

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΟΥ
ΚΥΒΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
ΣΤΑΣΕΩΣ,
ΚΑΙ
ἘΥΡΕΣΕΩΣ ΤΗΣ ΚΑΤ' ΑΥΤΟΝ ῬΙΖΗΣ.

§. α΄.

Ωσπερ ἐπὶ τῷ τετραγωνικῷ ἀριθμῷ τὰ μηδενικὰ σημεῖα, δις τοσαῦτα εἰσαγεται, ἢ ὅσοι ἐπὶ τῆς ῥίζης (§. 132.), ἔτως ἐπὶ τῷ κύβῳ τρεῖς τοσαῦτα, ὡς ἢ τῷ πολλαπλασιασμῷ φύσις ἀπαιτεῖ. (§. 69.). Οἷον Ῥίζ. 50, Τετρ. 2500, Κύβ. 125000. Καὶ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν δὲ κλασματικῶν (§. 133.) Ῥίζ. 0, 5, ἢ 0, 05· Τετρ. 0, 25, ἢ 0, 0025· Κύβ. 0, 125, ἢ 0, 000125· Δις μὲν τοσούτων μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐπὶ τῷ τετραγώνῳ τῶν χαρακτηριστικῶν ἀριθμημάτων, τρεῖς δ' ἐπὶ τῷ κύβῳ τοσούτων, ὅποσοι τῷ τοιούτῳ γίνονται ἐπὶ τῆς ῥίζης εἰσι. Καὶ ἐν τῷ τῷ κλασματικῷ δὲ κύβῳ, ἀντὶ μὲν ἀριθμητῶν ὁ κύβος ἐστὶν ὁ τῷ ἀριθμητῶν, ἀντὶ δὲ παρνομαστῶν ὁ τῷ παρνομαστῶν· ὅν τῷ $\frac{2}{3}$ κύβος $\frac{8}{27}$ τῷ δὲ $\frac{1}{2}$, ὁ $\frac{1}{8}$, ὡσπερ ἐν τῷ τῷ κλασματικῷ τετραγώνῳ, ἀμφω δὲ ὅροι εἰσὶν οἱ τῶν τῆς ῥίζης τετραγῶνοι. (§. 134.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. β΄. Ἀριθμῶν τῶν ἐκ δυοῖν μερῶν συγκειμένων ὁ κύβος, περιέχει μὲν ἑκατέρων τῶν κύβων τῶν μερῶν, περιέχει δὲ προσέτι, τρεῖς μὲν τὸ ὑπὸ

τῆ τετραγώνῃ τῆ Α. μέρος, καὶ ὑπὸ τῆ Β. ἀπλῶς γινόμενον, τρεῖς δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῆ τετραγώνῃ τῆ Β. μέρος, καὶ ὑπὸ τῆ Α. ἀπλῶς, ἀνάπαλιν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γὰρ τὸ τετραγώνον $AA + 2AB + BB$ (§. 136.) διὰ τῆς ἑαυτῆ ρίζης πολλαπλασιασάσα δεῖσαν εἰς κύβου γένεσιν, πολλαπλασιασέον ἕκαστον τῶν ἐκείνων μερῶν, δι' ἑκατέρη τῶν ταύτης (§. 129.)· Καὶ ἀποβήσεται ἕτως ὁ κύβος $AAA + 2AAB + ABB + AAB + 2ABB + BBB = AAA + 3AAB + 3ABB + BBB$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. γ'. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς ληφθῆ, φέρε ὁ 3, εἰς μέρη δύο 2 + 1 διηρημένος, ὁ ἀπ' ἐκείνου κύβος σωτεθείσεται ἕτω. Κύβος ὁ ἀπὸ τῆ Α. μέρος

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

Κύβος ὁ ἀπὸ τῆ Β.

$$1 \times 1 \times 1 = 1$$

Τρεῖς τὸ Τετρ. τῆ Α. ἐπὶ τῆ Β. 3. (2 × 2). 1 = 12

Τρεῖς τὸ Τετρ. τῆ Β. ἐπὶ τῆ Α. 3. (1 × 1). 2 = 6

Ὁ ὅλοχερῆς Κύβος = 27

Ἐὰν δὲ ἀντὶ ρίζης ἀριθμὸς ληφθῆ 21 = 20 + 1

Συστήσεται Κύβ. ὁ ἀπὸ τῆ Α. μέρος = 8000

ὁ ἀπὸ τῆ Β. = 1

Τὸ τρεῖς ὑπὸ τῆ Τετρ. τῆ Α. καὶ ὑπὸ τῆ Β. = 1200

Τὸ τρεῖς ὑπὸ τῆ Τετρ. τῆ Β. καὶ ὑπὸ τῆ Α. = 60

Ὁ ὅλοχερῆς κύβος 9261

Ἐὰν δὲ τῷ ἐπὶ τῆς ρίζης ἀντὶ Β. μέρος λαμβανόμενῳ χαρακῆρι, μηδενικόντι σημεῖον προσὸν εἰς δεκάδας τὰς αὐτῷ μονάδας ἐξαιρη, τῷ ὡς ἀνωτέρω προκύπλοντι κύβῳ, καὶ μηδενικά ἔτι σημεῖα προσθετέον τρία. Οἶον εἰν ἡ ρίζα 21 τῆ τῆ 0 προσθε-

σει κατὰ τὸ τέλος ἐπὶ τῷ 210 προσβιβαθῆ, τὸ μὲν πρῶτον αὐτῆς μέρος ἔσται 200, τὸ δὲ δεύτερον 10· ὅ, τε ἐκ τέτων ὀλοχερῶς συγκροτέμενος κύβος 9261000, αὐτὸς ἔσται ὁ ἀνωτέρω, μηδενικὰ τρία σημεῖα προσαρρηληφῶς. (δ. α.).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

δ. δ'. Τὸν αὐτὸν δὲ συγκείσεται τρόπον ὁ κύβος καὶ τῶ ἀντὶ ρίζης ἀριθμῶ ἐκ πλειόνων ἢ δύο χαρακλήρων συγκροτέμενος· οἷον τῶδε 214. Διαιρεθέντος γὰρ εἰς μέρη καὶ ἔτω δύο, οἷον 210, καὶ 4, ληφθήσεται παραπλησίως ὁ τῶ Α. μέρος 210 κύβος· καὶ ὁ τῶ Β. 4· καὶ τὸ τρεῖς ὑπότε ἐκείναι τετραγωνιούτων, καὶ τέτα ἀπλῶς γινόμενον· καὶ τὸ τρεῖς ἀνάπαλιν ὑπὸ τῶ κατὰ τὸδε τετραγώνη, καὶ ἀπλῶς ἐκείναι· καὶ προσεθείσεται ταῦτα πάντα εἰς τῷ τῶ ὀλικῶ κύβη συμπλήρωσιν. Καὶ τότε δὴ γυνησεται ἐφεξῆς, ἐξ ὅποσων ἂν ἡ ρίζα χαρακλήρων συγκέοιτο· οἷον εἰς παραδειγμα ἀντὶ ρίζης ὀλικῆς προκειμένης τῶ Αριθμῶ 75342, ἐκ τῶν εἰρημένων σκιχέων ἔτως ἡμῖν ὁ ὅλος κύβος συγκροτηθήσεται.

Α.

Ῥίζα μερικὴ 75 = 70 + 5.	
Κ. 70 × 70 × 70 =	343000
Κ. 5 × 5 × 5 =	125
Τρεῖς τὸ Α. γινόμενον 3. (70 × 70) 5 =	73500
Τρεῖς τὸ Β. 3. (5 × 5) 70 =	5250
Κύβος ὁ ἐκ τέτων	421875

Β.

Ῥίζα μερικὴ 753 = 750 + 3	
Κ. 750 × 750 × 750 =	421875000
Κ. 3 × 3 × 3 =	27
Τρεῖς τὸ Α. γινόμε. 3. (750 × 750) 3 =	5062500
Τρεῖς τὸ Β. 9. (3 × 3) 750 =	20250
Κύβος ὁ ἐκ τέτων	420957777

Γ.

Ῥίζα μερ. $7534 = 7530 + 4$ Κ. $7530 \times 7530 \times 7530 = 426957777000$ Κ. $4 \times 4 \times 4 = 64$ Τρὶς τὸ Α. γινόμε. $3 \cdot (7530 \times 7530) 4 = 680410800$ Τρὶς τὸ Β. $3 \cdot (4 \times 4) 7530 = 361440$ Κύβος ὁ ἐκ τέτων 427638549304

Δ.

Ῥίζα ὀλική $75342 = 75340 + 2$ Κ. $75340 \times 75340 \times 75340 = 427638549304000$ Κ. $2 \times 2 \times 2 = 8$ Τρὶς τὸ Α. γινόμε. $3 \cdot (75340 \times 75340) 2 = 34056693600$ Τρὶς τὸ Β. $3 \cdot (2 \times 2) 75340 = 904080$ Ὁ ὀλικὸς Κύβος 427672606901688

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. ε'. Ἀριθμῶ δοθέντος Κυβικῶ, τῶ κατ' αὐτὸν Ῥίζαν ἀποδένασι.

ΛΥΣΙΣ.

Προκειμένη τῷ πρὸ μικρῶ συγκροτηθέντος κύβου, διαμεθρήτασαν οἱ χαρακίηρες εἰς κόμματα, εἰνὰ τρεῖς διασειλόμενοι· μηδὲν διαφέρον εἰς τὸ πρὸς τὰ λευὰ τελευταῖον κόμμα, τριῶν ἐλαίσοναι περιείληφον· ἔτως·

	427	672	606	901	688	(75342 - P
	343	-	-	-	-	- A
	84	672				
147. 5	- 73	5-	-	-	-	- B
75. 7	- 5	25-	-	-	-	- Γ
5. 5. 5	-	125	-	-	-	- Δ
		5797	606			
16875. 3	- 5062	5-	-	-	-	- E
27. 75	-	20	25-	-	-	- Z
3. 3. 3	-	-	27	-	-	- H
		714829	901			
1701027. 4	- 680410	8-	-	-	-	- Θ
48. 753	-	361	44-	-	-	- I
4. 4. 4	-	-	64	-	-	- K
		34057597	688			
170283468. 2	- 34056693	6-	-	-	-	- Λ
12. 7534	-	-	904	08	-	- M
2. 2. 2	-	-	-	8-	-	- N

000000000000

Καὶ Α. ληφθήτω ὁ ἐγγύς ἐλάσιων τῆ πρώτῃ πρὸς ἀριστερὰν κόμματος κύβος, (εἰμὴ αὐτὸ τῆτα τὸ κόμμα ἦ), ἢ δὲ ἐκείνη ρίζα ἀκτίσοιχος τῷ Ρ γραφήτω ὅ, τε κύβος αὐτὸς ὁ ἀπεναντίον τῆ Α, ἀπὸ τῶν τῆ πρώτῃ τῆδε κόμματος χαρακλήρων ἀφαρεθῆτω καὶ τῷ λοιπῷ 84 ὑπογραφήντι, τὸ δῶτερον ἐξῆς τῶν κομμάτων σιωπηκαταγραφῆτω.

Β. Τῆ ὡδε προκειμένη ἀριθμῶ, διὰ τῆ τριπλῆ τετραγώνῃ τῆ Α. τῆς ρίζης μέρος διαρεθάντες, τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἰς δῶτερον τῆς ρίζης χαρακλήρῃ ἀποτιθέτω· εἶτα τὸ μὲν ὑπὸ τῆ διαρέτε καὶ τῆ καινῆ πηλίκῃ, κατὰ τὸν πρῶτον πρὸς τὰ λοιπὰ χαρακλήρῃ τῆ δῶτερον κόμματος ἐκλεμματιζόμενον ὑπογραφέ-

γραφείτω, ὡς τὸ ἀντικρὺ τῆ Β. Τὸ δὲ ὑπὸ τῆ τριπλῆ τετραγώνῃ τῆ καινῆ πηλίκῃ, καὶ ὑπὸ τῆ πρὸ τέττα τῆς ρίζης μέρος γινόμενον κατωτέρω ὑπὸ τὸν μέσον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τῆ Γ. Ὁ δέτοι κύβος ὁ ἀπὸ τῆ εἰρημνῆ καινῆ πηλίκῃ, ὑπὸ τὸν ἕχατον τῶν ἐν τῷ κόμματι χαρακίῃρων καὶ δεξιότατον, ἔτι κατωτέρω ἐκπερατέω, ὡς ὁ ἀντικρὺ τῆ Δ. Τῆτων δὲ συγκεφαλαωθέντων, καὶ τῆ προκειμῆς ἀριθμῆ ἀφαιρεθέντων, τὸ λοιπὸν ὅσον ὑποσημειώσω, καὶ τῷδε, τὸ ἐφεξῆς τῆ κύβῃ κόμμα τὸ τρίτον προαναταγραφείτω.

Γ. Τῷ τρεῖς ἀπὸ τῆς ἤδη εὐρεθείσης ρίζης σιωπησῶτι τετραγώνῳ, τῆ προκειμῆς αὐτῆς ἀριθμῆ διακρεθέντος, τὸ πηλίκον ὡς μέρος ἄλλο τῆς ρίζης καὶ γὼν ἀποσημειώσω. Εἶτα ἐξῆς ὡς ἀνωτέρω τὰ τρεῖς γινόμενα ἐκεῖνα ὑπογραφείτω, ἄλλο μετ' ἄλλο. Τὸ μὲν ὑπὸ τῆ διακρέτε, καὶ τῆ ἄρτι ἀνακύψαντος πηλίκῃ, ἐπὶ τὸ λαϊότατον ὁμοίως τῆ καταχθέντος νέον κόμματος ἐκλερματιζόμενον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τῆ Ε. Τὸ δὲ ὑπὸ τῆ τριπλῆ τετραγώνῃ τῆ καινῆ πηλίκῃ, καὶ τῆς προαναφανείσης ρίζης πρὸς τὰ λαϊά, ἐπὶ τὸ μέσον, ὡς τὸ ἀπέναντι τῆ Ζ. Ὁ δὲ τέως ἀπὸ τῆ ἀριφανῆς πηλίκῃ κύβῃ, ἐπὶ τὸ δεξιότατον, ὡς τὸ ἀπέναντι τῆ Η. Καὶ τὸ ἐκ τῶν τριῶν δὲ τέτων σιωπησῶν, ἀπὸ τῆ προκειμῆς ἀριθμῆ ἀφαιρεθέν, τὸ ἐπόμενον κόμμα καταγέω.

Δ. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον τῆς ἐφόδῃ χωρέσεως, καὶ τῶν ἔτως αἰεὶ τῆ ἐκάστῃ τῶν κομμάτων καταγραφῆ, καὶ τῆ τῆ καινῆ πηλίκῃ ἀνακύψει διαπολλαπλασιασμῆ γινομένων, ὡσαύτως ἀντικρὺ τῶν γραμμάτων Θ, Ι, Κ, καὶ Λ, Μ, Ν, σημειμένων, καὶ ἀφαιρεμένων, ἢ ἐλοχερῆς τελευταῖαν κυβική ρίζα ἀπεδίδοται.

ρεῖς ἀν ληφθεῖν, μηδὲ κεκλασμένα, πρὸς τὸ ἀκριβῆς εἶσιν ἀναπόδοτοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. η'. Ἡ τῷ κεκλασμένῳ κυβικῇ ρίζῃ, ἐκ ἀν ἀποδοθεῖν, μὴ καὶ τῷ ἐν τῷ κλάσματι ἀριθμητῷ κυβικῷ ὄντος, καὶ τῷ παρονομαζόντος· ὡς ἐν τῷ τοῦ η', ἔσται μὲν ὁ τῆς ρίζης ἀριθμητῆς ρίζα τῷ κατὰ τὸν κύβον ἀριθμητῷ, ἔσται δ' ὁ παρονομαστῆς τῷ παρονομαστῷ. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἢ ἐκ μονάδων ἀπλῶν καὶ δεκαδικῶν κλασμάτων συγκείμενος, εἰς δὲ ρίζαν ληφθεῖς κυβωθῇ, ἔχῃ ἐκάτερον τῶν ἐν αὐτῷ διατῷ κέρματος διεσαλμύων ἔρων ἴδιον κύβον παρέρχεται. Τῷ γὰρ 2, 3 ὀλικῶς ἐκ ἔστι κύβος ὁ 8, 27, ἀλλ' ὁ 12, 167. Διὸ καὶ ἐκ τέττα ἡ κυβικῇ ρίζῃ 2, 3 ὑπεξάγεται, ἐξ ἐκείνου δὲ ἔ· ἀλλ' ἡ 2, 0222 κ.ζ. ἐπ' ἀπειρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. θ'. Εἰ γὰρ καὶ ὑπὲρ ἀριθμὸν οἱ ἀριθμοὶ εἰσὶν, ὧν ἐκ ἔστιν ἐπ' ἀκριβῆς τινὲς κυβικῶν ρίζων λαβεῖν (§. ζ.) ἔστι γε μὴν αἰεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐπὶ τὸ ἀκριβῆς τῆς κατ' αὐτὰς ρίζης ἔγγιον γίνεσθαι, χωρῆντας ἐπ' ἀπειρον.

Οἷον τῷ ἀριθμῷ 30434564, τῆς κυβικῆς ὑπεξαχθείσης ρίζης 312, καὶ λοιπῷ τῷ 63236 μόνοντος, εἴτις τινὲς ἀρεθεῖσαν ρίζαν τετραγωνίσας, αὐτὴν ταύτῃ ἔπειτα τῷ τετραγώνῳ προθεῖναι, καὶ τὸ κεφάλαιον τριπλασιάσειν· εἶτα προσεπαγαγοὶ τῷ γινομένῳ καὶ μονάδα· συστήσει δὲ κλάσμα ἐν ἀριθμητῇ μὲν τῷ ὑπολοίπῳ ἐκείνῳ, παρονομαστῇ δὲ τῷ κατὰ τινὲς εἰρημένῳ πράξιν ἀνακύ-

πλοντι, τοιοῦτον $\frac{63236}{292968 + 1}$ · Τέως τὸ κλάσ-

μα τότε τῇ μὴ ἀκριβῶς ληφθεῖσιν ρίζῃ προθέμενος, ἀπο-

ἀποδώσει ταύτηγε τὴν κυβικὴν ρίζαν τῆς μὴ ἀκριβῆς κύβου, τὴν ὅτι ἐγγύστα· οἷον τῆς 30434554,

$$\text{τὴν } 312 + \frac{63236}{292969}.$$

ΑΛΛΩΣ.

§. 1. Τῶν καταλειφθέντων τριῶν μηδενικῶν σημείων προαίρει, καὶ τὴν εὐρεσιν τῆς κυβικῆς ρίζης ἐπιτηδύων ὡς ἀνωτέρω (§. ε.). ἐγγυτέρω γενήσῃ τῆς ἀκριβῆς ἐν κλάσμασι δεκαδικοῖς. Προαίρει δ' ἔτι τριῶν λοιπῶν, ἔτι μᾶλλον προσεγγυεῖς, ἐν κλάσμασιν ἑκατονταδικοῖς· καὶ τῆτοις ἀπειρον.

Οἷον,

$$\begin{array}{r|l} 63236 & 000 \\ 58406 & 4 \\ \hline 37 & 44 \\ & 8 \\ \hline 4792152 & 000 \\ 2924065 & 2 \\ & 9366 \\ & 1 \\ \hline 1867993139 & \text{κξ.} \end{array}$$

Οὕτως ἀντίς καὶ ἐξ ἀριθμῶν τῆς ἐξ ὀλοχερῶν μονάδων, καὶ δεκαδικῶν, τῆς κατὰ τὸ δέον τῶν μηδενικῶν σημείων προαίρει, τὴν κυβικὴν ρίζαν, ὅσον ἂν βέλοιο, μᾶλλοντε καὶ μᾶλλον ἀκριβετέραν ἐκπαίσειν.

Ο.ε.ν

8, 27

(2, 02225 κζ.

8,

0, 270	000
240	0
2	40
	8

27592	000
24482	4
24	24
	8

8085352	000
2453090	4
242	64
	8

632018952	000
-----------	-----

κζ.



Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
DANNINA 2006