ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 128.

Ἀριθμοῦ δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθέντος, ὁ γινόμενος ἐκείνου καλεῖται Τετράγωνος, ὁ δὲ δι' οὗ, Ῥίζα τοῦ τετραγώνου ἀκούει τετραγωνική· οἷον τοῦ 25 τετράγωνος ὁ 625, ὡς ἐκ τοῦ 25 πολλαπλασιαζομένου τὴν γένεσιν ἔχων· τοῦ δὲ 625 ῥίζα τετραγωνικὴ ὁ 25.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 129. Τοῦ τετραγώνου διὰ τῆς ἰδίας αὐτοῦ ῥίζης πολλαπλασιαζομένου, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς Κύβος ἐστὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς ληφθέντος, ὃς δὴ πρῶτον ληφθεὶς σχέσει τῇ πρὸς τὸν κύβον, Ῥίζα κυβικὴ ὀνομάζεται· οἷον τοῦ 25 ὁ κύβος 15625, ὃς ἀναφύεται τοῦ τετραγώνου 625 διὰ τῆς ῥίζης 25 πολλαπλασιαζομένου. Τοῦ δὲ δὴ κύβου 15625 ῥίζα ἡ κυβικὴ ἐστὶν 25.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 130. Ἐν γένει δὲ τὰ ἐκ παραγόντων γινόμενα ἀλλήλοις ἴσων, ὁποσωνοῦν τὸν ἀριθμὸν, Δυνάμεις λέγονται τοῦ παράγοντος· Δευτέρα μὲν δύναμις, εἰ δὶς ὁ παράγων προσληφθεὶς εἴη. Τρίτη δὲ, εἰ τρίς. Τετάρτη δὲ, εἰ τετράκις· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως. Οὕτω τοῦ ἀριθμοῦ 3, δευτέρα μὲν δύναμις ἐστὶ 3×3, ἤτοι 9· τρίτη δὲ $3 \times 3 \times 3$, ἤτοι 27· τετάρτη δὲ $3 \times 3 \times 3 \times 3$, ἤτοι 81· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Αὐτὸς δὲ οὗτος ὁ ἀριθμὸς 3, σχέσει μὲν τῇ πρὸς τὴν δευτέραν τῶν δυνάμεων Ῥίζα καλεῖται

λεῖται δευτέρα. Τῇ δὲ πρὸς τὴν τρίτην, Ῥίζα τρίτη, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 131. Δοθείσης τῆς ῥίζης, ῥᾷστα ἀπ' αὐτῆς τελεῖται ὁ τετράγωνος, ὁ κύβος, ἤτοι ἡ δευτέρα δύναμις, ἡ τρίτη, ἡ τετάρτη, καὶ ὁποία δήποτε τούτων ἄλλη ἀνωτέρα. Ἡ γεμὴν ἀπὸ τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ῥίζαν ἐπάνοδος, πολλῷ δυσχερεστέρα ἐστί. Δειχθήσεται μέντοι τῆς τοιᾶσδε ἐπανόδου ὁδός τις καθολικωτέρα. Ἤδη δὲ καθ' ὃν λόγον ἐξ ἀριθμοῦ παντὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ὡς οἷον ἐπ' ἀκριβὲς ἀνευρίσκειν ἐστὶ, μόνην ὑποθησόμεθα, ὅτι τε τὸ πρόβλημα τόδε συχνάκις ἀπαντᾷ, καὶ οὐδὲ πάνυ δυσχερὴς ἡ τούτου ἐπίλυσις. (*)

§. 132. Δῆλον δὲ, ἐξ ὧν περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἴσμεν, ὡς ἐὰν τοῦ ἀριθμοῦ 5, τετράγωνος ᾖ 25, τοῦ αὐτοῦ τῷ μηδενικῷ σημείῳ οὕτω προσηυξημένου 50, τοὺς αὐτοὺς ἕξει ὁ τετράγωνος χαρακτῆρας, δυσὶ μηδενικοῖς σημείοις προσεπηυξημένους, ὡς εἶναι 2500. Καὶ ἐν γένει ἐπὶ τοῦ τετραγώνου, δὶς ἀεὶ τοσαῦτα ἔσται τὰ μηδενικὰ τῶν σημείων, ὅσα ἐπὶ τῆς ῥίζης ἐστί.

§. 133. Τοὐναντίον δὲ, ἐὰν ἡ ῥίζα ᾖ 0, 5, ὁ τετράγωνος ἔσται 0, 25. Τῆς δὲ ῥίζης οὔσης 0, 05, ὁ τετράγωνος, 0, 0025· καὶ οὕτως ἐφεξῆς· δὶς τοσούτων, μετὰ τὴν τῶν ἁπλῶν ὑποδιαστολὴν μονάδων ὄντων ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τῶν χαρακτήρων, ὁπόσοι τοῦ τοιοῦδε γένους ἐπὶ τῆς ῥίζης εἰσί.

§. 134. Καὶ ἐν γένει τῷ τοῦ κλασματικοῦ τετραγώνῳ, ἀντὶ μὲν ἀριθμητοῦ ὁ τετράγωνος ἐστὶ τοῦ ἀριθ-

(*) Ἀλλ' ἡμῖν ἔδοξε τοῖς περὶ τῆς τετραγωνικῆς, καὶ τὰ περὶ τῆς κυβικῆς ἀμέσως κατωτέρω ὑποσυνάψαι, ὡς ἂν εἶναι βουλομένοις κἀκεῖνα διελθεῖν, μηδέν τι τούτων μᾶλλον ἐσόμενα δυσπαρακολούθητα.

μητοῦ· ἀντὶ δὲ παρονομαστοῦ, ὁ τετράγωνος τοῦ παρονομαστοῦ· οἷον τοῦ $\frac{2}{3}$ τετράγωνος ἐστὶ $\frac{4}{9}$· τοῦ δὲ $\frac{5}{2}$ ὁ $\frac{25}{4}$.

§. 135. Παραπλήσια δ᾽ ἂν καὶ περὶ τῶν κύβων, καὶ ὁποιωνοῦν ἄλλων ὑπερτέρων δυνάμεων ὑποστηριχ̃ψειέ τις ῥᾳδίως, τὴν αὐτὴν στείβειν ἑλόμενος.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 136. Ἀριθμοῦ τοῦ ἐκ δυοῖν μερῶν συγκειμένου, ὁ τετράγωνος περιέξει, ἑκατέρων μὲν τοὺς τετραγώνους τῶν μερῶν, καὶ προσέτι δὶς τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν παραγόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 3. Ἀριθμὸς ὁ ΑΒ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἐκκείμενος, ἐὰν εἰς μέρη δύο ΑΓ, ΓΒ ὁπωσοῦν διαιρεθῇ, ληφθῇ δ᾽ ἀπ᾽ αὐτοῦ ὁ τετράγωνος ΑΔ, εὔδηλον ὡς οὗτος συγκείσεται ἔκ τε τοῦ ΓΕ, ὃς ἐστὶν ὁ τετράγωνος τοῦ μέρους ΑΓ, καὶ ἐκ τοῦ ΗΖ, ὃς ἐστὶν ὁ τετράγωνος τοῦ μέρους ΓΒ, καὶ ἐκ τοῦ ΕΖ, καὶ ΓΗ, ἃ τὸ ὑπὸ τῶν μερῶν ἐστὶ παραγόμενον δὶς ληφθέν.

Ταὐτὸ δὲ καταφανὲς ἐὰν τεθῇ $N = A + B$. Ἵνα γὰρ γένηται NN, πολλαπλασιαστέον ἑκάτερον τῶν μερῶν A καὶ B δι᾽ ἑκατέρου (§ 56.). Ὅθεν γίνεται $AA + AB + BA + BB$. Τουτέστιν, ἐπειδὴ $AB = BA$ (§. 98.), $NN = AA + 2AB + BB$. Σύγκειται τοίνυν ὁ τετράγωνος NN ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν AA καὶ BB, καὶ ἐκ τοῦ ὑπ᾽ αὐτῶν γινομένου AA δὶς ληφθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 137. Ἐὰν ἀριθμὸς ληφθῇ, οἷον ὁ 34, ὁ δυσὶ χαρακτῆρσιν ἐκκείμενος, ὧν ὁ ἕτερος τὰς δεκάδας σημαίνει τῶν διὰ θατέρου δηλουμένων μονάδων, ὁποίας δ᾽ ἂν δ' ἂν αὗται τάξεως τύχοιεν· ὁ ἀπ' ἐκείνου τετράγωνος συντεθείσεται τρόπῳ τοιῷδε.

30 ×	30 =	. . . .		9
60 ×	4 =	. . . .		24
4 ×	4 =	. . . .		16
Ἐξ ὧν ὁ τετράγωνος		. . . .		1156

Ἐν ᾧ ὁ ἔσχατος χαρακτὴρ 6 μονάδας σημαίνει, ταῖς ὑπὸ τοῦ ἐσχάτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος 4 δηλουμέναις ὁμοταγεῖς. Ἔνθεν τοι τῶν ἐν ἐκείνῳ 4 μονάδων ἁπλῶν οὐσῶν, οὐδὲν λοιπὸν προσπεριεργάζεσθαι. Ἀλλ' ἐὰν ὁ 4 δεκάδας σημαίνῃ, τῷ τετραγώνῳ προστιθέναι δεήσει τῶν μηδενικῶν σημείων δύο, ὥστε εἶναι 115600. Κἂν τοῖς λοιποῖς δὲ ὡσαύτως, κατὰ τὰ εἰρημένα. (§. 132.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 138. Τὸν αὐτὸν συγκείσεται τρόπον ὁ τοῦ ἀριθμοῦ τετράγωνος, τοῦ ἐκ μονάδων, καὶ δεκάδων τῶν τοιούτων μονάδων συνθέτου, καὶ ἐὰν ὁ τῶν δεκάδων ἀριθμὸς μείζων ᾖ, ἢ ὥστε δι' ἑνὸς ἔχειν χαρακτῆρος δηλοῦσθαι, (οἷον τοῦδε 364, οὕτω διαιρεθέντος 360 + 4) ὁπόσοι δ' ἂν ὦσι τῆς τῶν δεκάδων πληθύος οἱ χαρακτῆρες. Ἀμέλει τοι πρῶτον ὁ τετράγωνος ληφθήσεται τοῦ πρώτου μέρους, οἷον ἐνταῦθα τοῦ 360· εἶτα τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν μερῶν 360, καὶ 4 δίς· τελευταῖον δὲ καὶ ὁ τετράγωνος προστεθείσεται ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέρους, ἤτοι τοῦ 4. Τούτου δὲ παρατηρηθέντος, ὁ τοῦ ἀριθμοῦ τετράγωνος, τοῦ ἐν ὁποιῳδήποτε στίχῳ χαρακτήρων ἐκκειμένου, κατὰ νόμον τὸν αὐτὸν συγκείσεται οὕτως. Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς 75342· ἀρχῆς οὖν ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς ἀνωτέρας τάξεις μονάδων γινομένης, καὶ ἐπὶ τὰς κατωτέρας τῆς προόδου χωρούσης, πρῶτον δὴ ὁ ἀπὸ τοῦ 75 τετράγωνος συντιθέσθω, καθάπερ εἴρηται, εἶτα ἔκ τε τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ 70, καὶ ἐκ τοῦ παραγομένου 70 × 5 δὶς ληφθέντος, καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ 5. Τῷδε δὲ τῷ τετραγώνῳ, ὅς ἐστὶ 5625, ἐὰν δύο τῶν μηδενικῶν προστεθῇ σημεῖα, ἀριθμὸς γενήσεται τετράγωνος ὁ τοῦ 750. Διὸ δὴ τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ χαρακτήρων προσληφθέντων τριῶν 753, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ ὧδε διαμερισθέντος 750 + 3, ὁ τετράγωνος κατὰ τὸν αὐτὸν συντεθήσεται κανόνα, ἐὰν τῷ τετραγώνῳ τοῦ ἀριθμοῦ 750, ὃν πρὸ μικροῦ συντεθείκαμεν, προστεθῇ δὶς τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν μερῶν 750 × 3, ἐπιπροστεθῇ δ' ἔτι καὶ ὁ τοῦδε τοῦ μέρους 3 τετράγωνος· οὕτω δέ τοι τοῦ ἀπὸ 753 τετραγώνου παραχθέντος, γενήσεται τετράγωνος καὶ ἀπὸ τοῦ 7530, τῷ πρὸ τοῦ παραχθέντι δυοῖν μηδενικῶν σημείων ἐπιτεθέντων· κἀντεῦθεν καὶ ἀπὸ τοῦ 7534, ἤτοι τοῦ 7530 + 4, τοῦ ὑπὸ τῶν μερῶν γινομένου δὶς προσληφθέντος, καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ χαρακτῆρος τῶν μονάδων τετραγώνου προστεθέντος. Ἀλλὰ καὶ μετὰ τὸν οὕτω προελθόντα τετράγωνον ἀπὸ τοῦ 7534, τετράγωνος προσωτέρω συστήσεται καὶ ἀπὸ τοῦ 75340· κἀντεῦθεν καὶ ὁ ἀπὸ τοῦδε 75342, ἢ 75340 + 2, τὸν αὐτὸν τρόπον. Τὸ δὲ τοῦ ὑπολογισμοῦ σχῆμα, ἐὰν αἱ προσθέσεις ἅπασαι εἰς τέλος ὑπερτεθῶσι, τοιόνδε ἔσται.

75342)	49				
	7	0			
		25			
		45	0		
			9		
		6	02	4	
				16	
			30	13	6
					4
	56	76	41	69	64

ΠΟΡΙΣΜΑ

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 139. Ἐν γένει οὖν ἐντεῦθεν φανερὸν, ὁπόσοι ἂν οἱ κατὰ τὴν ῥίζαν τύχωσι χαρακτῆρες, τὸν ὁλικὸν τετράγωνον, ἀεὶ τοὺς τετραγώνους πάντας τοὺς ἀπὸ χαρακτῆρος ἐν μέρει ἑκάστου περιειληφέναι, καὶ πρὸς δὴ τούτοις τὰ ὑφ᾽ ἑκάστου χαρακτῆρος, ἐπὶ πάντων τῶν πρὸς τὰ λαιὰ αὐτοῦ ἡγουμένων πολλαπλασιασμῷ γινόμενα, δὶς ληφθέντα· τῆς τῶν ἐν ὁτῳοῦν χαρακτῆρι μονάδων καταλλήλου τάξεως ἀεὶ σωζομένης. Οἱ δὲ δὴ εἰρημένοι τετράγωνοι κατὰ τόπους ἀποτερματίζονται δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ ἴσοι περιτταρίθμους· οἷον κατὰ τὸν πρῶτον, τρίτον, πέμπτον, κτλ. τὰ δὲ γινόμενα κατὰ τοὺς λοιποὺς, τούτεστι τοὺς ἀρτιαρίθμους ἐκλάσσεται, καθ᾽ ὃν δὴ νόμον, καὶ εἰς αὐτὸ εἰσίασι τὸ κεφάλαιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 140. Ἀριθμοῦ δοθέντος τετραγώνου, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Προκειμένου τοῦ πρὸ μικροῦ συγκροτηθέντος τετραγώνου 5676416964, τὴν ῥίζαν εὑρήσων, δίελε δὴ τοῦτον εἰς κόμματα, ἀνὰ δύο χαρακτῆρας ἕκαστον περιέχοντα, δεξιόθεν ἐπ᾽ ἀριστερὰ προϊὼν, ὥστε περισσαρίθμων τῶν χαρακτήρων τυχόντων, ἐν μοναδικῷ πληροῦσθαι χαρακτῆρι τὸ κόμμα τὸ ἀριστερώτατον. Εἶτα κατὰ τὸ ἐφεξῆς σχῆμα, ἀριστερόθεν εἰς δεξιὰ ἀνάπαλιν χωρῶν.

	56	76	41	69	64		(75342 . . Ρ
	49	–	–	–	–	. . Α	
14)	7	76					
	7	0–	–	–	–	. . Β	
		25	–	–	–	. . Γ	
150)		51	41				
		45	0–	–	–	. . Δ	
			9	–	–	. . Ε	
1506)			632	69			
			602	4–	–	. . Ζ	
				16	–	. . Η	
15068)				3013	64		
				3013	6–	. . Θ	
					4	. . Ι	

000000

Α΄. Λάβε δὴ τὸν 49 τετράγωνον, τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα τοῦ πρώτου κόμματος· τοῦ δὲ τὴν ῥίζαν 7, ὡς πρῶτον τῆς ζητουμένης χαρακτῆρα ῥίζης, γράφε ἀντίστιχον τῷ Ρ. τὸν δ᾽ ἀπ᾽ ἐναντίον τοῦ Α τετράγωνον ἄφελε ἀπὸ τῶν τοῦ πρώτου τοῦδε κόμματος χαρακτήρων, τὸ λοιπὸν ὑπογράψας 7.

Β΄. Τῷδε τῷ λοιπῷ τὸν τοῦ ἐχομένου κόμματος πρῶτον προσθεὶς χαρακτῆρα, τὸν συμπληρούμενον 77 ἀριθμὸν διὰ τοῦ διπλοῦ τοῦ τῆς ῥίζης εὑρεθέντος πρώτου δίελε χαρακτῆρος, ἤτοι τοῦ 14· τὸ δὲ πηλίκον 5 δώσει σοι τὸν χαρακτῆρα τῆς ῥίζης τὸν δεύτερον.

Γ΄. Τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦδε τοῦ πηλίκου 5 καὶ τοῦ διαιρέτου, καὶ προσέτι δὲ, καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ εἰρημένου πηλίκου τετράγωνον, οὕτως, ὡς ἄντικρυ τοῦ Β καὶ Γ κεῖται γεγραμμένα, εἰς κεφάλαιον συνάψας ἄφελε, τὴν ὑπεροχὴν ἐπισημειώσας.

Δ΄. Τῇ δ᾽ ὑπεροχῇ τῇδε 51, τὸν προσεχῆ αὖθις τοῦ τετραγώνου χαρακτῆρα καταγαγὼν 4, καὶ προσθέ-

προσθέμενος, ὥστε εἶναι 514, δίελε τὸν ἀριθμὸν τόνδε διὰ 150, ὃς τῆς ἄχρι τοῦδε εὑρεθείσης ῥίζης 75 ἐστὶ τὸ διπλάσιον· τὸ δὲ πηλίκον 3, ὁ χαρακτὴρ ἔσται τῆς ῥίζης ὁ τρίτος.

Ε΄. Ἔνθεν τοι τοῦτε γινομένου ᾧ τὸ Δ ἀντιστοιχεῖ, καὶ τοῦ τετραγώνου ᾧ τὸ Ε, συνάμα ἀφαιρεθέντων, ἀριθμὸς καταλείπεται ὁ 632 ὃς κατὰ τὸν αὐτὸν μεταχειρισθεὶς τρόπον, τὸν ἑπόμενον τῆς ῥίζης ἀποδώσει χαρακτῆρα, οὗπερ εὑρεθέντος προσευρεθήσονται καὶ οἱ λοιποί, κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους προϊούσης τῆς ἐργασίας, καὶ ἀείποτε διὰ τοῦ διπλοῦ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης τῶν διαιρέσεων τελουμένων, διὰ διαιρέτου δηλονότι ἐς ἀεὶ προσαύξοντος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Φημὶ δὴ τὸν οὕτως εὑρεθέντα ἀριθμὸν 75342, τοῦ προτεθέντος τὴν ῥίζαν εἶναι τὴν τετραγωνικήν. Ὁ γὰρ τοῦδε τοῦ ἀριθμοῦ τετράγωνος, ἐκ μερῶν σύγκειται τῶν ἐπὶ τοῦ Σχήματος γεγραμμένων ἁπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι (§. 138.) ὅτι δὲ τάδε τὰ μέρη ἅμα ληφθέντα τὸν προτεθέντα ἀριθμὸν συμπληροῖ, δῆλον ἐντεῦθεν, ὅτι ἀφαιρεθέντων ἐξ αὐτοῦ, οὐδὲν ὑπολείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 141. **Ἡ τοῦ ὁλοσχεροῦς τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ ἐν ἀριθμοῖς ὁλοσχερέσιν ἐπ' ἀκριβὲς μὴ ἀποδιδομένη, οὐδ' ἐν τοῖς κλασματικοῖς ἀποδοθήσεται.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν ὁ κλασματίας οὗτος $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma}{a.\ b.}$ (ἐν ᾧ α, β, γ ἀριθμοὺς δηλοῦσι πρώτους, ἐξ ὧν σύγκειται ὁ ἀριθμητής, καὶ a, b πρώτους ὁμοίως, ἐξ ὧν ὁ παρονομαστής) ὑποτεθῇ ῥίζα εἶναι τετραγωνικὴ ἀριθμοῦ

ὁλο-

ὁλοχερῦς, ἔςαι δὴ ὁ ἀπὸ ταύτης τετράγωνος $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \alpha.\ \beta.\ \gamma,}{a.\ b.\ a.\ b.}$ ὁλοχερής· ὅπερ ἄλλως ἐκ ἂν εἴη (§. 124.) μήτινων ἁπλῶν ἀριθμῶν τῶν ἐν τῷ ἀριθμητῇ, τῶν αὐτῶν τοῖς ἐν τῷ παρονομαςῇ ἁπλοῖς a καὶ b ὄντων· τυτέςι μὴ τῦ ἀριθμῦ $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma}{a.\ b}$ (ὃς ἐτίθετο κλασματικὸς εἶναι) ὁλοχερῦς τυγχάνοντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 142. Ἀριθμῦ τοίνυν ἐπέκεινα εἰσὶν οἱ ὁλοχερεῖς ἀριθμοὶ, ὧν αἱ ῥίζαι, ἐπεὶ μηδ' ὁλοχερεῖς, μηδὲ κεκλασμέναι, πάντη πάντως εἰσὶν ἀναπόδοτοι. Τυτέςιν οἱ τῷ δι' ἑαυτῦ πολλαπλασιασμῷ ἀριθμῦ τινὸς, ὃς ἂν δοθείη, παραχθῆναι μὴ ἔχοντες.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 143. Ἡ τῦ κεκλασμένυ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐκ ἂν δοθείη, μὴ καὶ τῦ ἐν τῷ κλάσματι ἀριθμητῦ τετραγώνυ ὄντος, καὶ τῦ παρονομάζοντος. Ὡς ἐὰν ᾖ, ἔςαι μὲν ὁ τῆς ῥίζης ἀριθμητὴς ῥίζα τῦ ἀριθμητῦ, ἔςαι δὲ ὁ παρονομαςὴς τῦ παρονομαςῦ. Οὐδὲ μὲν ὖν ὁ δεκαδικὸς κλασματίας, ἢ ὁςισῦν ἀριθμὸς ὃς ἂν, παρὰ τὰς καθ' οἱανδήτινα τάξιν ὁλοχερεῖς μονάδας, καὶ μόρια δεκαδικὰ περιέχοι, τετράγωνος ἔςαι, εἰ μὴ καὶ ὁ τῶν ἐν αὐτῷ χαρακτήρων ἀριθμὸς, δι' ὧν τὰ δεκαδικὰ τῶν μορίων δηλῦται, ὥςτε διὰ τῦ (,) σημείυ τῶν λοιπῶν ὑποδιαςέλλεσθαι, ἄρτιος ᾖ, καὶ τῦ σημείυ (,) ἐκ μέσυ γινομένυ προκύπτῃ ὁ τετράγωνος τῦ ὁλοχερῦς. Ὁ ὖν ἀριθμὸς 16, 9 ἐκ ἔςι τετράγωνος, καίτοι ὁ 169 τετράγωνος τυγχάνει τῆς ῥίζης 13. Ἀλλὰ γὰρ ὁ 1, 69, ἐςὶ τετράγωνος ἀπὸ ῥίζης 1, 3. (§. 133.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 144. Ἀλλ' εἰ καὶ ἀριθμὸς ἐκ ἔςιν, ὃς καὶ καθ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς, ἀριθμὸν ἄλλον τινὰ, φέρε

φέρε τὸν 3, ἐπ' ἀκριβὲς οὐδέποτ' ἂν ἀποδοίη, δοθείη τις ἂν ὅμως, ὁ τοῦτο δυνάμενος ἐν διαφορᾷ πάνυ ἐλαχίστῃ. Καὶ τούτου δὲ δοθέντος, ἄλλος, ὃς ἂν ἐφ' ἑαυτῷ πολλαπλασιασθεὶς τὸ 3 παράγοι, ἐν διαφορᾷ ἔτι πολλῷ ἐλάσσονι. Ἔπειτα δὲ καὶ τούτου ἀκριβέστερον τρίτος· καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 145. Ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς δοθέντος, ἢ κατὰ τύπον ὁλοσχεροῦς διὰ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐκκειμένου, ἀριθμὸν ἕτερον εὑρεῖν, ὃς ἂν τῇ ἐκείνου τετραγωνικῇ ῥίζῃ, ὅτι ἔγγιστα γίγνοιτο.

ΛΥΣΙΣ.

Τὰς ἁπλᾶς τῶν μονάδων ἐπὶ τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ ὑποδιαστείλας, καὶ τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τόπου ἔνθεν ἢ ἔνθεν κατὰ κόμματα ἀνὰ δύο χαρακτῆρας διελόμενος, (τουτέστιν ὡς τὸ ἔσχατον, ὧν αἱ μονάδες ἁπασῶν ἐλάχισται, διὰ τοῦ μηδενικοῦ σημείου ἀναπληροῦν, ἐὰν οἱ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων χαρακτῆρες τύχωσι περισσάριθμοι) προσίθει δὴ ἀπὸ τῆς τελευτῆς τοσαῦτα, ἐκ μηδενικῶν κόμματα, ὅσα ἂν δόξῃ ἅλις ἂν ἔχειν εἰς τὸ προκείμενον· ἐκεῖνο εὖ ἐπιστάμενος, ὡς ἕκαστον τῶν ἐκ δυοῖν χαρακτήρων κομμάτων, χαρακτῆρα ἕνα τῶν τῆς ῥίζης πέφυκεν ἀποδιδόναι. Τὰ δὲ λοιπὰ ὡσαύτως πέραινε, ὡς εἴπερ καὶ τετράγωνος ἦν, ὁ ἀριθμὸς ὁ προκείμενος. Εἰ μὴ ὅτι τοῦ λοιποῦ, μετὰ τὸ διὰ πάντων ἐλθεῖν τῶν κομμάτων, λόγος οὐδείς.

Οἷον εἰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρεῖν προυκέοιτο τοῦ ἀριθμοῦ 4, 67, προστιθεὶς τὰ μηδενικά, οὕτως εἰς κόμματα διαιρῶ.

4, | 67 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00.

Ἐξαγαγὼν δὲ τὴν ῥίζαν ἐντεῦθεν ἔχω ὡς ἔγγιστα 2, 1610182· οὗτος γὰρ δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθεὶς

θεὶς ὁ ἀριθμὸς, ἐ δήπε τὸν προτεθῶντα 4, 67 ἐπ᾽ ἀκριβὲς, τύτε γεμιὼ μόλις ἐλάσσονα παράγει τὸν ἑξῆς· 4, 66999966073124.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἅπαντες οἱ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ῥίζης ἀπὸ τῦ προτεθέντος ἀφαιρεθέντες, τετράγωνον συντιθέασι, τῦ προτεθέντος ἀριθμῦ 4, 67 ἐλάσσονα, ἧ ἡ ῥίζα παρίσαται· ὁ δὲ τετράγωνος ὗτος πρὸς τὸν προτεθέντα τοσύτῳ ἔγγιον γίνεται, ὅσῳ διὰ πλειόνων χαρακτήρων ἐκφέρεται. Ἡ γὰρ διαφορὰ ἐν κλάσμασι τοσύτῳ ἐλάττοσι κεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 146. Τὰ τῶν μηδενικῶν σημείων κόμματα κατὰ βραχὺ προσάπτεσθαι δύναται, καθ᾽ ὅσον ἡ κατὰ τὴν εὕρεσιν ἐργασία χωρῦσα πρόεισιν. Ἀλλ᾽ ὅσα δήποτ᾽ ἂν ᾖ προσάψαις, ὡς δ᾽ ἂν καὶ πονήσαις, εἰ μὴ τετράγωνος ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς, ὐδέποτ᾽ ἂν εἰς πέρας τῦ προκειμένυ ἀφίκοιο. Τὴν γὰρ ἐπ᾽ ἀκριβὲς ῥίζαν ἐθέλοντι ἀποδῦναι, μάτην ἂν εἴη πονητέον τέλυς ἐπέκεινα. Οὐκῦν ἡ κατὰ νῦν ἀνατυπυμένη ῥίζα τετραγωνικὴ τῦ ἀριθμῦ τῦ μὴ τετραγώνυ, διὰ μερῶν τῶν τῆς μονάδος, ἅττα μεγέθυς ἂν εἴη τινὸς ὡρισμένυ, ὅσον ἂν ἐλάχιστα προσληφθῇ, ὐδέποτε παραστῆναι δυνήσεται. Καὶ ἔστιν ἄρα ἡ τοιάδε ῥίζα ἀριθμὸς ἄλογος. (§. 9.). Ὁ τοίνυν λέγων τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀπὸ ἀριθμῦ τῦ μὴ τετραγώνυ, μὴ δύνασθαι ἀποδοθῆναι, εἰ μὴ τῆς μονάδος εἰς ἄπειρα μόρια διαιρεθείσης, κομιδῇ αὐτὸ τῦτο τυγχάνει ἀποφαινόμενος.

ΠΑΡΑΡ.