ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 36. Τὰ πρὸς τὴν αὐτὴν ἀναφερόμενα μονάδα κλάσματα, ὧν παρονομασαὶ οἱ αὐτοὶ, προστίθενται ἀλλήλοις, τῶν μὲν ἀριθμητῶν ἐν κεφαλαίῳ ἐπαθροιζομένων, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ τηρουμένου. Εἰσὶ γὰρ τούτων τεθέντων, αἱ ὑπὸ τῶν ἀριθμητῶν σημαινόμεναι μονάδες, ἀλλήλαις ἴσαι.

Οὕτω τῶν κλασμάτων $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ κεφάλαιον ἐστὶ τὸ $\frac{3}{4}$· τῶν δὲ $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{7}$, τὸ $\frac{10}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 37. Ἀριθμῶν δυοῖν, ἐν οἷς μονάδες δεκαδικαὶ οἱωνδήποτε τάξεων (§. 20.) περιέχονται, τοῦ μείζονος τὸν ἐλάσσονα ἀφελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

5672	3458	3000
4261	1539	985
1411	1919	2015
5,321	0,5700	6,000
3,251	0,0327	0,213
2,070	0,5373	5,787

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ γραφέσθωσαν, ὡς τῶν μονάδων τὰς ἰσοδυνάμους ὁμοστιχεῖν. Εἶτα ἀπὸ τῶν δυνάμει ἐλαχίστων ἀρχομένοις κἀπὶ τὰς μειζοδυνάμους χωροῦσιν ἀφαιρείσθω ὁ τῶν μονάδων ἑκαστησοῦν τάξεως ἀριθμὸς, ὁ ἐπὶ τοῦ ἥττονος, ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ μείζονι, καὶ τὸ λοιπὸν σημειούσθω ὑπὸ στίχον τὸν αὐτόν· ὁπηνίκα δηλαδὴ πλείους αἱ ἰσοδύναμοι μονάδες εἰσὶ τῷ ἐπὶ τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ χαρακτῆρι, ἢ τῷ ἐπὶ τοῦ ἥσσονος. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐλάσσονες, μονὰς μία ἀπὸ τοῦ χαρακτῆρος τοῦ ἐγγὺς ἑπομένου, εἰς

δέκα

δέκα ἀναλυέσθω, ταῖς ἔνθα ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ἰσοδυναμούσας, καὶ ταύταις προστιθεμένας· οὕτω δὲ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ ἀριθμοῦ ἤδη μείζονος γινομένης, ἡ διαφορὰ ὡς πρότερον σημειούσθω. Ὁ δὲ τοῦ μείζονος τῶν ἀριθμῶν χαρακτὴρ, ἀφ' οὗ ἡ ληφθεῖσα εἰς δέκα ἀναλέλυται μονάδας τῆς ἐγγὺς καταδεεστέρας τάξεως, νοείσθω ἤδη μονάδι ἀπομειωθεὶς, ἐς τ' ἂν δέοι τὴν ἀφαίρεσιν προαγαγεῖν. Τούτων οὕτως ἄχρι τελευτῆς γινομένων, ἔσονται αἱ τοῦ ὑφ' ἑκάστῃ στήλῃ γεγραμμένου χαρακτῆρος μονάδες, ὁμοταγεῖς ταῖς ὁμοστίχοις καὶ ἰσοδύναμοι. Συναχθέντες δὲ οἱ χαρακτῆρες οὗτοι δώσουσι τὴν διαφοράν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ γὰρ διὰ τῶνδε τῶν χαρακτήρων δηλούμενος ἀριθμὸς, τὰς ὑπεροχὰς περιενήνοχε τῶν κατὰ πᾶσαν τάξιν μονάδων τοῦ μείζονος τῶν ἀριθμῶν, ὑπὲρ τὰς ἐν τῷ ἥττονι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 38. Τῶν κλασμάτων τῶν ἐπὶ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀναφερομένων, παρονομαστὰς δ' ἐχόντων τοὺς αὐτοὺς, ἡ διαφορὰ λαμβάνεται, ἀφαιρουμένου μὲν τοῦ ἥττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀριθμητοῦ, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ τηρουμένου.

Οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ ἐστὶ $\frac{2}{4}$. Ἡ δὲ τῶν $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}$ ἐστὶ $\frac{3}{7}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 39. Τὰ δι' ἀριθμῶν ἐκδηλούμενα πράγματα πρὸς ἄλληλα παρατιθεμένοις, ἐξ αὐτῆς δῆλον τῆς φύσεως, κἂν μηδεὶς ἐκδιδάξειε, πότε δὴ τῇ προσθέσει προσχρηστέον ἡμῖν ἐστὶ, πότε δὲ τῇ ἀφαιρέσει. Οὕτως ὑπολογίζοντες πάντες τά τε λήμματα, καὶ τὰς δαπάνας, ἐν μέρει καταγράφειν εἰώθασιν,

εἰς

εἰς κεφάλαι᾽ ἄττα ἴδια ἑκάτερα ἐπαθροίζοντες· εἶτα τῶν κεφαλαίων τὸ ἧττον ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τοῦ μείζονος· καὶ τοῦ μὲν τῶν λημμάτων ὑπερβάλλοντος, τῇ ὑπεροχῇ τὴν αὔξησιν τῆς περιουσίας ἑαυτῶν προσλογίζονται· ἢν δ᾽ ὑπερβάλλοι τὸ τῆς δαπάνης, πλεονεκτεῖν μὲν τῇ διαφορᾷ τὴν ἔνδειαν, μειονεκτεῖν δὲ τὴν περιουσίαν σφίσιν ἐπιγιγνώσκουσιν.

§. 40. Ἐκπερανθείη δ᾽ ἂν τὰ τοῦ λογισμοῦ πολλάκις ἐν ἐπιτομῇ οὕτω. Διακρινέσθωσαν τῶν ἀριθμῶν οἷς τὰ λήμματα δηλοῦται, τῶν οἷς αἱ δαπάναι, στῳ δήποτε σημείῳ· οἷον τὰ μὲν τῷ +, αἱ δὲ τῷ − ἐπισημειούσθωσαν. Εἶτ᾽ ἐκκείσθωσαν ὁποιᾳδήποτε τάξει, οἷον + 17 − 13 − 5 + 8 − 2 + 7 − 5. Συναχθήσεται γὰρ τῶν ζητουμένων τὸ ἔσχατον, ὅσον δηλαδὴ τὸ τῆς περιουσίας τοῖς διαλλήλοις λημμασί τε καὶ δαπανήμασι πλεονεκτοῦν, ἢ μειονεκτοῦν εἴη, τρόπῳ τοιῷδε, ἢ παραπλησίῳ. + 17 − 13, ταυτὸ δύναται τῷ + 4. τούτῳ γοῦν εἰ προσγένοιτο − 5, προκύψει − 1. Ἀλλὰ γὰρ − 1 + 8 ἐστὶν + 7. τὸ δὲ, μετὰ τοῦ − 2 ἐστὶ + 5. Προσπαραληφθέντος δὲ καὶ τοῦ + 7, γίνεται + 12· τό, τε + 12 σὺν τῷ − 5 καθίσταται + 7· τοιγαροῦν ἡ τῶν λημμάτων ὑπὲρ τὰ δαπανηθέντα διαφορὰ ἔσται 7, καὶ τοσούτῳ καὶ προσλογισθήσεται τῆς περιουσίας τὸ πλεονέκτημα. Ἀλλ᾽ ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς παραδείγματος + 12 − 15 − 2 + 4 − 5, τῶν αὐτῶν γενομένων, τὸ προκύπτον − 6, τὴν τῶν δαπανηθέντων ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὰ λήμματα, τῷ ἀριθμῷ 6 ὑπερπίπτουσαν συνιδεῖν παρέξεται, καὶ τοσούτῳ ἄρα καὶ τὴν μὲν περιουσίαν ἀπομειωθεῖσαν ἐλέγχει, τὴν δὲ ἔνδειαν προσαυξήσασαν.

§. 41. Ὁ οὕτω τοὺς ἀριθμοὺς μετιὼν, τὰς μὲν τῶν ἀριθμουμένων ποσότητας ὡς θετικὰς ἐκδέχεται, ἃς ἐπισημειοῖ τῷ +, τὰς δὲ ἀποφατικὰς, ἃς τῷ −· τοῦ μὲν δηλαδὴ τὸ πλέον, τοῦ δὲ τὸ μεῖον αὐτῷ προσσημαίνοντος. Τῶν δὲ ποσοτήτων τινὰς μὲν ἀντὶ θετικῶν, τίνας δὲ ἀντὶ ἀποφατικῶν τιθέναι δέον, ἐξ αὐτοῦ τούτου, ὃ τέως ἐστὶ τὸ σκοπούμενον, καταφαίνεται. Τῷ μὲν γὰρ, φέρε, τὰ προσκτηθέντα οἱ συνιδεῖν ὅσα, σκοποῦντι, τὰ μὲν τοῦ λήμματος θετικὰ ἔσται, τὰ δὲ τῆς δαπάνης ἀποφατικά. Τοὐναντίον δὲ τὰ τῆς ἐνδείας ὑπολογιζομένῳ, καὶ ὅσον αὐτῷ τὰ περιόντα τῶν χρημάτων μεμείωται, ἢ ὅσα τῶν ἀλλοτρίων δεδαπάνηται· τὰ μὲν τῆς δαπάνης θετικὰ ἔσται, τὰ δὲ τοῦ λήμματος ἀποφατικά. Ὁπότερον δ' ἄντις τούτων ἕλοιτο, τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ὡσαύτως προβήσεται· ὁ δὲ ἔσχατον προκύπτων ἀριθμὸς δοκιμάσει. Ἐὰν γὰρ τῷ + ἐπισημαίνηται, τὸ θετικὸν δείξει, ἐὰν δὲ τῷ −, τὸ ἀποφατικόν.

§. 42. Μυρία ποσοτήτων φέρεται γένη, τὰ κατὰ τὴν γενομένην λημμάτων μεταξὺ καὶ δαπανημάτων παράθεσιν, πρὸς ἄλληλα ἔχοντα, ὧν ἐὰν τάδε φέρε, ἢ τάδε ὡς θετικὰ ληφθῇ, τἀναντία ἀποφατικὰ ἔσται. Οὕτω τῆς ἀνόδου κατὰ θέσιν ληφθείσης, ἀποφατικὴ ἔσται ἡ κάθοδος· καὶ ἀνάπαλιν. Καὶ ἐὰν ἡ ἀπὸ τῆς ἑώας πρὸς δυσμὰς φέρουσα πορεία θετικὴ λέγηται, ἡ δυσμόθεν πρὸς ἕω ἀποφατικὴ ἔσται· καὶ ἀνάπαλιν. Καὶ εἰ τὸ ἐν τῇ ὑδρίᾳ ἐγχεόμενον ὕδωρ, καταφατικῶς νοοῖτο, τὸ ἐκχεόμενον τῆς ὑδρίας ἀποφατικῶς δεήσει ἐκδέξασθαι· καὶ ἀνάπαλιν. Καὶ τῆς ἄνω ἑλκυούσης δυνάμεως θετικῆς οὔσης, ἡ καθελκύουσά τε καὶ κατασπῶσα, ἀποφατικὴ ἔσται· καὶ τοὐναντίον· καὶ τὰ παραπλήσια.

§. 43. Οὗ δ' ἂν οὐδέτερον παρῇ τῶν σημείων, θετικῶς ἀεὶ ἐκλαμβάνεται τὸ κείμενον. Τὰ δὲ τοῖς σημείοις ὁμοιότροπα τῶν ποσῶν, τὰ ἐπίσης δηλαδὴ διὰ τῶν +, ἢ τῶν −, θετικῶς, ἢ ἀποφατικῶς ἔχειν νοούμενα, ὑπ' ἀλλήλων αὔξεται, ὡς ὑφ' ἑκάστου τούτων προσαφθέντος, οἷον τοῦ Α, κατὰ μέτρον τῆς

προσό-

προσόδου, τὴν τῶν λοιπῶν ἅμα συλλογὴν ἐπὶ τὸ πλέον προάγεσθαι. Δυεῖν δὲ ποσοτήτων τοῖς +, καὶ −, διαφερουσῶν, ὧν ἡ μὲν θετικὴ δηλονότι, ἡ δὲ ἀποφατική, ἀείποτε ἡ ἐλάσσων μέρος τῆς μείζονος περιτρέπει ἑαυτῇ ἴσον, τὴν ὑπεροχὴν καταλείπουσα τῆς μείζονος ὑπὲρ τὴν ἐλάσσονα. Ἡ δὲ ὑπεροχὴ θετικὴ μὲν ἔσται, θετικῆς τῶν ποσοτήτων οὔσης τῆς μείζονος· ἀποφατικὴ δὲ, ἀποφατικῆς. Ἐξ οὗ ἕπεται καὶ τὰς + A − A μηδὲν παρέχειν, ὅ,τι ποτ᾽ ἂν εἴη τὸ ὑπὸ τοῦ A δηλούμενον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 44. Πολλαπλασιάζειν ἀριθμὸν δοθέντα τὸν A, δι᾽ ἄλλου καὶ τούτου δοθέντος τοῦ E, οὐδὲν ἀλλ᾽ ἢ ἐκ τοῦ A καινὸν ἐστὶν ἀπογεννᾶν ἀριθμὸν τὸν Γ, λόγῳ τοιῷδε, ᾧ καὶ ὁ E ἐκ τῆς μονάδος ἐπαναληφθείσης γεγένηται. Καὶ καλεῖται μὲν ὁ A, Πολλαπλασιαστέος· ὁ δὲ E, Πολλαπλασιαστής· ὁ δὲ Γ τὸ Παραγόμενον, ἢ τὸ Γινόμενον.

§. 45. Διαιρεῖν δὲ ἀριθμὸν δοθέντα τὸν A, δι᾽ ἀριθμοῦ δοθέντος ἄλλου τοῦ Δ, οὐδὲν ἐστὶν, ἀλλ᾽ ἢ ἀπὸ τοῦ A, καινὸν ἀριθμὸν ἀπογεννᾶν τὸν Π, ὃν δήπου τρόπον καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἡ μονὰς γίνεται. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς A, ἐστὶν ὁ Διαιρετέος· ὁ δὲ Δ, Διαιρέτης καλεῖται· ὁ δὲ Π, τὸ Πηλίκον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 46. Ὅστις ποτ᾽ οὖν ᾖ ὁ ἀριθμὸς A, ὁ πολλαπλασιαστὴς E, ἢ ὁ διαιρέτης Δ, ἤτοι ὁλοσχερὴς ἐστὶν, ἢ κλασματικός. Εἰ μὲν οὖν ὁλοσχερὴς ὁ πολλαπλασιαστὴς, ἐκ τῆς μονάδος γίνεται ἐπαναλημμένης· τουτέστι μονάδων ὁποσωνοῦν τινῶν ἰσομεγεθῶν ἀλλήλαις ἐπαθροιζομένων. Τοιγαροῦν καὶ ἡ τοῦ παραγομένου εὕρεσις, δι᾽ ἐπαναλήψεως τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· ἤτοι διὰ προσθέσεως ἀριθμῶν τινῶν ἐκείνῳ ἴσων συντελ-

Σχ. 2. τελεσθήσεται. Καὶ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ΑΒ, ὁ ἐκ μονάδων τε, καὶ μερῶν μονάδος ὁπωσοῦν συγκείμενος, πολλαπλασιασθῇ δι' ὁλοχεροῦς ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ, παραχθήσεται ἀριθμὸς, ὁ ἐν εἴδει τετραπλεύρου ΑΒΕΖ ἐκκείμενος· Καὶ τοῦδε δὴ τοῦ παραγομένου αἱ μονάδες ταῖς τοῦ πολλαπλασιαστέου ΑΒ μονάσιν, ἴσαι εἰσὶν, ὁποῖαι δήποτ' ἂν ὦσιν αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ΓΔ.

§. 47. Ἐὰν δὲ ὁ Διαιρέτης ὁλοχερὴς ᾖ, γίνεται ἐξ αὐτοῦ μονὰς, εἰς ἴσα μέρη διαιρεθέντος, ταῖς ἐνούσαις αὐτῷ μονάσιν ἰσάριθμα. Ἄρα καὶ τὸ πηλίκον προκύψει, ἐπειδὰν καὶ ὁ Διαιρετέος εἰς τοσαῦτα ἴσα ἀλλήλοις μέρη διαιρεθῇ. Καὶ εἰ διὰ ΓΔ διελεῖν δέοι ἀριθμόν τινα, τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε, κατὰ τὸ ΑΒΕΖ, τετραπλεύρου δίκην ἐκκειμένου, ὡς ἐν ἑκάστῳ τῶν στίχων τῶν κατὰ τὴν ΓΔ πρόοδον χωρούντων, τοσαύτας ἐνεῖναι μονάδας, ἢ μονάδος μέρη ἀλλήλοις ἴσα, ὅσας ὁ Διαιρέτης ΓΔ περιενήνοχε, πηλίκον ἔσται τὸ ΑΒ. Αἵτε ἐν αὐτῷ μονάδες, ἴσαι ἔσονται ταῖς μονάσι τοῦ Διαιρετέου ΑΒΕΖ, ὁποῖαι δ' ἂν ὦσιν αἱ μονάδες αἱ τοῦ Διαιρέτου.

§. 48. Τοιγαροῦν ἡ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ Α διαίρεσις διὰ τοῦ δοθέντος Δ, ποικιλαχῶς ἂν ἐκτελεσθείη· ῥᾷστα δὲ πάντων, ἐὰν αἱ ἐν τῷ Διαιρετέῳ Α μονάδες πᾶσαι, εἰς τοσάδε ἴσα μέρη διαιρεθῶσιν, ὅσαι αἱ μονάδες ἔνεισι τῷ Δ· τὰ δὲ δὴ μέρη ταῦτα ἐν εἴδει τετραπλεύρου, ὡς εἴρηται, διαταχθῇ. Οὕτω γὰρ ἕκαστος τῶν μορίων στίχος, κατὰ ΓΔ χωρῶν τὴν μονάδα δώσει, ἧς τῇ διαιρέσει ἀνέφυ τὰ μόρια. Τούτου οὖν γινομένου τὸ πηλίκον κλάσμα οἷον καθίσταται, οὗ ἀριθμητὴς μὲν ὁ Διαιρετέος, παρονομαστὴς δὲ ὁ Διαιρέτης· ὥστε ἐν γένει, εἰ διελεῖν δέοι Α διὰ Δ, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{\mathrm{A}}{\Delta}$.

§. 49.

§. 49. Πρόχειρος μὲν ἡ τῆ ὅτω διαιρεῖν μέθοδος, τῶν ἀριθμῶν Α, Δ βραχυτέρων ὄντων. Εἰ δὲ καὶ ὁ Διαιρετέος Α, τῆ Διαιρέτῃ ἐλάσσων τύχοι, ἐδ᾿ ἂν ἔχοι χώραν μέθοδος ἑτέρα. Μειζόνων δὲ τῶν ἀριθμῶν ὄντων, δυχερέςερον τὸ $\frac{A}{\Delta}$ εἰς νόησιν παρὰ τὴν πολυμέρειαν. Διὸ δὴ τότε περαίνεσθαι φιλεῖ ἡ διαίρεσις, ὡς οἷόντε πλειόνων μονάδων ὁλοχερῶν τηρεμένων. Γίνεται δὲ τῦτο, ἐὰν ὡς ἔνι πλεῖςοι τῶν σίχων ὡς ὁ ΑΕ. ἐκ τῶν τῆ διαιρετέε μονάδων ὦσι συγκείμενοι, ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν, εἴτινες εἶεν, κλάσμα γένηται, καθ᾿ ὃν τρόπον εἴρηται. Καὶ τὸ δὴ πρῶτον μέρος τῦ τοιῦδε πηλίκε, ἀριθμὸς ἔσαι διασημαίνων, ποσάκις τοσαίδε μονάδες, ὅσαι ἔνεισι τῷ διαιρέτῃ, ἀπὸ τῦ διαιρετέε ἀφαιρεῖσθαι δύνανται· τῦ δὲ κλάσματος, ὃ τὰ πολλὰ δέον προσεπιγράφειν, τῷ μὲν ἀριθμητῇ, αἱ λοιπαὶ ἔνεισι τῦ διαιρετέε μονάδες, ἀντὶ δὲ παρονομαςῦ αὐτὸς κεῖται ὁ διαιρέτης.

§. 50. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς, οἷος ὁ $\frac{c}{f}$, ἐκ μονάδος γίνεται εἰς μέρη ἴσα διῃρημένης τοσάδε, ὁπόσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ παρονομαςῇ, τῷ ἐξ αὐτῶν τῶν μορίων, ἡλίκον τὸ $\frac{1}{f}$, ταῖς ἐν τῷ ἀριθμητῇ μονάσιν ἰσάριθμα προσλαμβάνεσθαι (§. 7.), ἐὰν ὁ πολλαπλασιαςὴς κλασματίας ᾖ, εὑρεθήσεται δὴ τὸ παραγόμενον, τῦ πολλαπλασιαςέε ἀριθμῦ Α, τῷ τῦ κλάσματος παρονομαςῇ διαιρεμένε, καὶ τῦ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντος πηλίκε, διὰ τῦ ἀριθμητῦ πολλαπλασιαζομένε.

§. 51. Τὐναντίον δὲ ἐκ τῦ κλάσματος $\frac{c}{f}$ μονὰς τελεῖται, ἐὰν εἰς τοσάδε ἴσα μέρη διαιρεθῇ, ὁπόσαι ἐν τῷ ἀριθμητῇ αἱ μονάδες· Τό, τε ὅτως ἀνακύψαν μόριον $\frac{1}{f}$, τοσάκις ληφθῇ, ὅσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ παρονομαςῇ. Τοιγαρῦν καὶ ἡ διαίρεσις παντὸς ἀριθμοῦ Α, διὰ κλάσματος $\frac{B}{\Gamma}$ ἐκτελεσθήσεται, διαιρουμένου τοῦ ἀριθμοῦ Α, διὰ τοῦ ἐν τῷ κλάσματι ἀριθμητοῦ Β, καὶ τοῦ ἐντεῦθεν προκύπτοντος πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ Γ.

§. 52. Πολλαπλασιασμοῦ σημεῖον ἐτέθη ×, τὸ μεταξὺ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων ἐγγραφόμενον οὕτω 3 × 4. Ἐνίοτε δὲ καὶ τὸ (·) ὁμοίως παρενσιζόμενον. Καὶ δῆλον ἄρα τίποτε νοητέον ἐν τούτοις $3 \times 4 = 3 \cdot 4 = 12$. Εἰ δὲ διὰ γραμμάτων ἐπισημαίνοιντο οἱ ἀριθμοὶ, ὧν ἕτερος δι' ἑτέρου πολλαπλασιαστέος, ἐκεῖνα καὶ διὰ τῶν αὐτῶν συζεύγνυσθαι σημείων δυνάμενα, ὡς τὰ πολλὰ μέντοι ἀμέσως, δίχα παρεμπλώσεως δηλαδὴ σημείου τινὸς, προσγράφεται. Τὸ δὲ πηλίκον, τὸ ἐκ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ Α διὰ τοῦ Β προκύπτον, οὐδὲν δέον ἄλλως πως σημειοῦσθαι, ἢ κατὰ τὸν τύπον τοῦ κλάσματος $\frac{A}{B}$ (§. 48.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 53. Ἐὰν διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὁλοχεροῦς ὄντος, τὸ γενόμενον διαιρεθῇ, ὁ πολλαπλασιαστέος ἀνακύψει· Καὶ ἐὰν διὰ τοῦ διαιρέτου, ὁλοχεροῦς ὄντος, τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ, ὁ διαιρετέος ἀνακύψει. Ὃ κἂν ἐκ τοῦ 2 Σχήμ. εὔδηλον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 54. Ἐκ τῶν ἐν τῷ Σχολίῳ (§. 50. 51.) παρατετηρημένων, ἐπειδὴ τοῦτο ἀληθὲς ὂν ἕπεται, καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ διαιρέτου κλασματικῶν ὄντων· Ἐν γένει ἄρα ἀριθμοῦ Α, δι' ἀριθμοῦ οὑτινοσοῦν Π πολλαπλασιασθέντος, ἐὰν τὸ παραγόμενον, διὰ τοῦ ῥηθέντος πολλαπλασιαστοῦ Π διαιρεθῇ, ὁ ἀριθμὸς Α πάλιν ἀνακύψει. Καὶ ἀριθμοῦ Α, δι' ἀριθμοῦ Δ διαιρεθέντος, ἐὰν τὸ πηλίκον διὰ τῦ αὐτῦ Δ πολλαπλασιασθῇ, ὁ ἀριθμὸς Α πάλιν ἀνακύψει. Εἴτε ὁλοχερὴς εἴη ὁ Δ, εἴτε καὶ κλασματίας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 55. Ἄρα καὶ ἀριθμῦ τῦ Α εἰς μέρη δύο Ρ καὶ Σ κατατμηθέντος, ὥστε εἶναι $Α = Ρ + Σ$, ἐὰν θάτερον τῶν μερῶν Ρ διαιρεθὲν διὰ τῦ Δ, πηλίκον δῷ τὸ Π, ἔσαι τὸ $Ρ = Π \times Δ$. Ἔνθεντοι καὶ $Α = Π \times Δ + Σ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 56. Ἐκ δὲ τῦ αὐτῦ 2 Σχήμ. Φανερὸν, ὡς ἐὰν ὁ δι' ἀριθμῦ ὁλοχερῦς τῦ Π, πολλαπλασιαςέος Α, ἐξ ἀριθμῶν δυοῖν Β καὶ Γ σύνθετος ᾖ, ὡς εἶναι $Α = Β + Γ$, ἔσαι δὴ τὸ παραγόμενον, $Π \times Α = Π \times Β + Π \times Γ$. Ἐξ ὗ ἕπεται, ὡς ἐὰν ᾖ $Α = Β - Γ$, ἔσαι τὸ γινόμενον $Π \times Α = Π \times Β - Π \times Γ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 57. Οὕτω καὶ ἐὰν ὁ διὰ τῦ Δ διαιρετέος ἀριθμὸς Α, ἐκ μερῶν δυοῖν Β καὶ Γ σούνθετος ᾖ, ὥστε εἶναι $Α = Β + Γ$, ἔσαι δὴ τὸ πηλίκον $\frac{Α}{Δ} = \frac{Β}{Δ} + \frac{Γ}{Δ}$.

Καὶ ἐὰν ᾖ $Α = Β - Γ$, ἔσαι τὸ πηλίκον $\frac{Α}{Δ} = \frac{Β}{Δ} - \frac{Γ}{Δ}$.

Ἐὰν γὰρ ᾖ $Α = Β + Γ$, ἔσαι $\frac{Β}{Δ} + \frac{Γ}{Δ} = \frac{Β + Γ}{Δ}$ (§. 36.) $= \frac{Α}{Δ}$. Ἐὰν δὲ ᾖ $Α = Β - Γ$, ἔσαι $\frac{Β}{Δ} - \frac{Γ}{Δ} = \frac{Β - Γ}{Δ}$ (§. 38.) $= \frac{Α}{Δ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ.

§. 58. Διπλασιασθέντος τῦ πολλαπλασιας ῦ, διπλασιάζεται καὶ τὸ παραγόμενον. Γίνεται γὰρ

 ἤδη

ἤδη δὶς τοσοῦτον, ὃ διὰ τοῦ ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἅπαξ ἐγίνετο. Καὶ ἐν γένει τοίνυν ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς, δι᾽ ἀριθμοῦ τινος πολλαπλασιασθῇ, διὰ τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασιασθὲν ἔσται καὶ τὸ παραγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 59. Ὅτι δ᾽ αὐτὸ τοῦτο καὶ περὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου ῥητέον, φανερόν. Διὸ καὶ ἀνάπαλιν θατέρου τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν, δι᾽ ἀριθμοῦ τινὸς ὁλοκερεῦς διαιρεθέντος, δι᾽ αὐτοῦ τούτου διαιρεθήσεται καὶ τὸ παραγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 60. Ἀριθμοῦ παντὸς Α, δι᾽ ἄλλου τοῦ Δ διαιρεθέντος, τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ παρίστησιν ὁσάκις ὁ Δ περιεχόμενος ἐστὶν ἐν τῷ Α. ἐπειδὰν ἐφ᾽ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Δ, μονάδες ὦσιν αἱ αὐταί. Τουτέστι τὸ πολλαπλοῦν τοῦ διαιρέτου Δ, καὶ τὰ τοῦδε τοῦ Δ πηλίκα μέρη, ἅμα ληφθέντα, συναποτελεῖ τὸν διαιρετέον Α. Τοῦτο δὲ αὐτόθεν ἐκ τοῦ τῆς διαιρέσεως νόμου (§. 48.) καταφανὲς, τοῦ Δ ὁλοκερεῦς τυγχάνοντος. Ἐὰν δὲ τῷ Δ ὑποτεθῇ παρονομαστὴς ὅς τισοῦν, οἷον 3, ὥστε κλάσμα συστῆναι· τοῦ αὐτοῦ Α διὰ $\frac{\Delta}{3}$ διαιρεθέντος, πηλίκον ἔσται $\frac{3\,A.}{\Delta}$ (§. 51.), τὸ προκύπτον καὶ τοῦ 3 Α, διαιρεθέντος διὰ τοῦ Δ. Καὶ δείξει τοίνυν ἐνταῦθα τὸ $\frac{3\,A,}{\Delta}$ ὁσάκις τὸ Δ ἐν τῷ 3 Α ἐμπεριέχεται· καὶ γὰρ ὁ διαιρέτης καὶ ἤδη ὁλοκερής. Ἐπεὶ δὲ δῆλον ὅτι Δ ἐν τῷ 3 Α τοσάκις, ὁσάκις $\frac{\Delta}{3}$ ἐν τῷ Α. Ἄρα τὸ αὐτὸ πηλίκον $\frac{3\,A}{\Delta}$ δείξει, ὁσάκις καὶ ὁ κλασματικὸς διαιρέτης $\frac{\Delta}{3}$ ἐμπεριεχόμενος ἔνεστιν ἐν τῷ διαιρετέῳ Α.

ΠΟΡΙ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ.

§. 61. Ἐπειδὴ οὖν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς Δ, ἐν τῷ 2Α δὶς τοσάκις ἐμπεριείληπται, ὁσάκις ἐν τῷ Α· καὶ ἐν τῷ 3Α τρὶς, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· τοῦ διαιρετέου Α δι᾽ οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς πολλαπλασιασθέντος, ἐὰν ὁ διαιρέτης Δ μένῃ, τὸ πηλίκον ἐπιπολλαπλασιασθήσεται ἰσαρίθμως. Διαιρεθέντος δὲ τοῦ Α διά τινος ὁλοσχεροῦς, ἐὰν καὶ οὕτω τὸ Δ μένῃ, τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου διαιρεθήσεται. Κἀντεῦθεν ἐπειδὰν Π, Α, Δ ὁλοσχερεῖς ὦσι, ταυτὸ προκύπτει, εἴτε τοῦ Α διὰ τοῦ Π πρῶτον πολλαπλασιασθέντος, τὸ παραγόμενον ἔπειτα διὰ τοῦ Δ διαιρεθείη, εἴτε καὶ διὰ τοῦ Δ πρῶτον διαιρεθέντος τοῦ Α, ἔπειτα τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ διὰ τοῦ Π τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπιδέξοιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.

§. 62. Τοὐναντίον δὲ ὁ ἀριθμὸς Δ δὶς τοσάκις ἐμπεριείληπται τῷ δοθέντι Ν, ὁσάκις ὁ διπλοῦς 2Δ. Καὶ τρὶς δὲ τοσοῦτον, ἢ ὅσον ὁ 3Δ· καὶ οὕτως ἐν γένει. Οὐκοῦν τοῦ διαιρέτου Δ, δι᾽ οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντος ὁλοσχεροῦς, τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθήσεται. Καὶ τοῦ διαιρέτου Δ, δι᾽ ἀριθμοῦ τινος ὁλοσχεροῦς διαιρεθέντος, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκείνου τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 63. Ἀριθμὸν ἐκ μονάδων δεκαδικῶν τάξεως οἱασδηποτοῦν συγκείμενον, δι᾽ ἀριθμοῦ παραπλησίου πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 64. Α΄. Ἔςω ἀριθμὸς οὗτος ἔχων 35, 724, ὃν χρὴ πολλαπλασιάσαι δι' ὁλοχεροῦς, ἐν μοναδικῷ χαρακτῆρι δηλουμένου, οὗ αἱ μονάδες ἁπλαῖ, οἷον διὰ 3, ἢ 5. Ἐὰν οὖν τοσάκις ὁ πολλαπλασιαςέος γραφῇ, ὁσάκις ἔνεςιν ἡ μονὰς τῷ πολλαπλασιαςῇ, διὰ προσθέσεως εὑρεθείη ἂν τὸ γιγνόμενον, (§. 46.) ὧδε.

```
35, 724          35, 724
35, 724          35, 724
35, 724          35, 724
--------         35, 724
107, 172         35, 724
                 --------
                 178, 620
```

§. 65. Ἐὰν αἱ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ μονάδες μὴ ὦσιν ἁπλαῖ, τῆς δὲ κατὰ τὰς ἁπλᾶς τάξεως, ἤτοι ἀνώτεραι, ἢ κατώτεραι, τῶν αὐτῶν γινομένων, εἶτα τοῦ σημείου τῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων χώρας πρόσω ἢ ὀπίσω προαχθέντος, ἢ ἀπὸ τῆς τελευτῆς σημείων μηδενικῶν τινων προσεθέντων, τὸ παραγόμενον ἀποδοθήσεται· (§. 26.) οὕτως ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς 35, 724, ὃς διὰ 3 πολλαπλασιασθεὶς προῆκται εἰς τὸν 107, 172, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ διὰ 30, γίνεται 1071, 72. Ἐὰν δὲ διὰ 300, γίνεται 10717, 2. Ἐὰν δὲ διὰ 3000 γίνεται 107172. Καὶ ἐὰν διὰ 30000, γίνεται 1071720. Τοὐναντίον δὲ, ἐὰν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ διὰ 0, 3 γίνεται 10, 7172. Ἐὰν δὲ διὰ 0, 03 γίνεται 1, 07172. Ἐὰν δὲ διὰ 0, 003 γίνεται 0, 107172. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 66. Ἔνθεν τοι ῥᾷςα ἂν ὁ Πίναξ καταγραφείη, ὁ τὰ γινόμενα περιέχων, τὰ ὑπὸ ὁτινοσοῦν τῶν μοναδικῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, δι' ὁτινοσοῦν

τῶν

τῶν μοναδικῶν πολλαπλασιασθέντος προκύπτοντα. Ἔστι δὲ οὗτος·

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Τοῦτον, ὃς ἂν διὰ μνήμης, ἢ πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχοι, εὐπετέστερον τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκπερανεῖ κατὰ τάδε τὰ σχήματα.

$$\begin{array}{r} 35,724 \\ 3 \\ \hline 107,172 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,724 \\ 5 \\ \hline 178,620 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35,724 \\ 30 \\ \hline 1071,72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,724 \\ 0,3 \\ \hline 10,7172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35,724 \\ 300 \\ \hline 10717,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,724 \\ 0,03 \\ \hline 1,07172 \end{array}$$

§. 67. Β'. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 35,724 πολλαπλασιαστέος ᾖ δι' ἀριθμοῦ ἐκ χαρακτήρων πλειόνων συγκροτουμένου, οἷον διὰ 2753, πολλαπλασιασθέντος ἐκείνου πρῶτον, κατὰ τὰ εἰρημένα, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ τῶν ἁπλῶν μονάδων σημαντικοῦ, ἤτοι διὰ τοῦ 3· δεύτερον δὲ διὰ τοῦ δηλωτικοῦ τῶν δεκάδων, 5, καὶ

οὕτως

οὕτως ἐφεξῆς, τέως προσθέσει εὑρεθήσεται τὸ παραχθὲν, κατὰ τὸ ἑπόμενον Σχῆμα.

```
      35, 724
         2753
    ---------
     107, 172
    1786, 20
   25006, 8
   71448,
    ---------
   98348, 172
```

§. 68. Ἐὰν δὲ αἱ τῷ ἐσχάτῳ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ χαρακτῆρι δηλούμεναι μονάδες, μὴ τῶν ἁπλῶν οὖσαι τύχωσι, τοῦ γινομένου κατὰ τὰ εἰρημένα εὑρεθέντος, ὡς εἴγε καὶ ἁπλαῖ ἦσαν ἐκεῖναι, ἡ τῶν ἁπλῶν ἔπειτα μονάδων ὑποδιαστολὴ, πρόσω, ἢ ὀπίσω μετενεχθήσεται, ἧπερ ἂν ἀπαιτοῖεν αἱ τάξεις αἱ τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιάζοντος. Οὕτως ἐὰν ἐπὶ τοῦ πρὸ μικροῦ πολλαπλασιασθέντος, πολλαπλασιαστὴς ᾖ οὐχ ὁ 2753, ἀλλ᾽ ὁ 27530, παραγόμενον ἔσται οὐχὶ τὸ 98348, 172· ἀλλὰ τὸ 983481, 72. Ἐὰν δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖ 275300, τὸ γινόμενον ἔσται 9834817, 2. τοὐναντίον δὲ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὄντος 275, 3 παραγόμενον προκύψει τὸ 9834, 8172. Ἐὰν δὲ 27, 53 ἔσται 983, 48172. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐξ αὐτῆς δῆλον τῆς πράξεως, τὸν ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου καινὸν ἀριθμὸν οὕτως ἀπογεννᾶσθαι, ὡς ἀπὸ τῆς μονάδος γίνεται ὁ πολλαπλασιαστής· ὅθεν καὶ αὐτὸν ἐκεῖνον τυγχάνειν τὸν ζητούμενον. (§. 44.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 69. Ἕπεται οὖν ἐκ τῶν ἀνωτέρω (§.68.), ὡς ἐὰν τῷ ἑτέρῳ τῶν παραγόντων, ἢ ἑκατέρῳ μηδενι-

κὰ

κὰ σημεῖα προσῇ, ἀεὶ τοσαῦτα τῷ παραγομένῳ προσαπλέον, ὅσα ἐκείνοις ἀμφοῖν ἅμα προσαριθμεῖται. Καὶ ἐὰν ἐφ' ἑτέρῳ ἐκείνων, ἢ ἑκατέρῳ δεκαδικὰ κλάσματα προσῇ, τοσοῦτοι χαρακτῆρες ἐπὶ τοῦ παραγομένου ἔσονται τῶν τοιῶνδε κλασμάτων δηλωτικοὶ, ὁπόσοι ἐπ' ἀμφοῖν ἅμα ἐκείνοις εἰσίν. Τούτου δὲ παρατηρουμένου, οὐδὲν ἄρα δεήσει ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν τῇ τῶν μονάδων τάξει τὸν νοῦν προσέχειν, τῶν ἐν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ καὶ τῷ πολλαπλασιάζοντι, ἐνὸν οὕτω τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκπερᾶναι, ὡς εἰ καὶ ἐν ἁπλαῖς μονάσι τῶν ἀριθμῶν οἱ ἐλάχιστοι τερματίζοιντο. Τῶν γὰρ τοῦ παραγομένου χαρακτήρων εὑρεθέντων, αἱ τῶν ἁπλῶν μονάδων ὑποδεέστεραι τάξεις, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηδενικῶν σημείων, ἢ τῶν ὑπὸ τὰς μονάδας διαστελλομένων κλασμάτων, τῶν ἐπ' ἀμφοῖν τοῖς παράγουσι, ῥᾷστα διακριθήσονται· ὡς ἐπὶ τῶν ἑξῆς.

571000	5, 71
2300	2, 3
1713	1713
1142	1142
1313300000	13, 133

2, 475	0, 0457
9, 64	2, 31
9900	00457
14850	01371
22275	00914
23,85900	0,105567

3, 244

3, 244	0, 00792
6400	0, 043
12976	002376
19464	003168
20761,600	0,00034056

Τοῦ δὲ τῶν ἁπλῶν μονάδων τόπου διορισθέντος, τὰ περιττὰ τῶν μηδενικῶν σημείων ἐξαλειφθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 70. Ἐὰν ὁ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πίναξ (§. 66.) κατὰ τοὺς ἐν αὐτῷ πρὸς κάθετον χωροῦντας στίχους διατμηθῇ εἰς ῥαβδία, τούτων ἕκαστον, ἅπαντα τοῦ ἀνωτάτω ἀποκειμένου ἀριθμοῦ τὰ πολλαπλᾶ περιέξει ἄχρι τοῦ ἐννεαπλοῦ. Οὐκοῦν τῶν ῥαβδίων συναπτομένων, ῥᾶστα δὴ πίναξ διαγραφήσεται τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δι᾽ ὁποσωνοῦν χαρακτήρων ἐκκειμένου, τῶν πολλαπλῶν ἁπάντων περιεκτικός, τῶν μὴ τοῦ ἐννεαπλοῦ δηλονότι γινομένων ἐπέκεινα. Ὥστε τὸ παραγόμενον ἀριθμοῦ παντὸς ὁποσουοῦν μεγέθει, δι᾽ ἑτινοσοῦν ἀριθμοῦ μοναδικῷ χαρακτῆρι ἐκδηλουμένου, ἐκ τοῦ ὧδε συγκροτουμένου πινακίσκου προϊέναι ἔχειν μηδενὶ σὺν ἔργῳ. Δεῖ μέντοι τῶν τοιούτων ῥαβδίων ἐξ ἑκάστου πλείονα φέρειν ἐν χερσὶ παραπλήσια.

§. 71. Προκείσθω τοίνυν πολλαπλασιαστέος ἀριθμὸς ὁ 47624, καὶ τῶν ῥαβδίων κατὰ τὸ δέον συγκαταταχθέντων, ὁ πινακίσκος προκύψει τοιόσδε.

Ἐκ