ΤΜΗΜΑ Β.

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΙΔΙΑ

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 98.

Εὰν ἀριθμὲς ἐστινασὲν ὁλοχερεῖς, ἢ κεκλασμένες Α, Β, Γ, Δ ἐπ᾽ ἀλλήλες δέῃ πολλαπλασιάσαι, οἷον τὸν μὲν πρῶτον διὰ τῦ δευτέρε, τὸ δ᾽ ἐντεῦθεν γεγονὸς διὰ τῦ τρίτε, καὶ τὸ ἐντεῦθεν αὖθις διὰ τῦ τετάρτε, καὶ ὅτως ἐφεξῆς εἰ πλείες τύχοιεν· Τῆς τῶν ἀριθμῶν τάξεως ὁπωσῦν τεταραγμένης, τὸ παραγόμενον Α×Β×Γ×Δ, ἥκιστα μεταποιηθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τέτων γὰρ ἀνθ᾽ ἑνός τινος πρὸς βραχὺ ὑποχωρήσαντος, οἷον τῦ Α, ἀντεισενεχθείσης μονάδος, ὥστε εἶναι 1×Β×Γ×Δ, εἴη ἂν 1×Β×Γ×Δ = Β×1×Γ×Δ = Β×Γ×1×Δ = Β×Γ×Δ×1. Ἀλλὰ γὰρ ἐπανίτω αὖθις ὁ ὑποχωρήσας Α = 3 φέρε, ἔνθα ἡ μονὰς ὑπετίθετο, ἀντεισενεχθεὶς, καὶ δῆλον ὡς ἐφ᾽ οἱασδήποτε θέσεως τὸ παραγόμενον τριπλασιασθήσεται· καὶ ἐν γένει ἔσαι Α×Β×Γ×Δ = Β×Α×Γ×Δ = Β×Γ×Α×Δ = Β×Γ×Δ×Α, τῦ Α ὁλοχερῦς τυγχάνοντος. Ἐὰν δὲ ὁ Α κεκλασμένος ᾖ, οἷον $\frac{2}{3}$, εὔδηλον πάλιν ὡς ἀποκαθισαμένε τῦ Α, ἀντὶ μιᾶς τινος τῶν τεθεισῶν μονάδων, παραγόμενον προελεύσεται, δύο τριτημόρια περιέχον τοῦ παραχθέντος ἔνθα ἡ μονὰς ἰῶ. Καθόλου ἄρα ἡ αὐτὴ ἀριθμῷ παντὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύναμις πρόσεστιν, εἴτε πολλαπλασιαζόμενος αὐτὸς εἴη, εἴτ' οὖν καὶ πολλαπλασιάζων, ὅπως ἂν οὖν τῆς κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον μετειλήχοι τάξεως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 99. Οὗτος ὁ λόγος δι' ὃν ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, παράγων καλεῖται τοῦ γινομένου $Α \times Β \times Γ \times Δ$, εἴτε πολλαπλασιαζόμενος αὐτός, εἴτε καὶ πολλαπλασιάζων, καὶ ὅπως ἂν ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχοι τάξεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 100. Κλασμάτων $\frac{Α}{Π}, \frac{Β}{Ρ}, \frac{Γ}{Σ}$, ὁποιωνοῦντε καὶ ὁποσωνοῦν τὸν ἀριθμὸν ἀλλήλοις ἐπαγομένων, γίνεται τὸ αὐτό, ὅπως ἂν καὶ μεταληφθῶσιν οἱ τούτων ἀριθμηταί, τῶν παρονομαστῶν ἤτοι μενόντων, ἢ καὶ αὐτῶν μεταμειβομένων. Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τῶν τεθέντων γραφῇ, $\frac{Β}{Π}, \frac{Α}{Σ}, \frac{Γ}{Ρ}$, γενήσεται $\frac{Β \times Α \times Γ}{Π \times Σ \times Ρ}$, ἴσον τῷ προκύπτοντι ὑπὸ τῶν $\frac{Α}{Π}, \frac{Β}{Ρ}, \frac{Γ}{Σ}$, δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασθέντων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 101. Διαιρεθέντος τινὸς τῶν τὸν ἀριθμὸν παραγόντων, καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς διαιρεθήσεται. Ἔστωσαν ἀριθμοὶ παράγοντες Α, Β, Γ, ὧν εἷς τις ὁ Α διαιρείσθω διὰ τοῦ Π, καὶ ἔσται $\frac{Α \times Β \times Γ.}{Π}$

Τὸ γὰρ παραγόμενον ἔκ τε τοῦ πηλίκου $\frac{Α}{Π}$ καὶ τῶν

λοιπῶν

λοιπῶν παραγόντων, τὸ αὐτὸ πηλίκον ἔσαι τῦ ἀριθμῦ $A \times B \times \Gamma$ διαιρεμένε διὰ τῦ Π.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 102. Δύο, ἢ πλείω κλάσματα, ὧν οἱ παρονομασαὶ διαφέροντες εἰσὶν, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀναγαγεῖν σωζομένης τῆς δυνάμεως.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Δυοῖν ὄντων, οἷον τῶν $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$, ἑκάτερον τῶν ἐν τῷ πρώτῳ ὅρων, πολλαπλασίασον διὰ τῦ παρονομασῦ τῦ δευτέρε, ὥςε γενέσθαι $\frac{2 \times 5.}{3 \times 5}$ Εἶθ' ἑκάτερον τῶν τῦ δευτέρε διὰ τῦ παρονομασῦ τῦ πρώτε ἀνάπαλιν, ὥςε προελθεῖν $\frac{4 \times 3,}{5 \times 3}$ καὶ ἔςαι τὰ ἕτω προϊόντα κλάσματα $\frac{10}{15}$, καὶ $\frac{12}{15}$, τὰ ζητέμενα.

Β'. Ἐὰν δὲ τὰ κλάσματα τρία ᾖ, οἷον τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, ἑκάτερον τῶν ὅρων τῦ πρώτε πολλαπλασίασον διὰ τῦ ἐν τῷ δευτέρῳ παρονομασῦ 5, καὶ διὰ τῦ ἐν τῷ τρίτῳ 7, ἢ διὰ τῦ ἐκ τέτων πολλαπλασιασμῷ γινομένε, ὥςε προελθεῖν $\frac{2 \times 5 \times 7.}{3 \times 5 \times 7}$ ὡσαύτως δὲ ϗ τὲς ὅρες τῦ δευτέρε, διὰ τῶν παρονομαςῶν τῦ πρώτε, καὶ τῦ τρίτε· καὶ τὲς τῦ τρίτε, διὰ τῶν τῦ πρώτε, ϗ τῦ δευτέρε· ὥςε γενέσθαι ἐκ μὲν τῦ δευτέρε $\frac{4 \times 3 \times 7.}{5 \times 3 \times 7}$ Ἐκ δὲ τῦ τρίτε $\frac{6 \times 3 \times 5.}{7 \times 3 \times 5}$ Καὶ κλάσματα ἔςαι, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, τὰ ζητέμενα.

Γ'. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον προβήσῃ, καὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων πλειόνων ὄντων, ἢ τριῶν· ἀμφοφω δηλονότι τοὺς ἐφ' ἑκάστῳ ὅρους διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν ἄγων ἀπαξαπάντων· ἢ γοῦν, ὃ ταυτὸν ἐστὶ, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὑπ' ἐκείνων προκύπτοντος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οὐ γὰρ ἀμέλειται διὰ τῶν τοιῶνδε πολλαπλασιασμῶν ἡ τῶν κλασμάτων δύναμις μεταποιεῖται. Διὰ τοῦ αὐτοῦ γὰρ ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς πολλαπλασιάζονται (§. 95.). Οἱ δὲ τῶν καινῶν κλασμάτων παρονομασταὶ οἱ αὐτοὶ γίνονται, ὡς ὑπὸ πάντων τῶν κατὰ τὰ δοθέντα κλάσματα παρονομαστῶν παραγόμενοι. (§. 98.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 103. **Τοὺς ἐκ διαφόρων παρονομαστῶν κλασματίας, ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀναγομένους μονάδα, ὅσοι ποτ' ἂν ὦσι, προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει συνάπτειν.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω κλάσματα δεδομένα $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{7}{9}$, ἃ συνάψαι δέον καθὰ τὰ σημεῖα κελεύει. Ἀναχθέντα τοιγαροῦν ἅπαντα ἐπὶ ὄνομα τὸ αὐτὸ, συναπλέσθω τὰ οὕτω προκύπτοντα, $\frac{90}{135} - \frac{108}{135} + \frac{105}{135}$, συμπροσαθροιζομένων τῶν ἀριθμητῶν ὡδέπως· $\frac{90 - 108 + 105}{135}$, ὅθεν γίνεται $\frac{87}{135}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ γὰρ κατὰ τὰ ἐπιταχθέντα συνημμένα κλάσματα, τοῖς συναπτέοις ἴσα. (§. 102.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 104. Οὕτως αἱ ἁπλαῖ ἅπασαι ἀριθμητικαὶ πράξεις περὶ τὰ κλάσματα οὐ πάνυ πολλῷ ἐργωδέστερον τελοῦνται, τῶν περὶ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ὁλοχερεῖς. Τ' ἄλλα δὲ πᾶν κλάσμα, τρόποις ἀπείροις δηλοῦσθαι πέφυκεν. (§. 95.) Εἰσὶ δὲ τῶν κανονικῶν κλασμάτων, τῶν οὕτως ἀλλήλοις ὁμοδυναμούντων, οἱ ὅροι ἄλλων ἄλλοι ἐλάσσονες, ἐν αὐτοῖς δέ τινες, καὶ ἐλάχιστοι.

§. 105. Ἐν γένει δὲ, εἴτε τῶν κανονικῶν τύχοι τὰ κλάσματα $\frac{\nu}{\delta}$ καὶ $\frac{N}{\Delta}$ ἀλλήλοις ἰσούμενα, εἴτε δὴ καὶ τῶν ἀτακτέντων, ἐὰν Ν διαιρεθὲν διὰ ν, πηλίκον τι τὸ Π δῷ, τὸ αὐτὸ προκύψει πηλίκον καὶ τοῦ Δ διὰ τοῦ δ διαιρεθέντος. Ἐὰν γὰρ Δ διὰ δ διαιρεθὲν πηλίκον ᾖ τὸ Ρ, ἐπειδὴ $N = \nu . \Pi$, καὶ $\Delta = \delta . P$ (§. 54.) τὸ κλάσμα $\frac{N}{\Delta}$ τὸ αὐτὸ ἔσται τῷ $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times P}$, ὃ τῷ κλάσματι $\frac{\nu}{\delta}$ ἐξισοῦσθαι οὐ δύναται, εἰμήπου τὸ Π ταὐτὸν ᾖ τῷ Ρ. Καὶ γὰρ $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times \Pi} = \frac{\nu}{\delta}$ (§. 95.). Ἀλλὰ μὴν τὸ $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times P}$, ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλαττον τοῦ $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times \Pi}$, ἥπερ ἂν τὸ Ρ ἔλαττον τύχοι ἢ μεῖζον τοῦ Π.

§. 106. Ἐντεῦθεν ἕπεται καὶ κατὰ γένος, ὅτι ἅπαν κλάσμα ἐκ κλάσματος αὐτῷ συνεξισουμένου γίνεται, τῶν ἐκείνου ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι ὁλοχεροῦς ὄντος, ἢ κλασματικοῦ, ἢ ἑκάτερον, ὡς ἐξ ἀμφοῖν συνθέτου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντων. Τουτέστιν ἐὰν ᾖ $\frac{\nu}{\delta} = \frac{N}{\Delta}$, ἔσται $N = \nu \times \Pi$, καὶ $\Delta = \delta \times \Pi$, ἑκατέρωσε τοῦ Π τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δηλοῦντος ἤτοι ὁλο-

ὁλοχερῆ, ἢ κεκλασμένον· καὶ τοῦτον ποτὲ μὲν γνήσιον, ἄλλοτε δὲ νόθον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 107. Ἐὰν οἱ ἐν τῷ κανονικῷ κλάσματι $\frac{\nu}{\delta}$ ὅροι, ἁπάντων τῶν ἐν τοῖς αὐτῷ ἐξισουμένοις κλάσμασιν ὦσιν ἐλάχιστοι· κἀντεῦθεν καὶ τῶν ἐν τῷ $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times \Pi}$, ὅπερ ἴσουται αὐτῷ ἐκείνῳ, καὶ ἅμα κανονικῶς τίθεται ἔχον, ὁ ἀριθμὸς Π ὁλοχερὴς ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ὁ Π ὁλοχερὴς μὴ ᾖ, ἔστω δὴ πρῶτον κλασματικὸς τῶν γνησίων· ἔσται δὲ $\nu \times \Pi$ ἔλαττον τοῦ ν. Καὶ $\delta \times \Pi$ ἔλαττον τοῦ δ. Καὶ ἔσονται ἄρα οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times \Pi}$, ἐλάσσονες τῶν ὅρων τῶν ἐν τῷ $\frac{\nu}{\delta}$ κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Ἀλλ' ἔστω δεύτερον ὁ Π, ἐξ ὁλοχεροῦς τοῦ Ι, καὶ γνησίου κλάσματος τοῦ Ζ συγκείμενος· καὶ ἔσται $\nu \times \Pi = \nu \cdot \mathrm{I} + \nu \cdot \mathrm{Z}$. Καὶ $\delta \times \Pi = \delta \cdot \mathrm{I} + \delta \cdot \mathrm{Z}$· οἱ δ' ἀριθμοὶ οὗτοι ὁλοχερεῖς ἔσονται, ὅτι καὶ $\nu \times \Pi$, καὶ $\delta \times \Pi$ ὁλοχερεῖς εἰσίν. Ἀλλαμὴν $\nu \cdot \mathrm{I}$, καὶ $\delta \cdot \mathrm{I}$, ὁλοχερεῖς εἰσὶν, ὡς ἐξ ὁλοχερῶν. Ἄρα καὶ $\nu \cdot \mathrm{Z}$, $\delta \cdot \mathrm{Z}$, ὁλοχερεῖς καὶ οὗτοι· οἱ δ' αὐτοὶ (ὅτι κέκλασται ὁ Ζ) τῶν ν καὶ δ, ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσονες. Τοῦ ἄρα κανονικοῦ κλάσματος $\frac{\nu \cdot \mathrm{Z}}{\delta \cdot \mathrm{Z}}$ οἱ ὅροι, τῶν τοῦ $\frac{\nu}{\delta}$ κανονικοῦ καὶ τούτου, καὶ πάντων ἐλαχίστους ἔχειν τοὺς ὅρους ὑποτεθέντος, ἔσονται καὶ ἤδη ἐλάσσονες· ὅπερ οὐ δυνατόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 108. Ὁ ἄρα κεκλασμένος, εἰ πρὸς ὅρους ἔχει ἐλάσσονας μετακληθῆναι, τοῦτ᾽ ἀεὶ περανθήσεται, τοῦ ἀριθμητοῦ διάτινος ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ διαιρεθέντος, ὃς ἂν καὶ τὸν παρονομαστὴν διαιροίη. Καὶ ὡς ἂν μείζων ὁ ἀριθμὸς οὗτος λαμβάνοιτο, τοσούτῳ δὴ ἐλάσσονες οἱ ὅροι, οἱ τοῦ καινοῦ προκύψουσι κλάσματος. Καὶ εἰ διαιρέτης ληφθείη ὁ πάντων μέγιστος, τῶν τοὺς ῥηθέντας καταμετρεῖν δυναμένων, ἐπὶ τοὺς ἁπάντων ἐλαχίστους ὅρους ἀναχθήσεται καὶ τὸ κλάσμα, δι᾽ ὧν ἂν παρίστασθαι δύναιτο.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 109. Οὕτως οὖν τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$ εἰς ἐλάσσονας ἀνάγεται ὅρους τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 2 διαιρεθέντων $\frac{4}{6}$. Εἰς ἐλαχίστους δὲ $\frac{2}{3}$ τῶν αὐτῶν ὅρων διὰ 4 διαιρεθέντων, ὃς ὁ μέγιστος τῶν ἀριθμῶν ἐστὶ τῶν καταμετρούντων ἑκάτερον. Ἐξευρίσκεται δὲ ὁ τηλικοῦτος διαιρέτης τὰ πολλὰ εὐπετῶς. Ἐνίοτε δὲ καὶ τοῦ κοινοῦ μὲν, μὴ μεγίστου δὲ παρόντος διαιρέτου, τὸ δι᾽ αὐτοῦ ἤδη ἀναχθὲν, εἰς ἁπλούστερον ἔτι ἀναχθήσεται κλάσμα, ἄλλου προσληφθέντος διαιρέτου, τόνδε τὸν τρόπον· ἐκ τοῦ $\frac{24}{36}$, ἀμφοῖν τῶν ὅρων διὰ 4 διαιρεθέντων, γίνεται $\frac{6}{9}$, οὗ φανερὸν ἑκάτερον αὖθις ὅρον εἶναι διὰ 3 διαιρέσιμον, δι᾽ οὗ ἐπὶ τοὺς ἁπάντων ἐλαχίστους ὅρους, οἷς ἂν τὸ κλάσμα τόδε παραστάιη, ἀνάγεται $\frac{2}{3}$. Ἀλλ᾽ ἔστι γὰρ ὅτε οἱ τηλικοῦτοι διαιρέται οὕτω λανθάνουσιν, ὡς τέχνης δεῖν καὶ ἐπινοίας πρὸς τὴν ἐκείνων ἀνεύρεσιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 110. Τῶν ἐνταῦθα γραμμάτων ἀριθμοὺς ὁλοσχερεῖς ὑποσημαινόντων, ἐὰν ἡ $A = \Gamma + \Pi \times B$, ἡ $A = \Gamma - \Pi \times B$, ὁ ἑκάτερον Γ καὶ Β καταμετρῶν ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, καὶ τὸν Α καταμετρήσει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω α ὁ ἀριθμὸς ὁ ἑκάτερον, τὸν Γ καὶ Β, καταμετρῶν. Καὶ δὴ τοῦ μὲν Γ δι' αὐτοῦ διαιρεθέντος, πηλίκον ἀνακυπτέτω τὸ π ὁλοσχερὲς, τοῦ δὲ Β, τὸ φ ὁμοίως. Καὶ ἔστω τοίνυν $\Gamma = \pi \cdot \alpha$, καὶ $B = \phi \cdot \alpha$. Ἔνθεντοι $A = \pi \cdot \alpha + \Pi\phi \cdot \alpha$. Ἢ $A = \pi \cdot \alpha - \Pi\phi \cdot \alpha$. Δῆλον δὲ ὅτι τό,τε κεφάλαιον, καὶ ἡ διαφορὰ διὰ τοῦ α διαιρεῖσθαι δυνάται, πηλίκων ἀνακυπτόντων ὁλοσχερῶν, ἔνθεν μὲν $\pi + \Pi\phi$, ἔνθεν δὲ $\pi - \Pi\phi$ (§. 57.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 111. Ἔστω Α διαιρετέος, Β διαιρέτης, Π τοῦ πηλίκου μέρος τὸ ὁλοσχερές· Γ τὸ λοιπόν. Ἔσται $A = \Gamma + \Pi \times B$. (§. 55.). Ἔνθεντοι ὁ ἀριθμὸς ὁ καὶ τὸν διαιρέτην Β, καὶ τὸ ὑπόλοιπον Γ καταμετρῶν, καταμετρήσει καὶ τὸν διαιρετέον Α. Ἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν Γ μὲν ᾖ ὁ διαιρετέος, Α δὲ τὸ λείψανον, τῶν ἄλλων ὡς πρὶν μενόντων, ἐπεὶ ἤδη $\Gamma = A + \Pi \times B$· ἔσται $A = \Gamma - \Pi \times B$· κἀντεῦθεν ὁ ἀριθμὸς, ὃς ἂν ἐπ' ἀκριβὲς διαιροίη καὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸν διαιρετέον, αὐτὸς καὶ τὸ λοιπὸν ἐπ' ἀκριβὲς διαιρήσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 112. Οἱοσδηποτοῦν ἄρα ἀριθμὸς τῶν διαιρούντων τὸν διαιρέτην ληφθεὶς, ἐὰν μὴ ὁ αὐτὸς καὶ τὸ λοιπὸν ᾖ διαιρῶν, οὐδὲ τὸν διαιρετέον διαιρήσει. Καὶ ἀνάπαλιν, εἰ μήγε τοῦτον, οὐδὲ τὸ λείψανον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 113. Ὁ ἄρα μέγιστος τῶν ἀριθμῶν, τῶν καὶ τὸν διαιρέτην διαιρούντων, καὶ τὸ λοιπὸν, ὁ αὐ-

τὸς

τὸς μέγιστος ἔσαι καὶ τῶν τὸν διαιρέτην ὡσαύτως, καὶ τὸν διαιρετέον. Εἰ γὰρ τῦ προσληφθέντος ἕτερός τις μείζων αὐτὰς διήρει, ἐκ ἂν ἦτος εἴασεν, ὐδὲ τὸ λοιπὸν ἀδιαίρετον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 114. Δυοῖν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον 2145, καὶ 182, τὸν μέγιστον κοινὸν ἀμφοῖν διαιρέτην προσανευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Δίελε δὴ τὸν μείζονα διὰ τῦ ἐλάσσονος, τὸ λοιπὸν ἐν μέρει σημειώσας. Εἶτα διὰ τῦδε τῦ λοιπῦ δίελε τὸν πρὸ τῦ διαιρέτην, ὁμοίως καὶ ἤδη, ὃ λοιπὸν ἐσὶ, παρασημειωσας. Οὕτω δὲ χώρει, ἀεὶ τὸν ἔχατον διαιρέτην διὰ τῦ λοιπῦ διαιρῶν, εἰς ὃ μηδὲν τέως ᾗ τὸ ὑπολειπόμενον· ὡδέπως.

Διαιρετέος	Διαιρέτης	Λείψανον.
2145	182	143
182	143	39
143	39	26
39	26	13
26	13	0

Ὁ τῶν διαιρετῶν ἔχατος 13, ὃς τὸ λειπόμενον ἦν ἐπὶ τῆς ἀμέσως προτέρας διαιρέσεως, ὁ μέγιστος ἐσὶ κοινὸς διαιρέτης τῶν προτεθέντων ἀριθμῶν 2145, καὶ 182.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔσι γὰρ ὁ ἀριθμὸς ὗτος κοινός τε καὶ μέγιστος διαιρέτης, τῶν ἐπὶ τῆς ἐχάτης τάξεως ἀριθμῶν 26 καὶ 13. Ἄρα καὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας τῦ μέσυ καὶ τῦ ἄκρυ, τῶν αὐτῶν ὄντων. Τοιγαρῦν καὶ τῦ πρώτυ καὶ μέσυ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ταύτης γραμμῆς. (§. 113.). Ὡς δ' αὔτως τῦ λόγυ πρέσω σω χωροῦντος, τέως καὶ ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ μέσον τῆς πρωτίστης γραμμῆς ἀφιξόμεθα. Οἱ δὲ ὑπῆρχον οἱ προτεθέντος 2145, καὶ 182.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 115. Τῇ γοῦν τοιᾷδε μεθόδῳ ἀείποτε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἐπὶ παντὸς κλάσματος ἐξευρίσκεται. Ἀλλ᾽ ἔστι δὴ ὁ διαιρέτης ἐκεῖνος τὰ πολλὰ μονάς. Καὶ τοῦτο τεκμήριον, τοῦ μηδὲν ἔχειν τὸ κλάσμα ἐπ᾽ ἔλαττον ἀνάγεσθαι ὄνομα· ὅτι ἡ μονὰς ἥκιστα διαιρεῖ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 116. Ἀριθμοὶ δύο, ἢ πλείονες, ὧν κοινὸς διαιρέτης μέγιστος ἡ μονάς· τουτέστιν ὧν οὐδεὶς κυρίως ἐστὶ κοινὸς διαιρέτης, καλοῦνται **πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους**. Τοιοίδε 5 καὶ 9, 10 καὶ 21, 8 καὶ 15 καὶ 19.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 117. Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν οἷς τὸ δοθὲν κλάσμα ἐκφέρεται, εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ἐὰν οἱ ἐν τῷ κλάσματι ὅροι πρῶτοι τύχωσι πρὸς ἀλλήλους, οἱ αὐτοὶ ἔσονται καὶ οἱ ἐλάχιστοι, τῶν οἷς ἐκδηλοῦσθαι τὸ κλάσμα δύναται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 118. Ἀριθμὸς ὁ πρὸς ὁντιναοῦν ἕτερον, ὑφ᾽ οὗ ἥκιστα διαιρεῖται πρῶτος, ἀπολύτως **πρῶτος**, ἢ ἁπλοῦς καλεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 119. Οὐδείς ἐστι τοῦ πρώτου διαιρέτης διαφέρων αὐτοῦ· ὡς ἐὰν ἦτις διαιρέτης τοῦ πρώτου Π, φέρε ὁ δ, ἐπειδὴ ὁ αὐτὸς δ καὶ ἑαυτὸν διαιρεῖ, εἴη ἂν ὁ δ, τῶν ἀριθμῶν δ καὶ Π διαιρέτης κοινός· ὅτε Π πρῶτος οὐκ ἂν εἴη πρός γε τὸν δ· οὐδ᾽ ἄρα ἁπλῶς πρῶτος.

πρῶτος. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὃν οὐδεὶς ἄλλος διαιρεῖ, ἀπολύτως πρῶτος, ἢ ἁπλοῦς ἐστίν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 120. Ἀριθμὸς ὁ μὴ πρῶτος, ἢ ἁπλοῦς τυγχάνων, οὗπερ ἔστι δηλονότι παρ' ἑαυτόν τις ἕτερος διαιρέτης, καλεῖται Σύνθετος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 121. Ἀναφύονται τοίνυν οἱ σύνθετοι ὑπὸ ἄλλων διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Εἰσὶ δὲ (ἐπεὶ περὶ ὁλοχερῶν ἐνταῦθα ὁ λόγος.) οἱ παράγοντες τοῦ συνθέτου ἐλάσσονες· τὰ δ' ἄλλα καὶ αὐτοὶ ἤτοι πρῶτοι, ἢ σύνθετοι. Καὶ εἰ τοῦτο, καὶ αὐτοὶ ἄρα εἰς ἑτέρους ἀναλυόμενοι, περὶ ὧν οἷόν τε εἰπεῖν τὸ αὐτό. Ἔνθεν τοι ἐπεὶ τοὺς ὁλοχερεῖς παράγοντας, οὐκ ἔστιν ἐς ἄπειρον ἀπομειοῦν, ἐπὶ τοὺς ἁπλοῦς τέως ἐπάναγκες αὐτοὺς ἀπολήγειν. Κἀντεῦθεν δῆλον, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς σύνθετος, ἐκ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων δυοῖν, ἢ πλειόνων παράγεσθαι πέφυκεν· ὅπερ ἐνταῦθα συντίθεσθαι λέγεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 122. Ἅπας ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ὡρισμένων τινῶν συντίθεται πρώτων, οὐκ ἐξ ἄλλων, καὶ ἄλλων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀριθμὸς ἅπας σύνθετος A, διαιρεθεὶς διὰ πρώτου τοῦ π, διδότω πηλίκον ὁλοχερὲς τὸ Π· διαιρεθεὶς δὲ διὰ πρώτου ἑτέρου τοῦ φ, πηλίκον παρεχέτω ὁλοχερὲς ὁμοίως τὸ Φ. Ἔσται δὲ $A = \pi . \Pi = \phi . \Phi$. Καὶ ἐὰν ἄρα ἑκατέρῳ τῶνδε τῶν ἴσων παραγομένων, ὁ αὐτὸς παρονομαστὴς $\phi . \Pi$ ὑπογραφῇ, προκύψει $\frac{\pi . \Pi}{\phi . \Pi} = \frac{\phi . \Phi}{\phi . \Pi}$ Καὶ τῶν κλασμάτων ἀναχθέντων $\frac{\pi}{\phi} = \frac{\Phi}{\Pi}$. Εἰσὶ δὲ π, φ, πρῶτοι· τοιγαροῦν καὶ ἐλάχιστοι τῶν ἐκφερόντων τὸ κλάσμα (§. 117.). Ἔνθεν τοι Φ ἐκ τοῦ π γίνεται, καὶ ἑτέρου τινὸς ὁλοχεροῦς τοῦ Ι. Καὶ Π ὁμοίως ἐκ τοῦ φ, καὶ τοῦ αὐτοῦ ὁλοχεροῦς Ι. (§. 107.). Τουτέστι $\Phi=\pi\cdot I$, καὶ $\Pi=\varphi\cdot I$. Διὸ καὶ ἀντικαθισταμένων γίνεται $\pi\cdot\Pi=\pi\cdot\varphi\cdot I$, καὶ $\varphi\cdot\Phi=\varphi\cdot\pi\cdot I$. Ἐπειδὴ δὲ $A=\pi\cdot\Pi$, καὶ τὸ αὐτὸ $A=\varphi\cdot\Phi$, ὁ ἀριθμὸς Α ἐκ τῶν δύο πρώτων π, φ, καὶ ἐξ ἄλλου τοῦ Ι συντίθεται. Ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος ὁ Ι, ἐὰν καὶ αὐτὸς πρῶτος ᾖ, εὔδηλον τὸ προτεθέν· ἐὰν δὲ σύνθετος, ταυτὰ καὶ περὶ τούτου ἂν ἔχοι δειχθῆναι, ἅττα καὶ περὶ τοῦ Α δέδεικται. Καὶ τάγε τοῦ Συλλογισμοῦ οἷόν τε προαγαγεῖν, εἰς ὃ τέως ὁ Ι πρῶτος προκύψειε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 123. Τοῦ συνθέτου ἀριθμοῦ, οὐδεὶς ἄλλος διαιρέτης ἐστὶ παρὰ τοὺς ἁπλοῦς ἐξ ὧν σύγκειται, καὶ παρά τινας ἐκ τούτων συνθέτους· οὕτως ὁ 30, ὁ ἐκ τῶν ἁπλῶν 2, 3, 5, παρὰ τούσδε διαιρέτας ἔχει καὶ τοὺς ἐξ αὐτῶν συνθέτους· $6=2\times3$, $10=2\times5$, $15=3\times5$. $30=2\times3\times5$, μόνους.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 124. Ἐὰν οἱ σύνθετοι ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος $\frac{15}{12}$ ἀναλυθῶσιν εἰς τοὺς ἐν αὐτοῖς ἁπλουστέρους, ὡδέπως· $\frac{3\times5}{2\times2\times3}$, ἐπὶ τοὺς ἐλάσσονας τὸ κλάσμα ἀναχθήσεται ὅρους τῶν ἐφ' ἑκατέρῳ ἁπλῶν παραγόντων ἐξαλειφθέντων, ὅσοι κοινοί. Ὅθεν ἐκ τοῦ προτεθέντος κλάσματος γίνεται $\frac{5}{2\times2}=\frac{5}{4}$. Διὸ δὴ ἐὰν ἅπαντες οἱ ἐν τῷ παρονομαστῇ ἁπλοῖ παράγοντες, κἂν τῷ ἀριθμητῇ ἐνῶσι, τὸ κλάσμα ἀριθμῷ ὁλοχερεῖ ἴσον ἔσται. Εἰ δὲ μηδένες ἔνεισι τῷ ἀριθμητῇ ἁπλοῖ, οἱ κἂν τῷ παρονομαστῇ ἐγχωροῦντες, τὸ κλάσμα ἐπὶ ὅρους ἀναχθῆναι ἐλάσσονας οὐ δυνήσεται· πολλοῦ γὰρ καὶ δεῖ τοῦ καὶ δι' ὁλοχεροῦς ἔχειν παρίστασθαι.

ΠΟΡΙ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 125. Προτεθέντων ἀριθμῶν δυεῖν ὁλοχερῶν ὡντινωνοῦν, οἷον τῶνδε τῶν συνθέτων 2. 3. 3. 5, καὶ 3. 5. 7, ὧν διαιρέται κοινοὶ 3 καὶ 5, ἐὰν ὁ ἕτερος πολλαπλασιασθῇ διά τινος ὁποιουδήποτε ἁπλοῦ, τοῦ ἐν τῇ θατέρου συνθέσει χώραν μὴ ἔχοντος, ἢ δι' αὐτοῦ ἐκείνου διαιρεθῇ, ὁ κοινὸς διαιρέτης τροπὴν οὐχ ὑποστήσεται. Οὕτω τῶν ἀριθμῶν 2. 3. 3. 5. 11, καὶ 3. 5. 7, ἢ 2. 3. 3. 5, καὶ 3. 5. 7. 7, ὁ αὐτὸς ἐστὶ κοινὸς διαιρέτης μέγιστος 3. 5, ἢ 15, ὃς ἦν καὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐν ἀρχῇ προτεθέντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 126. Ἐνθένδε ἡ τοῦ κλάσματος ἐπ' ἔλαττον ὄνομα ἀναγωγὴ εὐπετεστέρα γενήσεται, ἑκατέρου τῶν ἐπ' αὐτῷ ὅρων, δι' ἁπλοῦ τινος ἀριθμοῦ διαιρεθέντος, ὃς τὸν ἕτερον οὐκ ἂν διαιρεῖν δύναιτο. Ἔστι γὰρ τῶν ὅρων τοῦ οὕτως ἀνακύπτοντος κλάσματος, ὁ αὐτὸς κοινὸς μέγιστος διαιρέτης, ὃς ἦν καὶ τὸ κατ' ἀρχὰς ἐπὶ τοῦ προκειμένου· οἷον εἰ ἀναγαγεῖν δέοι τὸ κλάσμα $\frac{30}{147}$, διαιρεθέντος τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ 2, ὃς τὸν παρονομαστὴν ἥκιστα διαιρεῖ· καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 7, ὃς τὸν ἀριθμητὴν ἥκιστα διαιρεῖ, γεννᾶται κλάσμα $\frac{15}{21}$, οὗ ἑκάτερος τῶν ὅρων διαιρέσιμος ἐστὶ διὰ 3· ὃς αὐτὸς ἐστὶν ὁ κοινὸς μέγιστος διαιρέτης τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος τοῦ ἐν ἀρχῇ προτεθέντος, $\frac{30}{147}$, δι' οὗ ἐπὶ τὸ $\frac{10}{49}$ ἀνάγεται.

§. 127. Ὃς δ' ἂν ταύτηγε διαπονῆσαι ἕλοιτο, ἀεὶ ἑκάτερον τῶν τοῦ κλάσματος ὅρων, δι' ἁπλοῦ τινος ἀριθμοῦ διαιρῶν, τοῦ μὴ διαιροῦντος τὸν ἕτερον, πρὸς αὐτὸν ἀπαντήσει τέως, τὸν κοινὸν διαιρέτην τὸν μέγιστον. Οὕτως ἐὰν τοῦ πρὸ μικροῦ ἀνακύψαντος $\frac{15}{21}$ διαιρεθῇ ὁ μὲν ἀριθμητὴς διὰ 5, ὁ δὲ παρονομαστὴς διὰ 7, προελεύσεται $\frac{3}{3}$. Ἔστι δὲ ὁ 3, ὁ κοινὸς ἐνταῦθα διαιρέτης ὁ μέγιστος, ὡς κατείδομεν.