εἰς ταυτὸν ἥκει, Ν καὶ Β. Ἐν γὰρ δὴ τούτοις οὕτω διὰ τοῦ ἡμιτόνου τὸ ζητηθὲν ἀποδίδοται, ὥστε ἄδηλον ἔτι μένειν, πότερον ἄρα ἡ Ν, ἢ Μ γωνία ὀξεῖα, ἢ μή; πότερον δὲ ἡ πλευρὰ Β, ἢ Κ τεταρτημορίου μείζων, ἢ ἐλάσσων ἐστίν; ὡς ἐκ τῆς τῶν Ἀναλογιῶν ἐστὶ σαφὲς διασκέψεως, δι᾽ ὧν τὰ τοιάδε τρίγωνα ἀναλύεται (§. 903.). Καίτοι γὰρ κατὰ τὴν ἐν ταῖς Ἀναλογίαις ἐκείναις Β΄. παρὰ τὴν διὰ Μ καὶ Κ παρειλημμένην Υ, ἔτι καὶ ἡ Κ, καὶ ἡ Μ παραστῆναι δύναται, οὐμὴν ἀλλ᾽ εἰ κατ᾽ ἐκείνην ἡ Κ ζητοῖτο, ἐν τοῖς δοθεῖσιν ἂν εἴη ἡ Μ· καὶ ἀνάπαλιν τῆς Μ ζητουμένης, δοθήσεται ἡ Κ. Εἰσὶ γὰρ αὗται ἀείποτε, ἡ Μ λέγω καὶ ἡ Κ, τῆς αὐτῆς καταστάσεως· τουτέστιν ἤτοι ἄμφω 90° μείζονες, ἢ ἄμφω ἐλάσσονες, ἢ τέως 90° ἴσαι (§. 897.), ὡς μηδεμίαν δήπου ἐπὶ τούτων ἀμφιβολίαν τοῦ λοιποῦ περιεῖναι. Ἀλλὰ καὶ ἡ Η΄. τῶν Ἀναλογιῶν, ἐφ᾽ ἧς τὰ εἰρημένα κρατεῖ, οὐδὲν πλέον ἢ τοῖς ὀνόμασι, τῆς Β΄. διενήνοχεν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 907. Ὁ δὲ τῆς περιούσης ἀμφιβολίας λόγος, διδομένων τῶν Μ καὶ Κ, ἢ τῶν Ν καὶ Β, ἐν τούτῳ κεῖται, ὅτι ἐξ ἐκείνων δεδομένων, δύο ἀεὶ τρίγωνα κατασκευάζεσθαι ἔχουσιν. Ἐὰν γὰρ μεταξὺ τῶν ἡμικυκλίων ΜΟμ, ΜΝμ, τῶν κατὰ τὰ Μ καὶ μ σημεῖα ἀμοιβαδὸν τεμνομένων, τομεὺς τεθῇ ὁ ΝΓΟ, ἐπὶ τοῦ ΜΟμ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ἐφεστηκὼς, ἔσται ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΟ ἡ κατὰ τὸ Μ γωνία, ἴση τῇ κατὰ τὸ μ, τοῦ τριγώνου ΝΟμ, τοῦ ἐκείνῳ ὄντος ἐφεξῆς· καὶ ΝΟ, ἤτοι Κ ἐπ᾽ ἀμφοῖν κοινή. Ἔνθεντοι καὶ τῶνδε, (δηλ. τῶν Μ καὶ Κ) δεδομένων, οὐδεὶς τοῦ λοιποῦ λόγος δι᾽ ὃν ἄντις τὸ ζητηθὲν (Υ, ἢ Β, ἢ Ν) θατέρῳ μᾶλλον, ἢ θατέρῳ τῶν τριγώνων προσάψειε. Σχ. 183.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ.

§. 908. Τ᾽ ἄλλα δὲ ἐκ τῶν προτεθεισῶν Ἀναλογιῶν, τὴν, ὁτιοῦν ἂν εἴη τὸ προτεθὲν, προσφυῶς

 ἐπι-

ἐπιλυομένῳ, ῥᾴδιον ἐςὶ πρὸ τῶν ἄλλων αἱρεῖσθαι. Οἷον ἔςω διδόμενα Μ καὶ Β, ζητείσθω δὲ Ν, καὶ ἔςαι κατὰ τὴν Ι΄. τῶν Ἀναλογιῶν, ἐν ᾗ τὰ γράμματα ταῦτα ἀπαντᾷ,

$$\text{Ἀκ} : \text{Ἡμ.}\,\text{Μ} = \text{Συνημ.}\,\text{Β} : \text{Συνημ.}\,\text{Ν}.$$

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ Μ καὶ Ν δοθέντων, ζητείσθω Κ, ἅπερ ἐπὶ τῆς Δ΄. ἐμφέρεται Ἀναλογίας. Δῆλον δὲ, ὅτι ληπτέον ἐναλλὰξ,

$$\text{Ἡμ.}\,\text{Ν} : \text{Συνημ.}\,\text{Μ} = \text{Ἀκ} : \text{Συνημ.}\,\text{Κ}.$$

Καὶ ἕτω καὶ τοῖς λοιποῖς.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 184. 185. §. 909. Ἐὰν ἐπὶ τῦ σφαιρικῦ λοξογωνίυ τριγώνυ, ΜΠμ, ἀφ᾽ ὁποιασῦν τῶν γωνιῶν Π, ἐπὶ τῦ κατὰ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν Μμ ἐπιπέδυ, πρὸς ὀρθὰς καταχθῇ πλευρὰ ἡ ΠΟ, αὕτη δὴ ἐντὸς μὲν τῆς Π γωνίας πεσεῖται, τῶν Μ καὶ μ γωνιῶν ἀμφοτέρων ὀξυνομένων, ἢ ἀμβλυνομένων· ἐκτὸς δὲ, ἐὰν τύτων ἡ ἑτέρα μὲν ὀξεῖα ᾖ, ἡ ἑτέρα δὲ ἀμβλεῖα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ πλευρὰ ΠΟ, τὸ λοξογώνιον τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια διατειχίζει ΠΜΟ, καὶ ΠμΟ, ἐφ᾽ ὧν ἑκατέρυ ΠΟ ἐςὶν ἡ πλευρὰ Κ. Ἐὰν ὖν τῆς Κ ταύτης, ἤτοι τῆς ΠΟ, εἴσω τῆς γωνίας Π πιπτύσης, ἡ μὲν κατὰ τὸ Μ γωνία ὀξεῖα τεθῇ, ἡ δὲ κατὰ τὸ μ ἀμβλεῖα, ἔςαι δὴ ἡ Κ τεταρτημορίυ μὲν ἐλάσσων διὰ τὸ πρῶτον, τεταρτημορίυ δὲ μείζων διὰ τὸ δεύτερον (§. 897.)· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν δὲ ἡ Κ, ἐκτὸς ᾖ πίπτυσα τῆς γωνίας Π, τεθῶσι δὲ, ἥτε Μ, καὶ ἡ μ, τυτέςιν αἱ ὑπὸ ΠΜμ καὶ ΠμΜ ἄμφω ὀξεῖαι, ἔςαι ἡ ὑπὸ ΠμΟ ἀμβλεῖα. Καὶ αὖθις ἡ Κ πλευρὰ, ἅμα ἡ αὐτὴ καὶ μείζων τεταρτημορίυ, καὶ ἐλάσσων. Τὰ δ᾽ αὐτὰ συναχθήσεται, καὶ

τῶν

τῶν Μ, καὶ ΠμΜ γωνιῶν ἀμφοτέρων ἀμβλιώεσθαι ὑποτιθεμένων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 910. Ἐπεὶ τοίνυν τὰ σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΠΟΜ, ΠΟμ, εἰς συντελεῖται τὸ πλαγιογώνιον ΠΜμ, συνάπτειν μὲν δέον, τῆς ΠΟ ἐντὸς τῆς κατὰ Π γωνίας πιπτέσης, ἀφαιρεῖν δ᾽ ἀπ᾽ ἀλλήλων, πιπτέσης ἐκτός· ἐκ τῶν δεδομένων γωνιῶν Μ καὶ μ, συμβαλεῖν ἔξεσαι, πότερον τέτων ἐπὶ παντὸς τῦ προκειμένε χώραν κεκλήρωται. Σημαινέσθωσαν ἓν ἐπὶ τῦ ὀρθογωνίε τριγώνε ΠΟΜ, αἵτε πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι ὡς πρότερον διὰ τῶν γραμμάτων Υ, Β, Κ, Μ, Ν, ἐπὶ δὲ θατέρε ΠΟμ, ἡ κάθετος ΠΟ ἧς μετὰ τῦ προτέρε ἔλαχε κοινῆς, ὡσαύτως δηλέσθω διὰ τῦ Κ, αἱ δὲ λοιπαὶ πλευραίτε καὶ γωνίαι, αἱ ὁμοίως κείμεναι, διὰ τῶν υ, β, μ, ν ὀνομαζέσθωσαν. Καὶ ἔσαι δὴ κατὰ μὲν τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, καθ᾽ ἣν αἱ Μ καὶ μ γωνίαι ἐπίσης ἤτοι ὀξυνόνται, ἢ ἀμβλυνόνται, ἡ μὲν γωνία Π = Ν + ν, ἡ δὲ πλευρὰ Μμ = Β + β. Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, καθ᾽ ἣν ἡ μὲν τῶν γωνιῶν, ἤτοι Μ, ἢ μ ὀξεῖα ἐσὶν, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἔσαι μὲν Π = Ν − ν, ἔσαι δὲ Μμ = Β − β. Καὶ ἐὰν ἄρα ἡ κατὰ τὸ Π γωνία, ἐν ἀμφιβόλῳ τῷ σημείῳ δηλωθῇ ὧδε Ν ∓ ν, καὶ ἡ Μμ πλευρὰ ὧδε, Β ∓ β, πότε δὴ τῷ σημείῳ + χρηςέον, καὶ πότε τῷ − ἐκ τῆς τοιᾶσδε τῶν γωνιῶν Μ καὶ μ καταςάσεως, ῥᾷςα καταφαίνεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 911. Τὲς Κανόνας ἀποδἕναι, δι᾽ ὧν ἐπὶ τῦ σφαιρικῦ λοξογωνίε τριγώνε, τριῶντινων διδομένων, εἴτε πλευραὶ αὗται ὦσιν, εἴτε γωνίαι, εἴτ᾽ ἓν ἀναμὶξ πλευραίτε καὶ γωνίαι, τὰ λοιπὰ ἔχοιεν ἐξευρίσκεσθαι.

ΛΥΣΙΣ.

Τῆς πλευρᾶς ΠΟ, ἀπὸ μιᾶς τινος τῶν τοῦ τριγώνου γωνιῶν, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν (εἰ δέοι προεκβληθεῖσαν) πρὸς ὀρθὰς κατηγμένης, ἑκατέρῳ τῶν ἐντεῦθεν ἀναφυομένων ὀρθογωνίων τριγώνων ἐφαρμοζέσθωσαν αἱ εὑρεθεῖσαι (§. 903.) Ἀναλογίαι.

Ἔςαι δὲ ἐκ μὲν τῆς Β΄. τῶν Ἀναλογιῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ.

καὶ Ἀκ : Ἡμ. υ = Ἡμ. μ : Ἡμ. Κ.

Α΄. Ἄρα Ἡμ. Υ : Ἡμ. υ = Ἡμ. μ : Ἡμ. Μ.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τῆς Γ΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Ἡμ. Β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Μ.

Καὶ Ἀκ ; Ἡμ. β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. μ.

Β΄. Ἄρα Ἡμ. Β : Ἡμ. β = Συνεφ. Μ : Συνεφ. μ.

Εἶτα ἐκ τῆς Δ΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Ἡμ. Ν = Συνημ. Κ : Συνημ. Μ.

Καὶ Ἀκ : Ἡμ. ν = Συνημ. Κ : Συνημ. μ.

Γ΄. Ἄρα Ἡμ. Ν : Ἡμ. ν = Συνημ. Μ : Συνημ. μ.

Κἀντεῦθεν δέ,

(Ἡμ. Ν + Ἡμ. ν) : (Ἡμ. Ν − Ἡμ. ν) = (Συνημ. Μ + Συνημ. μ) : (Συνημ. Μ − Συνημ. μ)

Ἀλλαμὴν (§. 853.) (Συνημ. Ν + Συνημ. ν) : (Συνημ. Ν − Συνημ. ν) = Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$Ν + $\tfrac{1}{2}$ν) : Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$Ν − $\tfrac{1}{2}$ν).

Καὶ (§. 854.) (Συνημ. Μ + Συνημ. μ) : (Συνημ. Μ − Συνημ. μ) = Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$πΜ + $\tfrac{1}{2}$πμ) : Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$πΜ − $\tfrac{1}{2}$πμ)

Δ΄. Ἄρα Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$Ν + $\tfrac{1}{2}$ν) : Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$Ν − $\tfrac{1}{2}$ν) = Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$πΜ + $\tfrac{1}{2}$πμ) : Ἐφ. ($\tfrac{1}{2}$πΜ − $\tfrac{1}{2}$πμ).

Παρὰ ταῦτα ἐκ τῆς Ε΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Συνημ. Κ = Συνημ. Β : Συνημ. Υ.

Καὶ

$$\text{Καὶ Ἀκ} : \text{Συνημ.}\,K = \text{Συνημ.}\,\beta : \text{Συνημ.}\,\upsilon.$$

Ε΄. Ἄρα $\text{Συνημ.}\,B : \text{Συνημ.}\,\beta = \text{Συνημ.}\,\Upsilon : \text{Συνημ.}\,\upsilon.$

Ἐὰν ἐπὶ τῆσδε τῆς Ἀναλογίας τὰ συνημίτονα σημείοις διαγνωρισθῇ, οἷς τὰ τεταρτημορίου ἐλάσσονα τόξα, τῶν τεταρτημορίου μειζόνων ἀντιδιαστέλλεται (§. 852.), εὔδηλον ὅτι ἑκατέρου τῶν τόξων Β, β, τεταρτημορίου ἐλαττουμένων, ἢ πλεοναζόντων, καὶ τὰ τόξα ἑκάτερα Υ καὶ υ, ἤτοι ἐλάσσονα τεταρτημορίου ἔσται, ἢ μείζονα· τοὐναντίον δὲ ἐὰν τῶν Β καὶ β τόξων, τὸ μὲν μεῖζον, τεταρτημορίου μεῖζον ᾖ, τὸ δ᾽ ἔλαττον, ἔλαττον· καὶ τῶν τόξων Υ καὶ υ, τὸ μὲν τεταρτημορίου μεῖζον ἔσται, τὸ δ᾽ ἔλαττον. Οὐδὲ γὰρ ἐνδέχεται τὰ σημεῖα τῶν ὅρων Συνημ. Υ, Συνημ. υ, ἀντικείμενα εἶναι ἀλλήλοις, ἐὰν τὰ τῶν Συνημ. Β, καὶ Συνημ. β, ταυτὰ ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν. Ἐπεὶ τοιγαροῦν ἐκ τῆς αὐτῆς Ἀναλογίας ἕπεται.

$$(\text{Συνημ.}\,\beta + \text{Συνημ.}\,B) : (\text{Συνημ.}\,\beta - \text{Συνημ.}\,B) = (\text{Συνημ.}\,\upsilon + \text{Συνημ.}\,\Upsilon) : (\text{Συνημ.}\,\upsilon - \text{Συνημ.}\,\Upsilon).$$

Ἔστι δὲ (§. 854.) ἐν ὑποθέσει τοῦ ἑκάτερον τῶν τόξων Β, β τεταρτημορίου ἤτοι ἔλαττον εἶναι, ἢ μεῖζον,

$$(\text{Συνημ.}\,\beta + \text{Συνημ.}\,B) : (\text{Συνημ.}\,\beta - \text{Συνημ.}\,B) = \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta) : \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta).$$

$$\text{Καὶ } (\text{Συνημ.}\,\upsilon + \text{Συνημ.}\,\Upsilon) : (\text{Συνημ.}\,\upsilon - \text{Συνημ.}\,\Upsilon) = \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon + \tfrac{1}{2}\upsilon) : \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon - \tfrac{1}{2}\upsilon).$$

Ἄρα ἐν τῇδε τῇ ὑποθέσει,

$$\text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta) : \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta) = \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon + \tfrac{1}{2}\upsilon) : \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon - \tfrac{1}{2}\upsilon).$$

Κατὰ δὲ τὴν ὑπόθεσιν καθ᾽ ἣν θάτερον μὲν τῶν τόξων Β ἢ β τεταρτημορίου μεῖζον, θάτερον δ᾽ ἔλαττον, ἐπεὶ (§. 854.).

(Συνημ. β + Συνημ. Β) : (Συνημ. β − Συνημ. Β) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$β) : Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$β),

Καὶ (Συνημ. υ + Συνημ. Υ) : (Συνημ. υ − Συνημ. Υ) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Υ − $\frac{1}{2}$υ) : Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Υ + $\frac{1}{2}$υ).

Ἔσαι κατὰ τὴνδε τὴν ὑπόθεσιν,

Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$β) : Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$β) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Υ − $\frac{1}{2}$υ) : Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Υ + $\frac{1}{2}$υ).

Ἥτις Ἀναλογία ἐδὲν πλέον ἢ τῇ τάξει τῶν ὅρων διαφέρουσα τῆς ἀνωτέρω, ἔσαι καθόλου. Γράφοιτο δ' ἂν ἡ αὐτὴ καὶ οὕτω.

(Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$β) : Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Υ + $\frac{1}{2}$υ) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$β) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Υ − $\frac{1}{2}$υ).

Ὅθεν ἐὰν ἀντὶ τῶν συνεφαπτομένων ληφθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, ἀνακύψει,

Ϛ'. Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$β) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Υ + $\frac{1}{2}$υ) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Υ − $\frac{1}{2}$υ) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$β).

Τελευταῖον δὲ ἐκ τῆς Ζ'. τῶν Ἀναλογιῶν,

Ἀκ : Συνημ. Ν = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Υ.

Καὶ Ἀκ : Συνημ. ν = Συνεφ. Κ : Συνεφ. υ.

Ζ'. Ἄρα Συνημ. Ν : Συνημ. ν = Συνεφ. Υ : Συνεφ. υ.

Τὰς δὲ δὴ ἑπτὰ ταυτασὶ Ἀναλογίας τῷ σκοπουμένῳ, τὸ ἀποχρῶν χορηγεῖν, αὐτίκα ἔσαι καὶ δῆλον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 912. Δοθέντων, ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ λοξογωνίου τριγώνου, ἐκ παντὸς τοῦ τῶν πλευρῶν τε καὶ γωνιῶν ἀριθμοῦ, τριῶν τινων ὁποιωνοῦν, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν τὸ ζητούμενον, εἴτε πλευρὰ τοῦτο, ἢ γωνία, ῥηθῇ Ζ· τὸ δὲ τοῦ ζητουμένου ἀπεναντίον Ε· τὰ δ' ἑκατέρωθεν τῷ ζητουμένῳ προσκείμενα Ξ, ξ· τὰ δ' ἑκατέρωθεν τῷ ἀπεναντίον Κ, κ· ἐπὶ θάτερα μὲν τῶν ἐλασσόνων ταττομένων γραμμάτων, τῶν δὲ μειζόνων ἐπὶ θάτερα· ὡς ἔνθεν μὲν προσεχῆ ἀλλήλοις κεῖσθαι τὰ Κ, Ξ, ἔνθεν δὲ τὰ κ, ξ· πέντε ἀνακύψει γράμματα Ξ, ξ, Κ, κ, Ε, ὧν τὰ τρία ἐφ' οἱασοῦν ὑποθέσεως τὰ διδόμενα διασημανεῖ, τοῦ ζητουμένου πανταχοῦ διὰ τοῦ Ζ δηλουμένου. Ἐκ δὲ δὴ τῶν πέντε τουτωνὶ γραμμάτων, σώτρια συζευχθῆναι δύναται κατὰ τρόπους δέκα τοὺς ἐφεξῆς.

1) ΞξΚ, 2) Ξξκ, 3) ΞξΕ, 4) ΞΚκ, 5) ΞΚΕ, 6) ΞκΕ, 7) ξΚκ, 8) ξΚΕ, 9) ξκΕ, 10) ΚκΕ.

Ἀλλὰ γὰρ τὰ Ξ, ξ συνάμα τοῖς Κ, κ ἀντικαθιστάμενα, τρόπους τῷ ὄντι διαφέροντας οὐ χορηγεῖ· οὐδὲν γὰρ διοίσει ἐφ' ἃ μέρη πρῶτον ταῦτα γραφήσεται, εἰ μόνον τὸ λοιπὸν τῆς τάξεως διασώζοιτο. Τοιγαροῦν ἡ μὲν πρώτη τῶν συζυγιῶν συμπίπτει τῇ δευτέρᾳ· ἡ δὲ τετάρτη τῇ ἑβδόμῃ· ἡ δὲ πέμπτη τῇ ἐννάτῃ· ἡ δὲ ἕκτη τῇ ὀγδόῃ. Καὶ ὑπολειφθήσονται μόναι ἕξ, αἱ τὰς διαφερούσας κυρίως ὑποθέσεις διασημαίνουσαι, αἵδε

Α'. ΞξΚ, ἢ ξΞκ.	Β'. ΞξΕ, ἢ ξΞΕ.
Γ'. ΞΚκ, ἢ ξκΚ.	Δ'. ΞΚΕ, ἢ ξκΕ.
Ε'. ΞκΕ, ἢ ξΚΕ.	ϛ'. ΚκΕ, ἢ κΚΕ.

Αἳ δήπου, ἐπεὶ τὸ ζητούμενον ἤτοι πλευρά ἐστιν, ἢ γωνία, δυωκαίδεκα τὰ πάντα προτιθέασιν, οὕτως ἐπιλυτέα ζητήματα.

Ἐὰν Α'. ζητουμένη μὲν ᾖ ἡ πλευρά, διδομένη δὲ ἡ Ε γωνία, ἡ τῇ πλευρᾷ ἐκείνῃ Ζ ἀπεναντίον, κείσθω ἐπὶ θατέρου τῶν 186, 187 Σχημάτων, Ζ μὲν εἶναι τὴν υ, Ε δὲ τὴν Μ. Ἐὰν δὲ ἡ Ε μὴ ᾖ διδομενη, κείϑω Ζ δὴ εἶναι τὴν Β ∓ β, ὥςε Ε γίνεϑαι τὴν Ν ∓ ν· ἑκατέρωσε γὰρ ἐὰν μεταξὺ τῶν διδομένων ἀπαντᾷ Κ, ἡ πλευρὰ ἡ κατὰ ϑάτερον μέρος τῇ γωνίᾳ Ε προσκειμένη, (εἴτε καὶ τῆς κ ὁμοίως διδομένης, εἴτε καὶ μὴ)· κείϑω τὴν Κ αὐτὴν εἶναι τὴν Υ.

Ἐὰν δὲ Β΄. ζητῆται ἡ γωνία, δεδομένη δὲ ἡ πλευρὰ Ε ἡ ἐκείνῃ ἀπεναντίον, κείϑω δὴ ζητουμένην μὲν εἶναι τὴν μ, εἶναι δὲ πλευρὰν Ε τὴν Υ. Ἐὰν δὲ ἡ Ε μὴ ᾖ διδομένη, κείϑω ζητουμένη ἡ γωνία Ν ∓ ν, ἧς ἀπεναντίον πλευρὰ Β ∓ β. Ἑκατέρωσε γὰρ ἐὰν μεταξὺ τῶν διδομένων ἀπαντᾷ γωνία Κ, ἡ κατὰ ϑάτερον μέρος τῇ πλευρᾷ Ε προσκειμένη, (εἴτε καὶ τῆς κ ὡσαύτως διδομένης, εἴτε καὶ μὴ)· κείϑω τὴν Κ ταύτην εἶναι τὴν Μ. Τῶν δὲ οὕτω γενομένων, εὐπετὲς, τὸ παρὰ ταῦτα μεταξὺ τῶν δοϑέντων ἀπάντων, διὰ τοῦ γράμματος αὐτοῦ, ἢ τῶν γραμμάτων καταλλήλως ἐπονομάζειν.

Τοιγαροῦν τὰ γράμματα δι' ὧν ἐκεῖνα διασημαίνεται, ἃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου διδόμενα ἐςὶ, ζητῶν εὑρήσεις μεταξὺ τῶν διδομένων τῶν ἐπὶ τοῦ ἐκτεϑέντος Πίνακος, * ἐν μὲν τῷ μέρει αὐτοῦ τῷ πρώτῳ τῆς πλευρᾶς ζητουμένης, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, τῆς γωνίας. Εὑρὼν δὲ, κατὰ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ Ἀναλογίας, τὰς ὁμοςοίχως τοῖς εἰρημένοις γράμμασιν ἐκκειμένας, τὸν ὑπολογισμὸν διαπερανεῖς, ἐξαμείβων τὰ πολλὰ τοὺς ἐν ταῖς Ἀναλογίαις λόγους, καὶ ἀντὶ τοῦ τῶν συνεφαπτομένων, τὸν τῶν ἐφαπτομένων λόγον ἀντιπεπονϑότως εἰσάγων, εἴ τι ποτὲ τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτοῦϑεν ἀναφαίνοιτο κοπενδάριον.

* Ὅρα τὸν Πίνακα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Φανερὸν γὰρ ἐκ τῶν κατὰ τὴν πρώτην ςήλην γραμμάτων, ἃ τὰς ὑποϑέσεις ἁπάσας παρίςησιν, ὅτι ἅπαντα τὰ κατὰ τὰς ἀνακυψάσας Συζυγίας ζητήματα, οὕτως ἔχουσιν ἐπιλύεσϑαι.

ΠΑΡΑ-

Πίν. Α΄.

ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ἡ ΠΛΕΥΡΑ.

Ὑποθ.	Διδόμενα.	Ζητέμ.	Ἀναλογία Προτέρα.	Ἀναλογία Δϐτέρα.
Ξ κ Ε ξ Κ Ε	μ, Υ, Μ.	υ	Ἡμ. μ : Ἡμ. Μ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. υ.	
Κ κ Ε κ Κ Ε	Υ, Β ∓ β, Μ.	υ	Συνημ. Μ : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Συνημ. Β : Συνημ. β = Συνημ. Υ : Συνημ. υ.
Ξ Κ Ε ξ κ Ε	Ν ∓ ν, Υ, Μ.	υ	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Συνημ. Ν : Συνημ. ν = Συνεφ. Υ : Συνεφ. υ.
Ξ ξ Ε ξ Ξ Ε	Ν ∓ ν, μ, Μ.	υ	Ἐφ. (½πΜ + ½πμ) : Ἐφ. (½πΜ − ½πμ) = Ἐφ. (½Ν + ½ν) : Ἐφ. (½Ν − ½ν).	Ἀκ : Συνεφ. μ = Συνεφ. ν : Συνημ. υ.
Ξ Κ κ ξ κ Κ	Μ, Υ, υ.	Β ∓ β	Συνημ. Μ. : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Συνημ. Υ : Συνημ. υ = Συνημ. Β : Συνημ. β.
Ξ ξ Κ ξ Ξ κ	Μ, μ, Υ.	Β ∓ β	Συνημ. Μ. : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Συνεφ. Μ : Συνεφ. μ = Ἡμ. Β : Ἡμ. β

Πίν. Β΄.

ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ἡ ΓΩΝΙΑ.

Ὑποθ.	Διδόμενα.	Ζητέμ.	Ἀναλογία Προτέρα.	Ἀναλογία Δϐτέρα.
Ξ κ Ε ξ Κ Ε	υ, Μ, Υ.	μ	Ἡμ. υ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. μ.	
Κ κ Ε κ Κ Ε	Μ, Ν ∓ ν, Υ.	μ	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Ἡμ. Ν : Ἡμ. ν = Συνημ. Μ : Συνημ. μ.
Ξ Κ Ε ξ κ Ε	Β ∓ β, Μ, Υ.	μ	Συνημ. Μ : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Ἡμ. Β : Ἡμ. β = Συνεφ. Μ : Συνεφ. μ.
Ξ ξ Ε ξ Ξ Ε	Β ∓ β, υ, Υ.	μ	Ἐφ. (½Β + ½β) : Ἐφ. (½Υ + ½υ) = Ἐφ. (½Υ − ½υ) : Ἐφ. (½Β − ½β)	Συνεφ. β : Συνεφ. υ = Ἀκ : Συνημ. μ.
Ξ ξ Κ ξ Ξ Κ	Υ, υ, Μ.	Ν ∓ ν	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Συνεφ. Υ : Συνεφ. υ = Συνημ. Ν : Συνημ. ν,
Ξ Κ κ ξ κ Κ	Υ, Μ, μ.	Ν ∓ ν	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Συνημ. Μ : Συνημ. μ = Ἡμ. Ν : Ἡμ. ν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α.

§. 913. Ζητεῖται δὴ ἡ πλευρά· δίδονται δὲ ξΚΕ. Ἐπειδὴ τοίνυν, ἐν τοῖς δοθεῖσι τούτοις ἐστὶ τὸ Ε, λεγέσθω μὲν ἡ ζητουμένη πλευρὰ υ, ἡ δ' ἀπεναντίον αὐτῆς γωνία Μ. Καὶ ὡς ὁμοίως ἔνεισι τοῖς δοθεῖσι Κ καὶ ξ, τιθέσθω τὸ Κ εἶναι Υ, καὶ ἔσται ξ = μ· τοιγαροῦν τῶν γραμμάτων μ, Υ, Μ ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ Πίνακος, πρώτων ἐν τοῖς διδομένοις ἀπαντώντων, ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν ἐγκειμένη στίχον Ἀναλογία, Ἡμ. μ : Ἡμ. Μ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. υ, τὸ κατὰ τὴν προκειμένην ὑπόθεσιν ζητούμενον ἐπιλύσεται. Εὑρεθήσεται δὲ, ἐκ τοῦ ἡμιτόνου υ, ἡ πλευρὰ υ ἡ ζητουμένη, εἰ μόνον φανερὸν, πότερον μείζων αὕτη τεταρτημορίου ἐστὶν, ἢ ἐλάσσων;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

§. 914. Ζητεῖται καὶ ἤδη ἡ πλευρὰ, δίδονται δὲ ΞΚΕ. Ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς διδομένοις ἐστὶ τὸ Ε, ζητούμενον μὲν ἔσται υ, τὸ δὲ Ε ῥηθήσεται Μ, καὶ τὸ Κ ῥηθήσεται Υ· ὅθεν δῆλον ὡς τὸ Ξ ἔσεται Ν ∓ ν. Ἀλλὰ γὰρ ταῦτα ἀπαντᾷ τὰ ὀνόματα Ν ∓ ν, Υ, Μ, εἰς διδόμενα ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ Πίνακος ἐν στίχῳ τρίτῳ. Ἄρα εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον υ, τῆς ἀντιστοίχου ἐκείνοις προσληφθείσης Ἀναλογίας,

Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.

Δύναται δ' ἡ Ἀναλογία καὶ εἰς τὴν ἑξῆς ἀμειφθῆναι·

Ἀκ : Ἐφ. Μ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.

ἥτις ἐπιτομωτερόντως ἀπαιτεῖ τὸν ὑπολογισμόν. Δι' ἑκατέρας μὲν οὖν ἡ γωνία Ν ὅλως προσδιορίζεται. Δίδοται δὲ καὶ ἡ Ν ∓ ν, διὸ δὴ τῶν γωνιῶν Ν καὶ Ν ∓ ν, τῆς ἐλάσσονος ἀπὸ τῆς μείζονος ἀφαιρεθείσης, ἀείποτε ὑπολειφθήσεται ἡ ν. Καὶ τῆς ν οὕτως εὑρεθείσης ἐφεξῆς ἐξιχνευθήσεται ἡ πλευρὰ υ, διὰ τῆς ἐν τῷ αὐτῷ στίχῳ δευτέρας Ἀναλογίας ταύτης·

Συνημ.

$$\Sigma \upsilon \nu \eta \mu . \mathrm{N} : \Sigma \upsilon \nu \eta \mu . \nu = \Sigma \upsilon \nu \epsilon \phi . \Upsilon : \Sigma \upsilon \nu \epsilon \phi . \upsilon .$$

ἢ ἀντικαθισαμένης τῆς δε·

$$\Sigma \upsilon \nu \eta \mu . \nu : \Sigma \upsilon \nu \eta \mu . \mathrm{N} = \text{'E}\phi . \Upsilon : \text{'E}\phi . \upsilon .$$

Δι' ἧς ὡσαύτως ἡ υ πληρέςατα διορίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

§. 915. Ζητεῖται ἡ γωνία, δοθεισῶν τῶν Ξ ξ Ε; ἡ δὲ, ἐςὶ μ· καὶ Ε διασημαίνει τὴν Υ· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα διδόμενα ἐςὶ Β ∓ β, υ· ἐ γὰρ ἐν τοῖς διδομένοις ἀπαντᾷ τὸ Κ· τὰ γὰρ Β ∓ β, υ, Υ, κεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει τοῦ Πίνακος, σίχῳ τετάρτῳ. Ἀντισοιχεῖ δ' αὐτοῖς Ἀναλογία ἥδε· Ἐφ. $(\frac{1}{2}\mathrm{B} + \frac{1}{2}\beta)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}\Upsilon + \frac{1}{2}\upsilon)$ = Ἐφ. $(\frac{1}{2}\Upsilon - \frac{1}{2}\upsilon)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{2}\beta)$. Καίπερ οὖν ἀγνοεῖται, πότερον ἡ πλευρὰ, ἡ παρὰ τὰς Υ καὶ υ δεδομένας, $\mathrm{B} + \beta$, ἢ $\mathrm{B} - \beta$ οὖσα ἐςί· δῆλον ἀλλ' οὖν ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἀναλογίας, ὡς ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ὅρων γινόμενον, διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς τριάσδε πλευρᾶς, ἀνακύψει μὲν Ἐφ. $(\frac{1}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{2}\beta)$, $\mathrm{B} + \beta$ οὔσης ἐκείνης, ἀνακύψει δὲ Ἐφ. $(\frac{1}{2}\mathrm{B} + \frac{1}{2}\beta)$, οὔσης $\mathrm{B} - \beta$. Καὶ ἐξέσαι ἄρα τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ κατὰ τὸ συνήθες διαπεραίνειν, μηθὲν ὅλως τῆς ἀπαντώσης ἀμφιβολίας ἐπισρεφομένυς. Ἀεὶ γὰρ καὶ $\frac{1}{2}\mathrm{B} + \frac{1}{2}\beta$ ληφθήσεται, καὶ $\frac{1}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{2}\beta$, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον ἐςὶ Β, ἡ δὲ διαφορὰ β. Δοθείσης δὲ τῆς β, ἡ γωνία μ εὑρεθήσεται, διὰ τῆς κατὰ τὴν προκειμένην ὑπόθεσιν δευτέρας Ἀναλογίας.

$$\Sigma \upsilon \nu \epsilon \phi . \beta : \Sigma \upsilon \nu \epsilon \phi . \upsilon = \text{'A}\kappa : \Sigma \upsilon \nu \eta \mu . \mu .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ.

§. 916. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ζητῆται διὰ τῶν τριῶν γωνιῶν δοθεισῶν, φανερὸν αὐτόθεν ὅτι δεδομέναι ἔσονται αἱ Ν ∓ ν, μ, Μ, ἐν αἷς ἐπειδήπερ ἐξ ἀνάγκης ἀριθμεῖται καὶ ἡ γωνία· ἡ ἀπεναντίον οὖσα ἴσα τῇ ζητουμένῃ πλευρᾷ, ἔσται υ ἡ ζητουμένη. Ἐκ γοῦν τοῦ εἴδους τῶν γωνιῶν Μ καὶ μ ἀναφαίνεται, ὅπως σημειωτέον ἂν εἴη τὴν τρίτην τῶν γωνιῶν, πότερον Ν + ν, ἢ Ν − ν. Ἐὰν γὰρ Μ καὶ μ ὡσαύτως ὀξεῖαι ὦσιν, ἢ ἀμβλεῖαι ὡσαύτως, ἔσται ἡ γωνία ἡ τρίτη Ν + ν· ἰὼ δὲ τούτων ἡ μὲν ὀξεῖα, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἡ τρίτη γωνία ἔσται Ν − ν (§. 910.)· ὁπότερον δ᾽ ἂν εἴη, διὰ τῆς ἀντιστοιχούσης τοῖς δὲ τοῖς γράμμασιν Ἀναλογίας, τῆς ἐν στίχῳ τετάρτῳ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ Πίνακος ἀντιπαρακειμένης, δοθήσεται μὲν ½Ν − ½ν πρὸς ½Ν + ½ν, δοθήσεται δὲ ½Ν + ½ν πρὸς ½Ν − ½ν. Εἰ μόνον ἡ Ἀναλογία, ὅπη παρείκοι, καταλλήλως ἀντιστρέφοιτο. Ἐπειδὴ δὲ τούτων ἡ διαφορὰ ἐστὶ ν, ἥτις ἐν τοῖς δεδομένοις ἀνάγεται, διὰ τῆς δευτέρας ὁμοστοίχου Ἀναλογίας

Ἀκ : Συνεφ. μ = Συνεφ. ν : Συνημ. υ.

εὑρεθήσεται ἡ υ, ἥτις ἐστὶν ἡ πλευρὰ ἡ ζητουμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε.

§. 917. Δίδοται μὲν ΞΚκ, ζητεῖται δὲ ἡ γωνία. Ἐπεὶ δ᾽ ἐν τοῖς διδομένοις οὐκ ἔστιν Ε, ἔσται ἡ γωνία ἡ ζητουμένη Ν ∓ ν. Καὶ Ξ μὲν ἔσται Υ, Κ δὲ ἑπομένως Μ, καὶ κ = μ. Ἐπέχει δὲ ἡ τοιάδε τῶν γραμμάτων τάξις Υ, Μ, μ, τὸν τοῦ δευτέρου Πίνακος τελευταῖον τόπον. Ἔσται δὲ ἄρα Συνεφ. Μ : Ἀκ, ἢ Ἀκ : Ἐφ. Μ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν. δι᾽ ἧς Ἀναλογίας εὑρεθήσεται ἡ γωνία Ν. Καὶ ληφθῆναι τοίνυν ἐκ τοῦ τῶν Λογαρίθμων Κανονίου δύναται ἡ γωνία Ν. Ἐντεῦθεν δ᾽ οὖν δοθήσεται καὶ τὸ Ἡμίτ. ν, διὰ τῆς ἑτέρας ὁμοστοίχου Ἀναλογίας·

Συνημ. Μ : Συνημ. μ = Ἡμ. Ν : Ἡμ. ν.

οὕτως ἀλλ᾽ οὖν ὥστε μὴ ἔχειν διακριθῆναι πότερον ἡ κατὰ τὸ ν γωνία ὀξεῖα ἐστὶν, ἢ ἀμβλεῖα; Ἐὰν οὖν ἡ πεἡ περὶ ταύτην ἀμφιβολία ἐκ ποδῶν ἔχῃ γενέσθαι, ἐκ τῶν ἤδη δεδομένων N καὶ ν, ἡ ζητουμένη N ∓ ν, ῥᾶστα συστήσεται. Ἐπειδὴ γὰρ M καὶ μ διδόμεναι εἰσὶ, δῆλον πότερον Z = N + ν, ἢ γοῦν Z = N − ν (§. 910.). Ἐν οἷς δ' ἂν ἄλλως τὰ κείμενα ἔχοι, ὡσαύτως δέον χωρεῖν, περιεσκεμμένως ἀεὶ τοῖς προεκτεθεῖσι Θεωρήμασι τὸν νοῦν προσέχοντας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 918. Οὐ γὰρ ἀεὶ τὰ διὰ τῶν ἐκτεθέντων κανόνων ζητούμενα, πάντῃ πάντως διωρισμένα προκύπτει, τὰ πολλὰ δ' ἐν ἀμφιβόλῳ μένει, πότερον ἡ μὲν πλευρὰ μείζων ἢ ἐλάσσων τεταρτημορίου, ἡ δὲ γωνία ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα καθέστηκε; τὸ δὲ οὐ κατ' ἔλλειψιν τῶν κανόνων συμβαίνει, ἀλλ' ὅτι διὰ τῶν αὐτῶν πολλάκις διδομένων, διοσσὰ τρίγωνα σφαιρικὰ πλαγιογώνια προσδιορίζεσθαι πέφυκεν· ἐν οἷς, τὰ ἐξηρτημένα τῶν δοθέντων. διαφορᾶς οὐ πάμπαν ἀπήλλακται, καθάπερ καὶ ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τῶν σφαιρικῶν (§. 907.) αὐτὸ τοῦτο κατείδομεν.

Σχ. 188. §. 919. Ἵνα δὲ ὁ λόγος τοῦ τοιούτου εὐδηλότερος εἴη, νόει δή μοι ἐπίπεδον ἡμικυκλίου τὸ ANB, ἐπὶ ἐπιπέδου ἡμικυκλίου τοῦ AΔB πλαγίως ἱστάμενον· τὸ δ' ἐπίπεδον τοῦ τομέως NΓO, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AΔB πρὸς ὀρθὰς ἐφεστὼς, καὶ τὸ ἡμικύκλιον ANB, εἰς ἀνίσους τομεῖς AΓN, NΓB, διατέμνον. Ποίει δὲ OΓΔ = OΓE· ἀπὸ δὲ εὐθειῶν τῶν ΓΔ, ΓE, τομέας θοῦ τοὺς ΔΓN, EΓN, ὧν τὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔσεσθαι ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι ἑκάτερος τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπό τε τῆς ὀρθῆς γωνίας O, καὶ τῶν πλευρῶν NΓO, καὶ OΓΔ, OΓE διορίζονται· οὐδὲν δὲ δυσχερὲς, καὶ τὰς πρὸς τῷ Δ καὶ E γωνίας ἀλλήλαις ἴσας ἐσομένας συνθεωρῆσαι NΔO = NEO, καὶ NΔA = NEB· τῷδε γὰρ τῷ τρόπῳ, συμφανὲς ὅτι δύο παραχθήσεται τρίγωνα σφαιρικὰ πλαγιογώγιογώνια ΝΔΑ, ΝΕΒ, ἐν οἷς ἴσαι μὲν ἀλλήλαις αἱ γωνίαι Α καὶ Β, ἴσαι δ' ἀλλήλαις καὶ αἱ ἀπ' ἐναντίον ταῖς γωνίαις ταύταις πλευραὶ ΝΔ, ΝΕ· καθάπερ οὖν καὶ αἱ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΝΔΑ, ΝΕΒ. Οὐμὴν ἀλλὰ τῶν πλευρῶν αἱ λοιπαὶ ΝΑ, ΝΒ, καὶ ΑΔ, ΒΕ, αἵτε ὑπὸ ΔΝΑ, καὶ ὑπὸ ΕΝΒ γωνίαι, μεγέθει ἀλλήλων εἰσὶ διαφέρουσαι. Ἀλλὰ καὶ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΝΕΑ, ΝΔΒ τῆς αὐτῆς καταστάσεως εἰσὶν, ἡμῖν δὲ τὰ πρῶτα ἐκεῖνα ἀποχρήσει.

§. 920. Ἐντεῦθεν οὖν Α΄. ἕπεται, ὅτι διὰ δυεῖν γωνιῶν δοθεισῶν, ἢ ὁπωσοῦν ληφθεισῶν τῶν Α, καὶ ΑΔΝ, καὶ δὴ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν εἰρημένων γωνιῶν προσκειμένης πλευρᾶς ΔΝ, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ἥκιστα διορίζεται. Ἐκ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐκείνων οὐχ ὅπως τὸ ΝΑΔ, ἀλλὰ δὴ καὶ τὸ ΝΕΒ, οὕτως ἔχει κατασκευασθῆναι, ὡς τὰ τρίγωνα διαφέρειν ἀλλήλων ἐν τοῖς λοιποῖς ἅπασιν.

§. 921. Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ Β΄. ἐπιφέρεται, ὡς οὐδὲ διὰ δυεῖν πλευρῶν δοθεισῶν ΝΑ καὶ ΝΔ, καὶ γωνίας τῆς μὴ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης, οἷον τῆς Α, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον διορίζεται. Ἐκ μὲν γὰρ τῶν αὐτῶν συνίσαται καὶ τὸ τρίγωνον ΝΑΕ, ὡς τῆς μὲν ΝΕ=ΝΔ, τῶν δὲ λοιπῶν, ἐν αὐτοῖς ΝΑ, καὶ Α, τῶν αὐτῶν διδομένων. Ἀλλὰ γὰρ, ἡ μὲν ΑΕ πλευρὰ, τὴν ΑΔ πλευρὰν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΝΕ γωνία, τὴν ὑπὸ ΑΝΔ γωνίαν ὑπερβάλλει. Ἡ δὲ ὑπὸ ΝΕΟ = ΝΔΟ, τῆς ὑπὸ ΝΔΑ ἐστὶν ἀναπλήρωμα.

§. 922. Ἐκ μὲν οὖν τοῦ Α΄. ἕπεται, ὡς ὁσάκις ἐκ δυεῖν δοθεισῶν γωνιῶν, καὶ πλευρᾶς τῆς τούτων μεταξὺ μὴ ἀπολαμβανομένης, τὰ λοιπὰ ζητεῖται· ἤτοι ὁσάκις διδόμενα ἐστὶ Μ, καὶ μ, καὶ Υ ἐν ἀμφιβόλοις ἀεὶ τὸ πρᾶγμα κείσεται. Ἡ δὲ ἀμφιβολία, κατάτε τὴν πρώτην καὶ τὴν ἕκτην τῶν, ἐν αἷς ἡ πλευρὰ ζητεῖται ὑποθέσεων, καὶ κατὰ τὴν

ἕκτην

ἕκτῃ τῶν ἐν αἷς ἡ γωνία, ἐκ τούτου ἥρτηται, ὅτι τὸ εὑρεθὲν ἡμίτονον οὐδὲν ἧττον τῇ τεταρτημορίου ἐλάσσονι πλευρᾷ, ἢ τῇ μείζονι προσῆκον ἐστίν. Ἐκ γὰρ τῶν δεδομένων ἐνταῦθα Μ καὶ μ γίνεται φανερόν, πότερον τῶν εὑρεθέντων Β καὶ β, ἢ Ν καὶ ν, τὸ κεφάλαιον ληπτέον, ἢ τὴν διαφοράν.

§. 923. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἕπεται ἐκ τοῦ Β΄. (§. 921.) ὡς ἔν τε τῇ πέμπτῃ τῶν ἐν αἷς ἡ πλευρὰ ζητεῖται ὑποθέσεων, κἂν τῇ πρώτῃ, καὶ τῇ πέμπτῃ τῶν ἐν αἷς ἡ γωνία, ἀμφιβόλως εὑρίσκεται τὰ ζητούμενα. Ἐνταῦθα γὰρ διδόμενά ἐστι τὰ Υ, υ, Μ, τουτέστιν αἱ δύο τῶν πλευρῶν, καὶ γωνία ἡ τούτων μεταξὺ μηδαμῶς ἀπολαμβανομένη· τὸ δ᾽ ἀμφίβολον κἀνταῦθα, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ τῶν ὑποθέσεων, ἐξ αὐτῶν αὖθις ἥρτηται τῶν ἡμιτόνων, ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς ἐκ τοῦ τῶν εὑρεθέντων Β, β, καὶ Ν, ν τῷ ἴσῳ λόγῳ τό, τε κεφάλαιον, καὶ τὴν διαφορὰν ἐξεῖναι παραλαμβάνεσθαι.

§. 924. Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἁπασῶν ὑποθέσεων, τὴν εὕρεσιν ἀμφιβολίας οἱασοῦν ἀπηλλάχθαι, ἐξ αὐτῶν εὔδηλον τῶν κανόνων, εἰ τὸ ζητούμενον οὐ διὰ τῶν ἡμιτόνων παριστῶντες, διὰ δὲ τῶν συνημιτόνων, καὶ τῶν ἐφαπτομένων, οὐδὲ τῆς προσθέσεως ὅλως, ἢ ἀφαιρέσεως τῶν εὑρεθέντων προσδέονται.

ΠΕΡΙ