# ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ
## ΠΕΡΙ
# ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

## ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 147.

Ἐπὶ δυεῖν δυάδων ποσοτήτων ληφθεισῶν Α, Β Σχ. 4. καὶ Γ, Δ, ὧν ἂν ἰσαρίθμως αἱ ἑπόμεναι Β καὶ Δ τετμημέναι ὦτι κατὰ μόρια ἀλλήλοις ἴσα, ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τῶν μὲν ἐν τῇ Β μερῶν ἡ ποσότης Α συγκέηται, τῶν δ᾽ ἐν τῇ Δ ἡ Γ, ἀνάλογον εἰρήσονται αἱ ποσότητες, ὡς ἔχουσι τάξεως ἐκκείμεναι. Ὅθεν τί ἐστιν ἀναλογία νοῆσαι ῥάδιον.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 148. Τὰ ἴσα μέρη ἐξ ὧν αἱ τοῦ πρώτου ζεύγους Α, Β ποσότητες σύγκεινται, ἐκ ἂν εἴη ὡρισμένου μεγέθους, εἰ μὴ ἐκεῖναι συμμέτρως ἔχοιεν. Τὸ γὰρ πηλίκον μόριον, ἐξ οὗ καὶ Α συνολεῖται καὶ Β, τούτων κοινὸν μέτρον ἐστί. Ταυτὸ δὲ καὶ περὶ θατέρου ζεύγους Γ καὶ Δ ῥητέον. Ἐὰν δὲ ἀσύμμετροι ὦσιν αἱ ποσότητες Α καὶ Β, καθ᾽ ὁποσονοῦν ἂν ἀριθμὸν μερῶν ἴσων ἀλλήλοις διαιρεθείη ἡ Β, εἰ μόνον τὰ τοῦ ἀριθμοῦ πέρας ἔχοι, καθ᾽ ὃν ὡρισμένου τινὸς μεγέθους τὰ μέρη ὄντα προβάλλεται, ἐκ τῶν τηλίκων οὐδέποτε μερῶν ἐπ᾽ ἀκριβὲς ἡ Α συγκείσεται. (§. 9.). Ἀλλὰ κἂν συμμέτρως ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας αἱ Α καὶ Β, δυνατὸν μέντοι τὴν Β εἰς ἴσα διαιρεθῆναι, τὰ, ὅπως ἂν καὶ ἐπαναληφθῇ, τὴν Α συμπληρῶσαι μὴ ἔχοντα. Οὐ γὰρ ἅπαντα δηλαδὴ τὰ μόρια,

ἅτινα

ὅτλα πηλίκα ὄντα τῆς ἑτέρας τῶν συμμέτρων ποσοτήτων, φέρε τῆς Β ἐστὶ, ταῦτα ἤδη καὶ τὴν ἑτέραν, ἤτοι τὴν Α καταμετρεῖ. Ἀλλ' οὐκ ἀταλαιπώρως πολλάκις τῶνδε τὸ κοινὸν μέτρον ζητητέον ἐστί. Καὶ ἐν οἷς τοίνυν ἡ Α ἐκ τῶν τῆς Β ποσότητος μορίων, κατὰ τὸ ἀκριβὲς συγκεῖσθαι οὐ πέφυκεν, οὐδὲ ἡ Γ ἐκ τῶν τῆς Δ, ἡ ἀναλογία ἐντεῦθεν ἐπικρίνεται, ἐὰν τῶν ποσοτήτων Β καὶ Δ, τῶν ἐν τοῖς δυσὶ ζεύγεσιν ἑπομένων, κατ' ἴσα τε ἀλλήλοις καὶ ἰσάριθμα ἐπ' ἀμφοῖν μόρια διαιρεθεισῶν, αἱ ἐν ταῖς δυάσιν ἡγούμεναι ποσότητες Α καὶ Γ ἐκ τῶν τηλικούτων μορίων, τοσούτῳ ἔγγιον τοῦ ἀκριβοῦς ἀεὶ συγκεῖσθαι ἔχωσιν, ὅσῳ ἂν τῇ ἐπ' ἔλασσω ἀεὶ καὶ ἐλάσσω ὑποδιαιρέσει, ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς κατὰ τὸ μᾶλλον ἀεὶ καὶ μᾶλλον πληθύνοιτο.

§. 149. Ἐν γένει δηλονότι, ἐὰν περὶ τῶν προκειμένων ποσοτήτων Α, Β καὶ Γ, Δ εἰπεῖν δέῃ, πότερον ἀνάλογοι, ἢ οὔ; ἡ βάσανος οὐδέπῃ περανθήσεται, ἤπως ἄλλως παραπλησίως. Ἐὰν ἡ Α μείζων ᾖ τῆς Β, ἀνάγκη καὶ τὴν Γ τῆς Δ. Ἐπαναληφθήσεται οὖν ἡ Β, ἕως οὗ πηλικότης ἀνακύψῃ ἴση τῇ Α, ἢ ταύτης ἐγγὺς ἐλάσσων. Ἐπαναληφθήσεται δὲ καὶ ἡ Δ ὡσαύτως, ἕως οὗ ἤτοι ἡ Γ προκύψῃ, ἢ τῆς Γ ἡ ἐγγὺς ἐλάσσων. Ἐὰν οὖν ἐπὶ παραδείγματος Α = 3 Β, καὶ παραπλησίως καὶ Γ = 3 Δ, αἱ ποσότητες ἀνάλογον ἔσονται. Ἐὰν δὲ Α = 3 Β, ἀλλ' ἡ Γ μείζων, ἢ ἐλάσσων τῆς 3 Δ, οὐδεμία παρέσται ἀναλογία. Ἔτι ἐὰν Α μείζων μὲν ᾖ 3 Β, ἐλάσσων δὲ ἢ 4 Β, τὰς ποσότητας ὁμοίως οὐκ ἀναλόγους εἶναι ζητέον, μὴ καὶ τῆς Γ μείζονος μὲν οὔσης 3 Δ, ἐλάσσονος δὲ 4 Δ. Καίτοι καὶ τῆς Α μείζονος μὲν οὔσης 3 Β, ἐλάσσονος δὲ 4 Β, κἂν ἡ Γ > 3 Δ, καὶ Γ < 4 Δ, οὐ παραυτίκα ἐνθένδε δῆλον, καὶ εἰ τὸ ἀνάλογον διασώζεται. Οὐκοῦν διαιρεθήσεται ἡ Β εἰς ἀριθμόν τινα μορίων ἀλλήλοις ἴσων, διαιρεθήσεται δὲ καὶ ἡ Δ κατ' ἀριθμὸν ἴσον μερῶν ἀλλήλοις ἴσων.

Ἔστω

Ἔστω δὲ ὁ τῶνδε τῶν μορίων ἀριθμὸς κατὰ τὸ δοκοῦν ληφθεὶς = 10, καὶ τὸ M = $\frac{1}{10}$ B, καὶ τὸ T = $\frac{1}{10}$ Δ· καὶ συντεθείσεται ἔπειτα ἡ μὲν A ἐκ τῶν μερῶν M, ἡ δὲ Γ ἐκ τῶν τμημάτων T, ὡς οἷόν τε ἐπ' ἀκριβές. Ἐὰν οὖν ἡ μὲν A μείζων καταληφθῇ, ἢ φέρε 37 M, ἐλάσσων δὲ ἢ 38 M, ἀναλογία οὐδὲ οὕτως ἔσται, μὴ καὶ τῆς Γ μείζονος μὲν οὔσης ἢ 37 T, ἐλάσσονος δὲ, ἢ 38 T. Αἱ δὲ ποσότητες A καὶ Γ εἴσω τῶν τοιῶνδε πίπτουσαι ὁρίων, ἀπὸ μὲν τῆς ἀναλογίας οὐ πάνυ σφόδρα μακρὰν ἀφέξουσιν, ἀνάλογοι δ' οὖν ὅμως ἀναγκαίως οὐκ ἔσονται. Ἰτέον ἄρα προσωτέρω ἐπὶ τὴν ἔρευναν, τῶν ποσοτήτων B καὶ Δ, εἰς μέρη ἔτι ἐλάσσονα (ἰσαρίθμως ἑκατέρας) διαιρουμένων. Ἔστω δ' ὁ ἀριθμὸς 100. Καὶ ἤδη τὸ μὲν M = $\frac{1}{100}$ B, τὸ δὲ T = $\frac{1}{100}$ Δ. Τῶν δὲ ποσοτήτων παρὰ τηλίκα ἤδη παραβαλλομένων μέρη, καταληφθήτω φέρε ἡ μὲν A μείζων οὖσα ἢ 374 M, ἐλάσσω δὲ ἢ 375 M. Καὶ παραπλησίως δὲ $Γ > 374$ T, καὶ $Γ < 375$ T. Καὶ τόγε διάπλωμα ἐνταῦθα τὸ ἀπὸ τοῦ ἀκριβοῦς ἐπὶ τῆς ἀναλογίας, εἴ τι εἴη, ἔσται ἤδη πολλῷ ἔλαττον. Ἀναλογίαν δὲ μὴ εἶναι οὐκ ἂν ἄλλως συμπεράνοιτις, ἢ ἐὰν τῆς A εἴσω τῶν ὁρίων 374 M, καὶ 375 M πιπτούσης, ἡ Γ μὴ εἴσω πίπτῃ τῶν 374 T, καὶ 375 T. Ἐὰν δὲ ἐφεξῆς ληφθῇ M = $\frac{1}{1000}$ B, καὶ T = $\frac{1}{1000}$ Δ, παραπλησίῳ πόνῳ τὴν ἔρευναν ποιουμένοις, εἴ τις ἐπὶ τῆς ἀναλογίας τοῦ ἀκριβοῦς ἐστὶ διάπλωσις, πολλῷ οὖσα τῆς προτέρας ἐλάσσων ἐκκαλυφθήσεται. Καὶ ταύτης ἔτι ἐλάσσων, ἐὰν ληφθῇ M = $\frac{1}{10000}$ B, καὶ T = $\frac{1}{10000}$ Δ. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Γίνονται γὰρ τοῦ ἔργου ταύτῃ πρόσω χωροῦντος τὰ μόρια M καὶ T, οὕτω τέως βραχέα, ὡς ἀπ' ὄψεως γίνεσθαι. Καὶ τῶν ὀφθαλμῶν ἄρα μηδεμίαν καταφωρᾶν ἐξαπάτην ἐπὶ τῆς ἀναλογίας δυναμένων, ἐπιφέρειν ἐξέσται ἀληθεύουσαν εἶναι τὴν προκειμένην, κατὰ γοῦν τὴν αἴσθησιν. Τηνικαῦτα γὰρ ἡ τῶν, συνθέσει τῶν M καὶ T μορίων, συγκει-

μένων

μένων ποσοτήτων διαφοραὶ, ᾗ διοίσουσιν ἀπὸ τῶν Α καὶ Γ, ἐστὶν ἀνεπαίσθητος. Καὶ εἰσὶν ἄρα πρὸς ὄψιν δικάζουσαν αἱ Α καὶ Γ ποσότητες συνθέσει τῶν μορίων Μ καὶ Τ παρηγμέναι. Ἡ δὲ διάνοια τὴν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἐξαπάτην ἀνακαλυφθῆναι μὴ δύνασθαι προορῶσα, εἰ ὁποσονοῦν ἂν ὁ τῶν ἐν Β καὶ Δ μορίων ἀριθμὸς πληθυνθείη, ἢ, ὁποσονοῦν ἂν αὐτὰ ἀποβραχυνθείη, περὶ τῆς ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἀπολύτου ἀληθείας ὑφορᾶσθαι τὸ σύνολον οὐ δυνήσεται· ὅτι τῶν μορίων Μ καὶ Τ διηνεκῶς ἀπομειουμένων, αἱ διαφοραὶ, αἷστισιν αἱ ἐξ αὐτῶν σύνθετοι ποσότητες διαφέρουσι τῶν Α καὶ Γ, τοσούτῳ μᾶλλον ἀποβραχύνονται, ὡς τέως ὑποκαταφέρεσθαι εἰς τὸ, καὶ παντὸς μεγέθους, ὃ ἂν δοθείη, ἐλαττιοῦσθαι· οὗ δὴ γινομένου, τὴν μὲν Α ἐκ τῶν Μορίων Μ, τὴν δὲ Γ ἐκ τῶν Τ σύνθετον νομίζειν χρεών.

§. 150. Ἐπειδὴ τοίνυν τῶν ἐν ἀναλογίᾳ ποσῶν Α, Β καὶ Γ, Δ, τὸ μὲν πρῶτον Α ἐκ τοῦ δευτέρου Β, καὶ τούτου γε πηλίκων τινῶν μορίων, τὸν αὐτὸν πάντῃ σύγκειται τρόπον, ὃν καὶ τὸ τρίτον Γ ἐκ τοῦ τετάρτου Δ, καὶ τῶν αὐτοῦ πηλίκων (εἰ μόνον τὰ πηλίκα ταῦτα ἐπὶ Β καὶ Δ ἰσάριθμα ᾖ) μερῶν· ἑπόμενον ἐστὶ τοῦ Β ἀντὶ μονάδος τεθέντος, τὸν ἐκ τῆς τηλίκης μονάδος ἀριθμὸν Α, τὸν αὐτὸν ἔσεσθαι τῷ ἀριθμῷ, τῷ ἐκ τῆς μονάδος Δ, τὸ Γ σημαίνοντι. (§. 3.). Τοῦτο δὲ, εἴτε ἀληθῶς, διὰ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν αἱ ποσότητες Α καὶ Γ παρίστανται, εἴτε καὶ ὡς ἔγγιστα μόνον. Οὕτως ἐπὶ τοῦ πρὸ μικροῦ ληφθέντος παραδείγματος, ἣν ἐκφέρειν δέοι τὸ μὲν Α διὰ μονάδος τῆς κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ Γ διὰ τῆς κατὰ τὸ Δ, γίνεται Α = 3, καὶ Γ = 3, παχυλῶς δέπως. Ἀκριβέστερον δὲ Α = 3, 7 καὶ Γ = 3, 7. Ἔτι δὲ καὶ μᾶλλον ἀκριβῶς, Α = 3, 74, καὶ Γ = 3, 74. Καὶ εἰ τῶν Β καὶ Δ ποσοτήτων περαιτέρω διαιρεθεισῶν, γένοιτο Α = 3, 7468, ἀνάγκη παραπλησίως εἶναι καὶ Γ = 3, 7468. Καὶ οὕτως ἀείποτε.

§. 151.

§. 151. Τῷδε δ' ἂν τῷ καθόλου τεκμηρίῳ ἡ τῶν Α, Β, Γ, Δ, ποσοτήτων ἀναλογία διαγιγνώσκοιτο. Ἐὰν ἀριθμοῦ ὁλοχεροῦς m πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθέντος, καὶ τῶν μορίων παραχθέντων $\frac{B}{m} = M$, καὶ $\frac{\Delta}{m} = T$, εἶτα εὑρεθῇ τις ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ἕτερος ὁ n, δι' οὗ τῶν μερῶν ἐκείνων πολλαπλασιασθέντων γένοιτο $A = nM$, καὶ $\Gamma = nT$· ἢ $A = \frac{nB}{m}$, καὶ $\Gamma = \frac{n\Delta}{m}$, ἤτοι ἐπ' ἀκριβὲς, ἢ γοῦν ἀεὶ ἐπὶ τ' ἀκριβέστερον, ὅσῳ ἂν μείζων ὁ m λαμβάνοιτο· οὕτω δηλαδὴ, ὡς (εἰμὴ εἰσὶν αἱ ἰσότητες αἵδε πάντη ἀκριβεῖς) τὴν μὲν Α ἐντὸς τῶν ὁρίων πίπτειν $nM$, καὶ $nM + M$ (ὧνπερ ἑνὶ καὶ μόνῳ μορίῳ τῷ M ἡ δευτέρα ὑπερέχει τὴν πρώτην.). Τὴν δὲ Γ μείζονα μὲν εἶναι τῆς $nT$, ἐλάσσονα δὲ τῆς $nT + T$· κατὰ τήνδε τὴν ἔννοιαν αἱ ἰσότητες ἐκληφθεῖσαι,

$$A = \frac{nB}{m}, \text{ καὶ } \Gamma = \frac{n\Delta}{m},$$

ταῖς πάντη ἀκριβέσιν ἰσοδύναμοι εἰσί. Δύναται γὰρ ὁ ἀριθμὸς m, εἰς τοσόνδε πλῆθος ἐπαυξηθῆναι, ὥστε τὰς ὑπεροχὰς, αἷς ἡ μὲν Α ποσότης ὑπὲρ τὴν $\frac{nB}{m}$, ἡ δὲ Γ ὑπὲρ τὴν $\frac{n\Delta}{m}$ εἰσὶν, ἁπάσης δοτῆς ποσότητος ἐλάσσους καθίστασθαι. Κἀντεῦθεν δήπου $A = \frac{nB}{m}$, καὶ $\Gamma = \frac{n\Delta}{m}$. ἢ, ὅπερ εἰς ταυτὸ φέρει, $A = nM$, καὶ $\Gamma = nT$.

§. 152. Τούτοις ἐρειδόμενοι τὴν ἀναλογίαν τῶν ποσοτήτων Α, Β καὶ Γ, Δ τοιῷδε τεκμηρίῳ ὑποσυνάψομεν· ληφθήσεται μὲν ἀριθμὸς ὁστισοῦν ὁλοχερὴς ὁ m, καὶ γενήσονται (τῶν ὅρων Β καὶ Δ διὰ τοῦδε τοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθέντων) μόρια, τὸ μὲν $M = \frac{B}{m}$, τὸ δὲ $T = \frac{\Delta}{m}$. εἶτα παραθέσει τοῦ μορίου Μ πρὸς τὴν ποσότητα Α, ὑποσυναφθήσεται ὁ n ἀριθμὸς τῶν μορίων Μ, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ ποσότητι Α, οὕτω δήπουθεν, ὥστε μὴ εἶναι τὴν Α ἐλάσσονα τῆς $nM$, ἐλάσσονα δὲ εἶναι τῆς $nM+M$. Εἶτ' αὖθις παραθέσει τῆς Γ ποσότητος πρὸς τὸ μόριον Τ, ὁ τῶν μερῶν Τ ἀριθμὸς, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ ποσότητι Γ ζητηθήσεται παραπλησίως, οὕτως ὥστε δηλαδὴ (τεθὲν τόνδε τὸν ἀριθμὸν εἶναι h) τὴν Γ ποσότητα, μηδ' ἐλάσσονα εἶναι τῆς $hT$, καὶ ἐλάσσονα μέντοι τῆς $hT+T$. Ἐὰν οὖν ἀποδείξει ἔχῃ βεβαιωθῆναι, ὡς ἔσται $n=h$, ὅστις ποτ' ἂν ἀριθμὸς ληφθείη ἀντὶ τοῦ m, αἱ ποσότητες Α, Β καὶ Γ, Δ ἀνάλογον ἔσονται. Τούτων γὰρ οὕτως ἐχόντων, ἔσται μὲν $A = \frac{nB}{m}$, ἔσται δὲ $\Gamma = \frac{n\Delta}{m}$ τοσούτῳ ἀεὶ ἀκριβέστερον, ὅσωπερ ἂν ὁ ἀριθμὸς m μείζων παραλαμβάνοιτο. Τὸ δὲ τεκμήριον τοῦτο τῆς ἀναλογίας, καὶ οὕτως ἂν προτεθείη. Τῶν ποσοτήτων Β καὶ Δ, εἰς μέρη ἴσα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ m διῃρημένων, ἐὰν ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν τῆς ποσότητος Β, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ Α, ὁ αὐτὸς ἀεὶ ὑπάρχῃ τῷ μεγίστῳ ἀριθμῷ τῶν μορίων τῶν τῆς ποσότητος Δ, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ Γ, ὁποσοσοῦν ἂν καὶ προσληφθείη ὁ τῶν μορίων ἀριθμὸς m, αἱ ποσότητες Α, Β, καὶ Γ, Δ ἀνάλογοι ἔσονται.

§. 153. Τὰ δ' ἄλλα φανερὸν, ὡς ἐν ἑκάστῃ ἀναλογίᾳ, τὸ μὲν πρῶτον τῶν ποσῶν Α, ὁμογενὲς εἶναι δέον τῷ δευτέρῳ Β, τὸ δὲ τρίτον Γ τῷ τετάρτῳ Δ. Δεῖ γὰρ μέρος τι τῶν ἐν τῷ Α, ἴσον εἶναι μέρει τινὶ τῶν ἐν τῷ Β. Καί τι τῶν ἐν τῷ Γ, τινὶ τῶν ἐν τῷ Δ. Διὸ δὴ καὶ τὰ ποσὰ ὁμογενῆ εἴρηται. Τά γε μὴν πρῶτα δύο, δυσὶ τοῖς ὕστερον ὁμογενῆ τυγχάνειν οὐκ ἔστιν

ἐπεὶ

ἐπάναγκες, καίτοι ὁμογενῆ εἶναι δυνάμενα. Ἐπεὶ καὶ τὸ Β τῷ Γ ἴσον εἶναι δύναται.

## ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 154. Ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν μονάδα, οὕτως ὁ παραγόμενος ἀριθμὸς πρὸς τὸν πολλαπλασιασθέντα. Ἐπὶ δὲ τῆς διαιρέσεως, ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην, ὡς τὸ πηλίκον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν διαιρεθέντα (§. 44. 45.). Καὶ τὸ πηλίκον δὲ πρὸς τὴν μονάδα, ὡς ὁ διαιρετέος πρὸς τὸν διαιρέτην (§. 60.). Ἐν γένει καὶ γάρ, ὁ κατὰ τὴν ἀναλογίαν δευτερεύων, μετὰ τῶν ἐν αὐτῷ πηλίκων μορίων, ἐν τῷ πρωτεύοντι ὅρῳ τὸν αὐτὸν ἐμπεριέχεται τρόπον, ὡς ὁ τεταρτεύων καὶ τὰ ἐν αὐτῷ ὁμώνυμα (τοῖς ἐν τῷ δευτερεύοντι) μέρη, περιέχεται ἐν τῷ τρίτῳ. Καὶ ἀνάπαλιν ποσότητες τέτλαρες, Α, Β, Γ, Δ, ὧν ἡ δευτέρα Β ἐν τῇ πρώτῃ Α τοσάκις ἔνεστιν, ὁσάκις ἡ τετάρτη Δ, ἐν τῇ τρίτῃ Γ, ἀνάλογοι εἰσίν.

## ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 155. Ἐὰν ᾖ ποσὰ Α, Β, Γ, Δ ἀνάλογον, καὶ τούτων Β = Γ, ἡ ἀναλογία **συνεχὴς** εἰρήσεται· ἄλλως **διωρισμένη**.

## ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 156. Ὁ δὲ τρόπος ὁ ὡρισμένος καθ᾽ ὃν γίνεται μὲν ἐκ τοῦ Β τὸ Α, γίνεται δὲ ἐκ τοῦ Δ τὸ Γ, συνθέσει τοῦ Β, ἢ τοῦ Δ, καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς πηλίκων μορίων, λέγεται ὁ **λόγος** τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἢ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ.

## ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 157. Ὁ δέ τοι λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β **ἴσος** εἶναι εἰρήσεται, τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ, ἐὰν τῶν ἑπομένων Β καὶ Δ κατὰ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς εἰς μέρη ἴσα διαιρεθέντων, ἀεὶ τῶν τοῦ Β, τὸ Α ἰσάριθμα περιέχῃ μέρη, ὅσα καὶ τῶν τοῦ Δ τὸ Γ, ὁποσοσοῦν ἂν εἴη ὁ τῶν μορίων ἀριθμὸς ἐν τοῖς Β καὶ Δ. Καὶ συνελόντι, ἐὰν τὰ Α, Β, Γ, Δ ἀνάλογα ᾖ. Ἐὰν δὲ τῶν, ἅπερ ἕπεται, ποσῶν Β καὶ Δ, οὕτω διῃρημένων, τὸ μὲν Α πλείονα περιέχῃ μέρη τῶν ἐκ τοῦ Β, τὸ δὲ Γ τῶν ἐκ τοῦ Δ ἐλάσσονα, μείζων μὲν εἰρήσεται ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος, ἐλάσσων δὲ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 158. Οὐδὲν ἕτερόν ἐστιν ἡ ἀναλογία, ἢ δυοῖν λόγων ἡ ἰσότης, ἥτις καὶ ὁμοιότης καλεῖσθαι φιλεῖ, καὶ ταυτότης· τοῦ τοίνυν λόγου τοῦ Α πρὸς Β, οὕτω καθ' ἡμᾶς εἰωθότος διασημαίνεσθαι Α : Β, ἡ ἀναλογία σημειωθήσεται ὡδέπως Α : Β = Γ : Δ. Εἰσὶ δὲ οἱ μὲν Α καὶ Γ, οἱ τῶν λόγων ὅροι οἱ ἡγούμενοι· οἱ δὲ Β καὶ Δ, οἱ ἑπόμενοι. Ἐν φωναῖς δὲ ἡ ἀναλογία Α : Β = Γ : Δ, οὕτως εἴωθεν ἀπαγγέλλεσθαι, ὅτι τὸ Α ἔχει πρὸς τὸ Β, ὥσπερ ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἤ, βραχυλογεῖν αἱρουμένοις, Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ.

§. 159. Φανερὸν δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, μόνον τὸ μέγεθος ἐπὶ τῶν λόγων τε, καὶ τῶν ἐξ αὐτῶν ἀναλογιῶν ἐπιθεωρεῖσθαι. Διὸ καὶ ὅτε τὰ ἴσα ἀλλήλων ἀντικαθίσταται, οἱ λόγοι, ἢ ἡ τούτων ἰσότης, ἥτις ἐστὶν ἡ ἀναλογία, τροπὴν οὐχ ὑφίσταται.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 160. Ἐπειδὴ ποσῶν τινων ὁμογενῶν προσληφθέντων Α καὶ Β, τὸ πρῶτον Α ἐκ μερῶν πηλίκων τῶν ἐν τῷ Β δευτέρῳ συγκεῖσθαι δύναται, ἤτοι ἐπ' ἀκριβές, ἢ ὡς ἔγγιστα. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν τῷ Β πηλίκων μορίων, ὡς ἄχρι τοῦδε, ᾖ m, ὁ δὲ τούτων ἀριθμὸς ὁ ἐπὶ τοῦ Α, σημειωθῇ n, γενήσεται Α ἐκ

τοῦ

τοῦ B, *παραπλησίως καθάπερ δὴ καὶ* n *γίνεται ἐκ τοῦ* m. Καὶ *ἔσται ἄρα τούτων κειμένων* A : B = n : m· *ὡς ἔχειν ἅπαντα λόγον* A : B, *δι' ὁλοχερῶν ἀριθμῶν* n : m *ἐκτίθεσθαι, τῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καθισταμένων, ἤτοι ἐπ' ἀκριβὲς, ἢ ὡς ἔγγιστα· καὶ τῆς ἀπάτης, εἴτις ἐγχωροίη, τοσούτῳ ἐλάσσονος οὔσης, ὅσῳ μείζων ὁ ἀριθμὸς* m *προσλαμβάνεται.*

## ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 161. Τῶν A *καὶ* B *πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς ἐκείνους ἀναλόγως ἐχόντων* A : B = n : m, *ἔσται (τοῦ* N *ἑτερόν τινα ἀριθμὸν ὑποσημαίνοντος)* A = nN, *καὶ* B = mN. *Ἔνθεντοι καὶ* $\frac{A}{B} = \frac{nN}{mN}$. *Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον τῶν κλασμάτων ἐπαναχθὲν γίνεται* $\frac{n}{m}$, *ἔσται καὶ* $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$. *Ἤτε τῶν ἀριθμῶν ἀναλογία* A : B = n : m, *ἀεὶ κλάσματα ἀποδώσει ἴσα ἀλλήλοις τάδε* $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 162. *Ἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν τὰ κλάσματα* $\frac{A}{B}$ *καὶ* $\frac{n}{m}$ *ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἐπειδὴ οἱ τοῦ πρώτου ὅροι, ἀεὶ προκύπτουσι τῶν τοῦ δευτέρου ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι ὁλοχεροῦς, ἢ κλασματικοῦ πολλαπλασιαζομένων* (§. 106.), *ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ᾖ* N, *ἔσται* A = nN, *καὶ* B = mN. *Ἔνθεντει ἐπειδὴ* nN : mN = n : m, *ἔσται καὶ* A : B = n : m. *Καὶ δύο ἄρα ὁποιαδήτινα κλάσματα, ἀλλήλοις ἴσα, ἀναλογίαν δώσουσι, τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τοὺς ἰδίους αὐτῶν παρονομαστὰς ἀναφερομένων.*

## ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 163. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $n$ καὶ $m$ οἱ ἐλάχιστοι ὦσι, τῶν οἷς ἂν ὁ τῶν ἀριθμῶν λόγος $A : B$ ἐκφέροιτο, οὕτω δηλαδὴ ὡς εἶναι $A : B = n : m$, ἔσονται δὴ ἐλάχιστοι καὶ τῶν οἷς ἂν παραστάιη τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$. Καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν οἷς ἂν τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ παραστάιη, ἔσονται ἐλάχιστοι καὶ τῶν, ὧνπερ ὁ λόγος τοῦ $A : B$ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ τηνικαῦτα ἄρα ὁ ἀριθμὸς $N$, ὃς πολλαπλασιασθεὶς μὲν διὰ $n$ παράγει τὸν $A$, πολλαπλασιασθεὶς δὲ διὰ $m$ παράγει τὸν $B$, ὁλοχερὴς ἐστί. (§. 107.). Καὶ δυοῖν ἀριθμῶν δοθέντων $A$ καὶ $B$, εὑρεθήσονται οἱ τούτων ἐλάχιστοι, ὧν ὁ λόγος $A : B$, ἑκατέρου διὰ τοῦ κοινοῦ μεγίστου διαιρέτου τῶν ἐν αὐτοῖς διαιρεθέντος.

## ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε.

§. 164. Ἐν γένει δὲ ἀμφοῖν τῶν ὅρων τοῦ λόγου $A : B$ διὰ τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι κλασματώδους, ἢ ὁλοχεροῦς $n$ πολλαπλασιασθέντος, τροπὴν ὁ λόγος οὐδεμίαν ὑποστήσεται ὅλως. Ἐὰν γὰρ ᾖ $A = \frac{n}{m} . B$, ἔσται $nA = \frac{n}{m} . nB$. Γίνεται δὲ $\frac{n}{m} . nB$ ἐκ τοῦ $nB$, τὸν αὐτὸν τρόπον ὃν καὶ $\frac{n}{m} . B$, γίνεται ἐκ τοῦ $B$. Ἄρα $nA : nB = A : B$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ διὰ τοῦ κλάσματος διελεῖν, οὐδὲν ἐστὶν ἢ αὐτόχρημα πολλαπλασιάζειν δι᾽ ἀντιστρόφου τοῦ κλάσματος (§. 97.)· ἅπας δὲ ἀριθμὸς κλάσματος δίκην ἔχει λαμβάνεσθαι (§. 84.)· αὐτὸ τοῦτο ἀληθεύσει τὸ εἰρημένον, καὶ τῶν $A$ καὶ $B$ διὰ τοῦ αὐτοῦ $n$ διαιρεθέντων. Ἀμέλει τοι ὁ λόγος $A : B$, οὐδὲν μᾶλλον οὐδὲ παρὰ τοῦτο τραπήσεται.

## ΠΟΡΙΣΜΑ ϛʹ.

§. 165. Ἐπεί τε ἐφ᾽ οἱασοῦν ἀναλογίας Α : Β = Γ : Δ, εἴπερ $A = \frac{n}{m}B$, ἔστι καὶ $\Gamma = \frac{n}{m}\Delta$· τουτέστιν, ἐπεὶ οἱ τῶν λόγων ἡγούμενοι ὅροι προκύπτουσι τῶν ἑπομένων Β καὶ Δ, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\frac{n}{m}$ πολλαπλασιαζομένων· ἔσονται δὴ καὶ ἐφ᾽ οἱασοῦν ἀναλογίας, ἧς ἅπαντες οἱ ὅροι ὁμογενεῖς, οἱ τῶν λόγων ἡγούμενοι ὅροι, ὡς οἱ ἑπόμενοι. Καὶ τῶνγε ὅρων τῆς ἀναλογίας Α : Β = Γ : Δ ἐναλλὰξ ληφθέντων, ἀναλογία ἀληθὴς ἀνακύψει Α : Γ = Β : Δ. Ἐὰν μέντοι ἑτερογενεῖς ὦσιν οἱ ὅροι τῶν λόγων Α : Β καὶ Γ : Δ τῶν ἀλλήλοις ἴσων, ὁ λόγος Α : Γ, περινοηθῆναι οὐ δυνήσεται, οὐδ᾽ ὁ Β : Δ.

## ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 166. Ἐὰν ᾖ

$$\begin{array}{l} K : \Lambda = A : B \\ M : N = B : \Gamma \\ \Pi : \Phi = \Gamma : \Delta \\ P : \Sigma = \Delta : E, \end{array}$$

καὶ οὕτως ἑφεξῆς·

Τουτέστιν ἐὰν τὸ ἐν τῷ λόγῳ Α : Β ἑπόμενον ἡγούμενον ᾖ ἐν τῷ ἑφεξῆς Β : Γ, καὶ τὸ ἐν αὐτῷ τούτῳ ἑπόμενον ἡγούμενον ἐν τῷ Γ : Δ, καὶ οὕτω διὰ παντός. Ἐκφέρηται δὲ τῶν τοιῶνδε ἕκαστος λόγων, καὶ δι᾽ ἄλλων ὅρων· οἷον ὁ μὲν Α : Β διὰ Κ : Λ, ὁ δὲ Β : Γ διὰ Μ : Ν, καὶ οὕτως οἱ λοιποί. Εἰρήσεται δή, τὸν μὲν Α : Γ λόγον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ, ἢ ἐκ τῶν ἴσων Κ : Λ καὶ Μ : Ν· τὸν δὲ Α : Δ ἐκ τῶν Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ· ἢ ἐκ τῶν ἴσων Κ : Λ, καὶ Μ : Ν, καὶ Π : Φ. Τὸν δὲ Α : Ε, ἐκ τῶν Α : Β, Β : Γ, Γ : Δ, Δ : Ε· ἢ ἐκ τῶν Κ : Λ, Μ : Ν, Π : Φ, Ρ : Σ· καὶ οὕτως ἑφεξῆς.

## ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 167. Ἐὰν οἱ λόγοι Α : Β, Β : Γ, Γ : Δ, Δ : Ε, ἅπαντες ἀλλήλοις ἴσοι τυγχάνωσιν, ὁ λόγος Α : Γ, ὁ ἐκ τῶν δυοῖν Α : Β, καὶ Β : Γ συγκείμενος, πρός γε τούτων τὸν ἕτερον Α : Β, ἢ Β : Γ, ἢ πρὸς τὸν Κ : Λ, ἢ τὸν Μ : Ν, τοὺς ἐκείνοις ἴσους, **λόγος διπλασίων** κληθήσεται. Ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ λόγος ὁ Α : Δ, πρός γε τὸν ἕνα τούτων Α : Β, ἢ ὁντινοῦν αὐτῷ ἐξισούμενον ἄλλον, **λόγος τριπλασίων.** Καὶ **τετραπλασίων** δὲ ὁ ἐκ τεττάρων· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Πρὸς δέ γε ἕκαστον τῶνδε τῶν εἰρημένων λόγων, ὁ λόγος Α : Β, ἢ ὁστισοῦν αὐτῷ ἴσος, εἰρήσεται λόγος **ἁπλοῦς.** Καὶ **ὑποδιπλασίων** μὲν, πρός γε τὸν αὐτοῦ διπλασίονα, **ὑποτριπλασίων** δὲ πρὸς τὸν τριπλασίονα· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 168. Λόγος ἅπας, ἐξ ὁποσωνοῦν τὸν ἀριθμὸν ἄλλων, συγκεῖσθαι δύναται ἀπείροις τοῖς τρόποις. Ἔστω γὰρ λόγος Α : Δ ἐκ τριῶν συγκροτητέος· ληφθήτωσαν δὲ ὅροι Β καὶ Γ, ᾗπερ ἔτυχε. Καὶ ἔστω δὴ ὁ λόγος Α : Β ἴσος τῷ λόγῳ Κ : Λ· ἔστω δὲ ὁ Β : Γ = Μ : Ν. καὶ ὁ Γ : Δ = Π : Φ, καὶ συγκείσεται δήπου ὁ Α : Δ, ἐξ ἁπάντων τῶν Α : Β, Β : Γ, Γ : Δ, ἢ ἐκ τῶν Κ : Λ, Μ : Ν, Π : Φ. Παραπλησίως οὖν καὶ λόγος ἕκαστος, ἐκ λόγων ἴσων συγκεῖσθαι δύναται ὁποσωνοῦν τὸν ἀριθμόν. Καὶ δυνατὸν ἄρα τὸν αὐτὸν λόγον, νῦν μὲν ἁπλοῦν, νῦν δὲ σύνθετον ἀποκαλεῖν, διπλασίονα, τριπλασίονα, ἢ ὁπωσοῦν ἄλλως πολλαπλασίονα, ᾗπερ ἄν τις αὐτὸν ἐκπροϊόντα νοήσειεν.

## ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 169. Ὁ λόγος ὁ διπλασίων ὑπέρτερος τοῦ ἁπλοῦ εἶναι εἰρήσεται· τοσούτῳ δὲ μᾶλλον τοῦ πρὸς

αὐτὸν

αὐτὸν ὑποδιπλασίονος, ἢ ἔτι τῦ ὑποτριπλασίονος. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ τριπλασίων, ὑπέρτερος τῦ διπλασίονος· πολλῷ δὲ μᾶλλον τῦ ἁπλῦ, καὶ ἔτι τῦ πρὸς αὐτὸν ὑποδιπλασίονος· καὶ ὕτω κἀν τοῖς λοιποῖς. Τὐναντίον δὲ ὁ ἁπλῦς ὑποδεέστερος εἶναι ῥηθήσεται τῦ διπλασίονος, καὶ ὁ διπλασίων τῦ τριπλασίονος, καὶ ὅδε τῦ τετραπλασίονος· καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ὅθεν καὶ τίποτε νοητέον εἶναι τὸ τῦ λόγυ ὕψωμα, συνιδεῖν ῥᾴδιον.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 170. Τὸ τῦ λόγυ ὕψωμα μέγεθος ὑπὸ πολλῶν ὀνομάζεται, κατὰ σημασίαν γεμὴν ὡς λίαν διαφέρυσαν, τῆς καθ᾽ ἣν λόγος λόγυ μείζων, ἢ ἐλάσσων εἶναι λέγεται (§. 157.). Οὕτω γὰρ ὁ διπλῦς λόγος μακρῷ τῦ διπλασίονος διενήνοχε, καὶ ὁ τριπλῦς τῦ τριπλασίονος, ὅ,τε ὑποδιπλῦς τῦ ὑποδιπλασίονος· καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοιωνύμων ὡσαύτως. Διπλῦς γὰρ λέγεται, ἐν ᾧ τὸ ἡγύμενον, δὶς τοσῦτον, ὅσον ἐστὶ τὸ ἑπόμενον· οἷον 2 : 1, 6 : 3, 10 : 5· καὶ τριπλῦς ἐν ᾧ τρίς· οἷον 3 : 1, 6 : 2, 15 : 5. Ὑποδιπλῦς δὲ, ἐν ᾧ τὸ ἡγύμενον τῦ ἑπομένυ ἡμίσεια ἐστίν· ὡς ἐν τοῖσδε 1 : 2, 3 : 6, 5 : 10· κἀντεῦθεν καὶ τὰ τοιυτώδη ἄλλα τῶν ὀνομάτων ὀνομάζεται, ἃ τὸν λόγον πάντη διορίζει, καὶ ἀπείρυς διαχορηγεῖ τὺς ὅρυς, δι᾽ ὧν ἂν αὐτὸς παρίστῶτο. Διπλασίων δὲ λόγος ὐδεὶς καλεῖται, εἰ μὴ σχέσει τῇ πρὸς ἕτερόν τινα, τὸν ὡς ἁπλῦν ἐπιθεωρύμενον. Τύτυ δὲ μεταβαλόντος, ὁ τὸ πρὶν διπλασίων, τάχα ἂν τριπλασίων γένοιτο, ἢ ὑποδιπλασίων· διπλασίων δὲ πάντως μετὰ τὴν τύτυ τροπὴν, ὐκ ἂν μένοι. Πρὸς ὖν διαφυγὴν τῆς περὶ ταῦτα συγχύσεως, μᾶλλον ἂν συντελέσειε τὰς πλείστην ἔχυσας τὴν διαφορὰν ἐννοίας, διαφέρυσι καὶ τοῖς ὀνόμασι διασημαίνειν, τὸ μὲν, τῦ λόγυ μέγεθος ἀποκαλοῦντας, τὸ (§. 157.) ὁρισθὲν, τὸ δὲ ὕψωμα, ἢ κατ' ἄλλην, καὶ ἄλλην ἐννοίας ἐκδοχὴν τῷ αὐτῷ ὀνόματι ἀποδιδόναι.

## ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 171. Ἐὰν ᾖ, $A : B = \Gamma : \Delta$

Ἔσται καὶ

$$B : A = \Delta : \Gamma$$
$$A + B : A = \Gamma + \Delta : \Gamma$$
$$A + B : B = \Gamma + \Delta : \Delta$$
$$A : A + B = \Gamma : \Gamma + \Delta$$
$$B : A + B = \Delta : \Gamma + \Delta$$
$$A - B : A = \Gamma - \Delta : \Gamma$$
$$A - B : B = \Gamma - \Delta : \Delta$$
$$A : A - B = \Gamma : \Gamma - \Delta$$
$$B : A - B = \Delta : \Gamma - \Delta$$
$$A + B : A - B = \Gamma + \Delta : \Gamma - \Delta$$
$$A - B : A + B = \Gamma - \Delta : \Gamma + \Delta$$

## ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 4. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ληφθείσης ἀναλογίας $A : B = \Gamma : \Delta$, τὰ ἐν τοῖς λόγοις ἑπόμενα B καὶ Δ, εἰς μέρη ἴσα διαιρεθῇ, ἰσάριθμως ἑκάτερον m, ἐξέσται ἀεὶ τὸ A ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ n τῶν $\frac{B}{m}$ μερῶν, συγκείμενον νοεῖν· ἐξ οὗ δὴ ἀριθμοῦ τῶν μερῶν $\frac{\Delta}{m}$ συγκείσεται καὶ τὸ Γ (§. 151.)· τούτου δὲ κειμένου, αὐτόθεν δῆλον, ὅτι καὶ ἐφ' οἱασοῦν τῶν ἀναλογιῶν, τῶν ἐξ ἐκείνης εἰρημένων ἐπιφέρεσθαι, ὁ μὲν πρῶτος τῶν ὅρων τοσάδε μέρη περιέξει, ὅσα ὁ τρίτος· ὁ δὲ δεύτερος, ὁπόσα ὁ τέταρτος. Καὶ τοῦ μὲν πρώτου τῶν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ὅρων τὰ μέρη, τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ τὸ μέγεθος ἐξισωθήσεται· τὰ δὲ τοῦ τρίτου τοῖς ἐν τῷ τετάρτῳ. Τοιγαροῦν καὶ πᾶσαι αἱ τεθεῖσαι ἀναλογίαι ἀληθεῖς ἔσονται (§. 147.).



## ΠΟΡΙΣΜΑ.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 172. Ὡσαύτως δειχθήσεται, ὡς ἐὰν ᾖ,

$$A : B = \Gamma : \Delta$$

Καὶ $E : B = Z : \Delta$

Ἔσαι καὶ $A + E : B = \Gamma + Z : \Delta$

καὶ $A - E : B = \Gamma - Z : \Delta$

τῶν γὰρ ποσοτήτων B καὶ Δ, ἰσαρίθμως κατὰ τὸ m εἰς μόρια ἴσα ἀλλήλοις καθ' ἑκάτερον ἰδίᾳ διῃρημένων, ἐξ ὧν ἂν οἱ ἐν τοῖς λόγοις ἡγέμενοι ὅροι συγκέοιντο, ἐὰν ᾖ $M = \frac{B}{m}$, καὶ $T = \frac{\Delta}{m}$. Καὶ $A = nM$, καὶ $E = hM$, ἔσαι δὴ καὶ $\Gamma = nT$, καὶ $Z = hT$ (§. 151.). Ἔνθεντοι καὶ $A + E = nM + hM = (n + h) M$. Καὶ $\Gamma + Z = nT + hT = (n+h) T$. Καὶ συγκείσεται ἄρα A + E, ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $n + h$ τῶν μορίων M, ἐξ οὗ δὴ ἀριθμοῦ τῶν μορίων T, σύγκειται καὶ Γ + Z. Τὸν δ' αὐτὸν ἂν ὑπεσυναφθείη τρόπον, καὶ $A - E$ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $n - h$ τῶν μορίων M συγκεῖσθαι, ἐξ οὗ τῶν T μορίων ἀριθμοῦ, καὶ $\Gamma - Z$ συνέστηκεν.

## ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 173. Ἐὰν οἱ λόγοι A : B καὶ Γ : Δ ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν· οἵτε τοῦ πρώτου ὅροι, ὁμογενεῖς τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ· ληφθῶσι δὲ τάγε κεφάλαια, καὶ αἱ διαφοραὶ τῶν ἡγουμένων, καὶ ἑπομένων· ἔσαι καὶ ὁ λόγος $A + \Gamma : B + \Delta$, ἢ $A - \Gamma : B - \Delta$, ἴσος ὁποτερωοῦν τῶν προτέρων A : B, ἢ Γ : Δ.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας $A : B = \Gamma : \Delta$ οὕτω Σχ. 4.
διαιρεθέντων, ὡς ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ προτοῦδε θεω- καὶ 5.
ρήματος, ἐπειδήπερ ἐν τῷ A, τοσάδε ἔνεσι μόρια,

ὅσα καὶ τῷ Γ, πρόσθες ἕκαστον μέρος τοῦ ποσοῦ Α, τῷ μέρει τοῦ ποσοῦ Γ τῷ πρὸς ἐκεῖνο ἀντιστιχοῦντι, καὶ ἐκ τῶν οὕτω συστάντων μερῶν σύνθες τὸ Ε, ὅπερ ἔσται $= А + Γ$, καὶ τοσάδε μέρη ἴσα συνέξει, ὅσα ἔχει τὸ Α, ἢ τὸ Γ· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἑκάστου τῶν ἐν τῷ ποσῷ Β μερῶν ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ Δ προσεπιτεθέντος συστήσεται τὸ Ζ, ὅπερ ἴσον ἔσται τῷ $Β + Δ$, καὶ τοσάδε περιέξει μέρη, ὅσα ἔχει τὸ Β, ἢ τὸ Δ. Κἀντεῦθεν δὲ ἑπομένως ἔσται $Ε : Ζ = Α : Β = Γ : Δ$ (§. 147.)· ὅπερ ἰῶ τὸ πρῶτον.

Ὑπὲρ δὲ τῶν διαφορῶν, ληφθήτω ἡ διαφορὰ ἡ μεταξὺ δυοῖν ὁποιωνοῦν μορίων τῶν ἐν τοῖς ὅροις Α καὶ Γ, τῶν ἀλλήλοις ἀντιστιχούντων, κἀκδὲ τουτωνὶ τῶν διαφορῶν, αἵπερ ἴσαι τε ἔσονται, καὶ τοσαίδε τῷ ἀριθμῷ, ὅσα μέρη ἔνεισι τῷ Α, ἢ τῷ Γ, συντιθέσθω τὸ Η, ὃ ταυτὸν ἔσται τῷ $Α - Γ$· ταυτὸ δὲ γινέσθω κἀπὶ τῶν ὅρων Β, καὶ Δ· καὶ ἔσται ὁ οὕτω προκύπτων ὅρος $Θ = Β - Δ$· ὃς τοσάδε μέρη ἕξει, ἀλλήλοις τε, καὶ τοῖς ἐν τῷ Η ὅρῳ μέρεσιν ἴσα, ὅσα ἔχει τὸ Β, ἢ τὸ Δ. Ἄρ' οὖν καὶ $Η : Θ = Α : Β = Γ : Δ$· ὅπερ ἰῶ θάτερον.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 174. Ἔνθεν τοι ἐν γένει, ἐὰν οἱ λόγοι Α : Β, Γ : Δ, Ε : Ζ, Η : Θ, κτλ., ἅπαντες ἴσοι ἀλλήλοις ὦσι· τουτέστιν ἐὰν ᾖ,

$$\begin{array}{l} Α : Β = Α : Β \\ Γ : Δ = Α : Β \\ Ε : Ζ = Α : Β \\ Η : Θ = Α : Β, \end{array}$$

ἔσται καὶ,

$$(Α + Γ + Ε + Η) : (Β + Δ + Ζ + Θ) = Α : Β,$$

ἢ γοῦν,

$$(Α - Γ + Ε - Η) : (Β - Δ + Ζ - Θ) = Α : Β.$$

Ὁποῖοι δ' ἂν ὦσιν οἱ ἀφαιρούμενοι ὅροι, καὶ ὁποσοιοῦν τὸν ἀριθμόν, εἰ μόνον ἀνὰ δύο ἀεὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὦσι λόγον ἀνήκοντες.

ΘΕΩΡΗ