ ἐκεῖνα ποῦ μένουν εἰς τὸ ζερβὸ χέρι αὐτὰ ἔναι ὁ ἀριθμός. εἰδὲ ἐκεῖνα ποῦ μένουν εἰς τὸ κόψιμον, ἤγουν τοῦ δεξιοῦ χερίου, ἔναι τζάκισμα κατὰ τὴν ἄνωθεν ἀναλογίαν. ἤγουν ἐὰν μένουν 5 ἔναι $\frac{1}{2}$ εἰ δὲ καὶ μένουν 25 ἔναι $\frac{1}{4}$ εἰδὲ καὶ μένουν 125 ἔναι $\frac{1}{8}$ ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα ὡς ἄνωθεν. εἰ δὲ καὶ μένουν τέσσαρα ψηφία ποιοῦν τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος μὲ πέντε ψηφία. ἤγουν μὲ τέσσαρες ἰοῦλες καὶ μὲ μίαν μονάδαν. καὶ αὐτὰ ἶναι 10000 εἴδη καὶ μένουν πέντε ψηφία, ποιοῦν τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος μὲ ἕξι ψηφία, ἤγουν 100000 εἴδη καὶ μένουν ἕξι ψηφία, ποιοῦν τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος μὲ ἑπτὰ ψηφία, ἤγουν 1000000 καὶ κατὰ ἀναλογίαν τόσον λέγεται τὸ τζάκισμα ὡς ἐν παραδείγματι λέγομεν. Ὅτι ἀγοράσαμεν πήχες πανὶ $25\frac{1}{2}$ ἀπὸ 6 ἄσπρα τὴν κάθε πῆχυν τί χρεωστοῦμεν νὰ πληρώσωμεν αὐτὰ γοῦν θέλομεν νὰ τὰ πολυπλασιάσωμεν καὶ αὐτὶς τοῦ $\frac{1}{2}$ προσθέτομεν 5 εἰς τὰ 25 καὶ γίνονται 255 αὐτὰ γοῦν τὰ πολυπλασιάζομεν μὲ τὰ 6 καὶ γίνονται 1530 ἀπ' αὐτὰ γοῦν κόπτομεν τὸ ἕνα ψηφίον τοῦ ἐπροσθήσαμεν ἤγουν διὰ τὰ 5 ὡσὰν βλέπεις 153 | 0 καὶ ἔμειναν ζερβὰ 153 καὶ τόσον εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πανίου καὶ ὄχι ἄλλον, διότι εἰς τὸ κόψιμον ἔμεινε μία νοῦλα.

Παράδειγμα, α'.

Ὁμοίως λέγομεν, ὅτι ἀγοράσαμεν λίτρες κηρὶ $18\frac{1}{4}$ πρὸς ἄσπρα 5 τὴν κάθε λίτρα, τί χρεωστοῦμεν, νὰ πληρώσωμεν. θέλομεν καὶ αὐτὰ νὰ τὰ πολυπλασιάσωμεν, καὶ αὐτὶς τοῦ $\frac{1}{4}$ προσθέτομεν 25 εἰς τὰ 18 καὶ γίνονται 1825 αὐτὰ γοῦν τὰ πολυπλασιάζομεν μὲ τὰ 5 καὶ γίνονται 9125 ἀπ' αὐτὰ γοῦν κόπτομεν τὰ δύο ψηφία τοῦ ἐπροσθήσαμεν. ἤγουν διὰ τὰ 25 ὡσὰν βλέπεις 91 | 25 καὶ μένουσιν καὶ 91 εἰς τὸ ζερβὸ χέρι, καὶ αὐτὰ εἶναι ἄσπρα, εἰς δὲ τὸ δεξιὸν χέρι εἰς τὸ κόψιμον ἔμειναν 25 καὶ αὐτὸ εἶναι τζάκισμα. ἤγουν $\frac{1}{4}$ εἶναι δὲ ἡ τιμὴ τοῦ κηρίου ἄσπρα $91\frac{1}{4}$

Παράδειγμα, β'.

Ὁμοίως πάλιν λέγομεν ὅτι ἀγοράσαμεν πήχες πανὶ $6\frac{1}{2}$ πρὸς ἄσπρα $9\frac{3}{4}$ τί χρεωστοῦμεν νὰ πληρώσωμεν θέλομεν γοῦν νὰ πολυπλασιάσωμεν τὰ αὐτά. καὶ προσθέτομεν εἰς τὰ 6 αὐτὶς τοῦ μισοῦ 5 καὶ γίνονται 65 εἰς δὲ τὰ 9 προσθέτομεν 75 διὰ τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ γίνονται 975 αὐτὰ γοῦν τὰ 975 τὰ πολυπλασιάζομεν μετὰ 65 καὶ γίνονται 63375 κόπτομεν γοῦν ἀπ' αὐτὰ τὰ τρία ψηφία τοῦ ἐπροσθήσαμεν, διὰ τὸ μισὸν καὶ διὰ τὰ $\frac{3}{4}$ ἤγουν διὰ τὰ 5 καὶ διὰ τὰ 75 ὡσὰν βλέπεις 63 | 375 καὶ ἰδοὺ τοῦ μένουσι ζερβὰ 63 καὶ αὐτὰ εἶναι ἄσπρα. εἰς τὸ κόψιμον μένουσιν 375 καὶ αὐτὰ ἔναι $\frac{3}{8}$ ὥστε ἔναι ἡ τιμὴ τοῦ πανίου ἄσπρα $63\frac{3}{8}$.

Παράδειγμα, γ'.

Ὁμοίως πάλιν λέγομεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν $7\frac{3}{4}$ πρὸς $8\frac{5}{8}$ αὐτὶς μὲν τὰ $\frac{3}{4}$ προσθέτομεν 75 εἰς τὰ 7 καὶ γίνονται 775 εἰς δὲ τὰ 8 προσθέτομεν 625 διὰ τὰ $\frac{5}{8}$ καὶ γίνονται 8625 αὐτὰ γοῦν τὰ 8625 πολυπλασιάζομεν μὲ τὰ 775 καὶ γίνονται 6684375 ἀπ' αὐτὰ γοῦν τὰ ψηφία κόπτομεν τὰ πέντε ψηφία τοῦ ἐπροσθήσαμεν διὰ τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ διὰ τὰ $\frac{5}{8}$ ἤγουν διὰ τὰ 75 καὶ διὰ τὰ 625 ὡσὰν βλέπεις 66 | 84375 καὶ αὐτὰ ἔναι ἡ τιμὴ τοῦ πολυπλασιασμοῦ. ἤγουν τὰ μὲν 66 ἔναι ἀκέραια. αἱ δὲ 84375 ἔναι τοιοῦτον τζάκισμα $\frac{84375}{100000}$ καὶ αὐτὸ ἔναι $\frac{27}{32}$ ὥστε ἐπολυπλασιάσαμεν τὰ $7\frac{3}{4}$ μὲ τὰ $8\frac{5}{8}$ καὶ ἐγίναν $66\frac{27}{32}$ ὡσὰν βλέπεις, καὶ οὕτως γίνεται ὁ πολυπλασιασμός.

Παράδειγμα, δ'.

Εὕρε καὶ τὸν μερισμὸν ἕνα τῆς αὐτῆς μεθόδου.

Εἰ δὲ ὅταν θέλουν νὰ μερίσουν τινὰν ἀριθμόν, καὶ ὁ μεριστὴς νὰ ἔχῃ ἢ $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{4}$ ἢ $\frac{3}{4}$ ἢ καὶ ἢ καὶ ὄγδοα, ἔχουσι γοῦν τὴν αὐτὴν συνήθειαν. ἤγουν τὸ μέρος ποῦ εἶναι τὸ μίσο, αὐτὶς τοῦ $\frac{1}{2}$ προσθένουν 5 ὁμοίως καὶ εἰς τὰ ἄλλα ὅλα ἤγουν εἰς τὸ $\frac{1}{4}$ 25 καὶ εἰς τὸ $\frac{1}{8}$ 125 ὡσαύτως καὶ εἰς τὸν πολυπλασιασμόν. εἰς δὲ τὸ μέρος ποῦ δὲν ἔχει τζάκισμα προσθένειν τόσες νοῦλες, ὅσα ψηφία ἐπρόσθησαν. Εἰδὲ καὶ τὰ δύο μέρη ἔχουν τζάκισμα, προσθένειν τὰ ψηφία τοῦ κάθε τζακίσματος, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσα τὰ ψηφία τῶν τζακισμάτων καλῶς ἔχη. εἰδὲ καὶ εἶναι τοῦ ἑνὸς ὀλιγότερα παρὰ τοῦ ἄλλου, ἀναπληροῦν τὸν τόπον αὐτῶν, μὲ νοῦλες, ἔπειτα μερίζουσιν. Παράδειγμα, α. Θετέον λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἄσπρα 367 καὶ θέλομεν νὰ ἀγοράσωμεν πανὶ πρὸς ἄσπρα 6 $\frac{1}{2}$ τὴν κάθε πῆχυν, πόσες πῆχες πανὶ θέλομεν πάρει. αὐτὰ γοῦν τὰ 367 θέλομεν νὰ τὰ μερίσωμεν μὲ τὰ 6 $\frac{1}{2}$ καὶ αὐτὶς τοῦ μισοῦ, προσθέτομεν εἰς τὸν μεριστὴν 5 ἤγουν εἰς τὰ 6 καὶ γίνονται 65 προσθέτομεν δὲ καὶ εἰς τὸν μεριζόμενον ποσὸν μία νοῦλαν, καὶ γίνονται 3670 αὐτὰ γοῦν τὰ μερίζομεν μετὰ 65 καὶ εὐγαίνουσι 56 $\frac{30}{65}$ ἤγουν $\frac{6}{13}$ καὶ τόσες πῆχες πανὶ ἡ θέλαμεν πάρει. Παράδειγμα, β. Ὁμοίως πάλιν λέγομεν ὅτι ἡ πῆχυ τὸ πανὶ ἔχει ἄσπρα 8 $\frac{1}{4}$ καὶ ἡμεῖς ἔχομεν ἄσπρα 345 πόσες πῆχες πανὶ ἡ θέλαμεν πάρει θέλομεν γοῦν καὶ αὐτὰ νὰ μερίσωμεν τὰ 345 μὲ τὰ 8 $\frac{1}{4}$ καὶ αὐτὶς τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεριστοῦ προσθέτομεν 25 ἤγουν εἰς τὰ 8 καὶ γίνονται 825 προσθέτομεν δὲ καὶ εἰς τὸν μεριζόμενον ποσὸν δύο νοῦλας. ἤγουν εἰς τὰ 345 καὶ γίνονται, 34500 αὐτὰ γοῦν τὰ μερίζομεν μὲ τὰ 825 καὶ εὐγαίνουν εἰς τὸ μέρος 41 μένουσιν καὶ 675 καὶ αὐτὰ λογίζονται $\frac{675}{825}$ ἤγουν $\frac{9}{11}$ τῆς πῆχυς, καὶ τόσες πῆχες πανὶ ἡ θέλαμεν πάρει. Παράδειγμα, γ. Ὁμοίως πάλιν λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἄσπρα 6578 $\frac{1}{2}$ καὶ θέλομεν νὰ τὰ ἀλλάξομεν εἰς τόσα φλωρία ἀπὸ ἄσπρα 56 $\frac{3}{8}$ ἤγουν τρία κικκία εἰς τὸ κάθεν φλωρίν, πόσα φλωρία θέλομεν πάρει. θέλομεν γοῦν νὰ μερίσωμεν τὰ 6578 $\frac{1}{2}$ μὲ τὰ 56 $\frac{3}{8}$ καὶ αὐτὶς τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ μεριστοῦ προσθέτομεν 375 ἤγουν εἰς τὸ 56 καὶ γίνονται 56375 θέλομεν γοῦν νὰ προσθήσωμεν καὶ εἰς τὸν μεριζόμενον ποσὸν τρεῖς νοῦλες, καὶ ἐπειδὴ ἔχει καὶ αὐτὰ $\frac{1}{2}$ προσθέτομεν καὶ αὐτὰ 5 διὰ τὸ μισὸν καὶ ἔμπροσθεν εἰς τὰ 5 προσθέτομεν δύο νοῦλες διὰ ἀναπλήρωσιν τῶν τριῶν ψηφίων, καὶ γίνονται καὶ αὐτὰ 6578500 αὐτὰ γοῦν τὰ μερίζομεν μὲ τὸν μεριστὴν ἤγουν μὲ τὰ 56375 καὶ εὐγαίνουν 116 μένουσιν καὶ 39000 καὶ αὐτὰ λογίζονται $\frac{39000}{56375}$ ἤγουν τόσον τζάκισμα τοῦ ἄλλου φλωρίου ἀπ' αὐτὰ γοῦν ποῦ ἔμειναν, ἤγουν τὰ 39000 κόπτομεν τὰ τρία ψηφία ποῦ ἐπροσθήσαμεν. καὶ μένουν 39 μένουσιν καὶ εἰς τὸ κόψιμον τρεῖς νοῦλες. καὶ τὰ μὲν 39 εἶναι ἄσπρα. αἱ δὲ νοῦλαι εἶναι τζάκισμα τοῦ ἄσπρου. ὥστε γοῦν τὰ 6578 $\frac{1}{2}$ ἄσπρα. ἔγιναν φλωρία 116 ἔμειναν καὶ ἄσπρα 39 καὶ οὐδένα κικκὶ ἔσοντας ὅτι εἰς τὸ κόψιμον ἔμειναν νοῦλες Εἰδὲ καὶ ἤθελαν μείνει ψηφία ἦτον τζάκισμα τοῦ ἄσπρου κατὰ τὴν ἄνωθεν ἀναλογίαν τοῦ πολυπλασιασμοῦ. Ἐρώτησις κ´. Δύναται αὕτη ἡ μέθοδος νὰ πολυπλασιάσῃ κάθε τζάκισμα,

καὶ

καὶ διατὶ δὲν ἀναλύουσι τὰ ψηφία νὰ τὰ κάμουν μίας φύσεως. ἀμὴ προ-
σθέτουν διὰ τοῦ μισοῦ, 5 διὰ δὲ τοῦ τετάρτου, 25 διὰ δὲ τοῦ ἑνὸς ὀγδόου
125 καὶ ὅλλα τὰ ἄλλα κατὰ τὴν ἀναλογίαν αὐτῶν ὡσὰν ἐδιδάχθημεν
ἄνωθεν; Λέγομεν δὲ οὕτως, ὅτι ἡ μέθοδος δὲν πολυπλασιάζει κάθε
Ἀπόκρισις καὶ λύσις τῆς αὐτῆς μεθόδου. τζάκισμα μόνον ἐσα τζακίσματα διαιῶνται νὰ μερίσουν μὲ τὴν ῥίζαν τῆς
δεκάδα. ἢ ἑκατοντάδα. ἢ χιλιάδα. ἢ κάθε ἀριθμὸν μονάδος, ὡσὰν τὸ
μισόν. ἤγουν τὰ 2 ποῦ μερίζουσι τὰ 10 διατὶ τὸ ἥμισυ τῶν 10 εἶναι 5
ὁμοίως καὶ τὸ τέταρτον, ἤγουν τὰ 4 ποῦ μερίζουσι τὰ 100 διατὶ τὸ τέταρ-
τον τῶν 100 εἶναι 25 ὁμοίως καὶ τὸ ὄγδοον, ἤγουν τὰ 8 ποῦ μερίζουσι
τὴν χιλιάδα, διότις τὸ ὄγδοον τῶν 1000 εἶναι 125 αὐτὰ γοῦν τὰ τζακίσ-
ματα καὶ ὅσα εἶναι ὡσὰν αὐτὰ πολυπλασιάζει αὐτὴ ἡ μέθοδος, καὶ ὄχι
ἄλλα. περὶ δὲ τοῦ διατὶ δὲν ἀναλύουσιν τὰ ψηφία νὰ τὰ κάμουν μίας φύ-
σεως, κατὰ τὴν τάξιν τῆς μεθόδου, λέγομεν δὲ οὕτως, ὅτι καὶ αὐτοὶ ἀνα-
λύουσι τὰ ψηφία καὶ τὰ κάμνουν μίας φύσεως, πλὴν ἀλλοτρόπως. καὶ ἄ-
κουσον. Ἐπειδὴ εἰς τὸν τόπον τῆς τουρκίας δὲν πολιτεύονται ἄλλα τζα-
κίσματα μόνον μισό, καὶ τέταρτον, καὶ ὄγδοον, διατὶ τὸ ἕνα ἄσπρον εἶναι ὀκτὼ
κουκκία ὁμοίως καὶ ἡ πῆχυ αὐτῶν εἶναι ὀκτὼ ὄγδοα, τὰ ὁποῖα τὰ λέγουσιν
ῥουπία. διατοῦτο ἐρεύνησαν καὶ εὑρήκαν αὐτὴν τὴν μέθοδον τῶν τζακισμά-
των, καὶ ἀναλύουσι τὰ τζακίσματα καὶ δὲν πολυπλασιάζωσι. ὁμοίως μερί-
ζουν, καὶ δὲν μερίζουσι. Ἤγουν κατὰ λόγον ἔχουν νὰ πολυπλασιάσουν μέρος
ψηφίον, μὲ ἄλλο μέρος καὶ αὐτὸ ἔχει μισὸ αὐτὸ γοῦν τὸ $\frac{1}{2}$ τὸ ποιοῦσιν $\frac{5}{10}$ καὶ
Δύσις, α'. ἐπειδὴ θέλουν νὰ πολυπλασιάσουν τὰ ψηφία μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσ-
ματος, ἤγουν μὲ τὰ 10 καὶ νὰ προσθήσουν τὴν κορυφὴν, ἤγουν τὰ 5. προ-
σθένουν μόνον τὰ 5 καὶ ἔμεινε πολυπλασιασμένα ἔπειτα πολυπλασιάζου-
σιν τὰ δύο μέρη καὶ ἐκεῖνα ποῦ εὕγουν θέλουν πάλιν νὰ τὰ μερίσουν μὲ τὴν
ῥίζαν τοῦ τζακίσματος, ἤγουν μὲ τὰ 10 καὶ κόπτουσιν ἕνα ψηφίον καὶ ἔμειναν
μερισμένον. ὥστε λοιπὸν ἰδοὺ ποῦ τὰ ἀνάλυσαν καὶ αὐτοὶ, καὶ τὰ ἔκαμαν
Δύσις, β'. μίας φύσεως, ἔπειτα ἐμέρασησαν. Διὰ δὲ τοῦ τετάρτου προσθέτουν 25 ἐπει-
δὴ δὲν ἠμπορεῖ ἀπὸ τὰ δέκα νὰ εὕγῃ τὸ τέταρτον, ἀναβιβάζουσι τὸν ἀριθ-
μὸν εἰς τὰ 100 καὶ ἀπ᾽ αὐτὰ πέρνουν τὸ τέταρτον. καὶ τὸ τέταρτον τῶν 100
εἶναι 25 ὥστε λοιπὸν τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι $\frac{25}{100}$ θέλουσι γοῦν νὰ πολυπλασιάσουν μὲ
τὸ 100 καὶ νὰ προσθήσουν καὶ τὰ 25 καὶ προσθένουν τὰ 25 καὶ ἐπολυ-
πλασιάσθη τὸ μέρος. καὶ οὕτως πολυπλασιάζωσι τὰ δύο μέρη. αὐτὰ δὲ
θέλουν νὰ τὰ μερίσουν μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος, ἤγουν μὲ τὰ 100
καὶ κόπτουσι δύο ψηφία καὶ ἐμοιράσθη. ὁμοίως καὶ διὰ τὸ ὄγδοον προσθέ-
νουν 125 ἐπειδὴ δὲν ἠμποροῦν νὰ πάρουν τὸ ὄγδοον, οὔτε ἀπὸ τὰ 10
Δύσις, γ'. οὔτε ἀπὸ τὰ 100 ἀναβιβάζουσι τὸν ἀριθμὸν εἰς τὰ 1000 καὶ ἀπ᾽ αὐτὰ πέρ-
νουσι τὸ ὄγδοον. καὶ τὸ ὄγδοον τῶν 1000 εἶναι 125 ὥστε λοιπὸν τὸ $\frac{1}{8}$
εἶναι

εἶναι $\frac{125}{1000}$ θέλουσι γουν νὰ πολυπλασιάσουν τὰ ψηφία μὲ τὰ 1000 ἤγουν μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος, καὶ νὰ προσθέσουν καὶ τὴν κορυφὴν τὰ 125 καὶ προσθέσουν μόνον τὰ 125 καὶ ἔμεινεν πολυπλασιασμένον. ἔπειτα πολυπλασιάζουσι τὰ δύο μέρη καὶ αὐτὰ θέλουν νὰ τὰ μοιράσουν μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ τζακίσματος ἤγουν μὲ τὰ 1000 καὶ κόπτουσι τρία ψηφία καὶ ἐμοιράσθην. καὶ αὕτη εἶναι ἡ θεωρία τῆς αὐτῆς μεθόδου ὥσπερ βλέπεις καὶ εἰς τὰ παραδείγματα ἄνωθεν. εἰδὲ καὶ τύχουν καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τῶν ψηφίων τζάκισμα τὴν αὐτὴν θεωρίαν ἔχωσι καὶ ἂν θέλῃς νὰ εὕρῃς τὴν ἀλήθειαν στρῶσε τὰ ψηφία καὶ κάμε τὴν δοκιμὴν καὶ θέλῃς τὴν εὕρει. Ἤξευρε ὅτι ἐδῶ παρὶ μπρὸς θέλῃς εὕρῃ τινὰς λογαριασμοὺς μὲ καντάρια, καὶ λίτρες, καὶ ὀγγίες, καὶ μὲ δράμια. καὶ ἐνθυμοῦ τοῦτο, ὅτι εἰς τὴν τουρκίαν τὸ κάθε κανταριν εἶναι λίτρες 176 ἡ δὲ λίτρα εἶναι δράμια 100 εἰς δὲ τὴν φραγγίαν εἶναι τὸ κάθε κανταριν λίτρες 150 καὶ ἡ λίτρα εἶναι ὀγγίες 12 ἡ δὲ ὀγγία εἶναι ἐξάγια 6. Σημείωσαι.

Ἀρχὴ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Κεφ. μζ'.

Ἡ λεγομένη μέθοδος τῶν τριῶν, εἶναι πρώτη μέθοδος καὶ κυρία πάντων τῶν μεθόδων. τὴν ὁποίαν μέθοδον τὴν λέγουν οἱ ἰταλοί, ῥέγουλα ντελ τρὶ. αὕτη γοῦν ἡ μέθοδος γίνεται μὲ τρία μέρη ψηφίων, καὶ τὰ Σημείωσαι μὲν δύο μέρη εἶναι μίας φύσεως καὶ ὅμοια. ἤγουν τὸ πρῶτον καὶ τὸ τρίτον. περὶ τῆς μετὸ δὲ ἄλλον μέρος δὲν εἶναι ὅμοιον, ἤγουν τὸ δεύτερον ἀπ' αὐτὰ γοῦν τὰ θόδου τῶν τρία μέρη πολυπλασιαζόμενα τὰ δύο μέρη, ἤγουν τὸ δεύτερον καὶ τὸ τριῶν. τρίτον, ἔπειτα μεριζόμενα μὲ τὰ πρῶτα, γεννῶσιν ἄλλον μέρος τέταρτον, καὶ αὐτὸ εἶναι μίας φύσεως μὲ τὸ δεύτερον ἤγουν ὥσπερ παράδειγμα λέγομεν, ἐὰν μὲ 6 φλουρία ἠγόρασα 9 πήχεις καμουχᾶ μὲ 4 φλουρία πόσον ἤθελα ἀγοράσει. ἰδοὺ τὸ λοιπὸν ποῦ εἶναι τὰ πρῶτα, καὶ τὰ τρίτα μίας φύσεως, καὶ ὅμοια ἤγουν φλουρία 6 καὶ 4 τὰ δὲ δεύτερα ἤγουν τὰ 9 δὲν εἶναι ὅμοια διατὶ αὐτὰ εἶναι πήχες, καὶ ἐκεῖνα εἶναι φλουρία ἐκεῖ δίδει, καὶ αὐτοῦ πέρνει αὐτὰ γοῦν πολυπλασιαζόμενα τὰ δεύτερα μὲ τὰ τρίτα, ἤγουν τὰ 9 μὲ τὰ 4 γίνονται 36 καὶ αὐτὰ τὰ 36 μεριζόμενα μὲ τὰ πρῶτα, ἤγουν μὲ τὰ 6 βγαίνουν 6 καὶ ἰδοὺ ποῦ ἐγέννησαν ἄλλο μέρος τέταρτον. καὶ αὐτὸ τὸ μέρος εἶναι μίας φύσεως μὲ τὸ δεύτερον. τὸ λοιπὸν ὅποιος θέλει νὰ κάμῃ τὴν αὐτὴν μέθοδον τῶν τριῶν διὰ νὰ εὕρῃ τινὰ λογαριασμὸν, εἶναι χρεία νὰ Περὶ τοῦ στρώσῃ τὰ ψηφία ὡς ἄνωθεν. ἤγουν πρῶτον τὸ μέρος ὁποῦ γεννᾷ καὶ εἶναι πῶς στρώ- ὅμοιον ὥσπερ τὸ ἄλλον μέρος. δεύτερον αὐτὸ τὸ μέρος ὁποῦ γεννᾶται. τρίτον νονται τὰ τὸ μέρος ὁποῦ θέλει νὰ γεννηθῇ ἀπ' αὐτὸ τὸ τέταρτον μέρος. ἔπειτα ἂς ψηφία τῆς πολυπλασιάσῃ τὰ δεύτερα μὲ τὰ τρίτα, καὶ ἂς μεροίσῃ μὲ τὰ πρῶτα, καὶ μεθόδου τῶν θέλει εὕρει τὸ ζητούμενον, ὥσπερ βλέπεις ἄνωθεν, ὅτι ἦσαν τρία μέρη ψηφίων. τριῶν.