ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΗ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 887.

Σχ. 177. Εάν τριών, ἢ πλειόνων γωνιῶν, ἐν διαφόροις ἐπιπέδοις κειμένων, συμπίπτωσιν αἱ κορυφαὶ, καὶ δύο τῶν πλευρῶν ἕκασαι, τὸ περιεχόμενον διάστημα Γωνία Στερεὰ καλεῖται, ἧς πλευραὶ μὲν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ αὐτὴν περιέχουσαι, γωνίαι δὲ αἱ τῶν ἐπιπέδων κλίσεις, ἐν οἷς γεγράφαται αἱ γωνίαι, πρὸς τὰ συνεχόμενα. Οἷον τῆς στερεᾶς γωνίας ΑΒΓΔ, πλευραὶ μὲν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΔΓΒ· τῶν δὲ γωνιῶν ἡ μὲν πρώτη Β, ἐστὶν ἡ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΒ ἐπὶ τὸ ΔΓΒ, κλίσις· ἡ δὲ δευτέρα Δ, ἡ τοῦ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΔΓΒ· ἡ δὲ τρίτη Α, ἡ τοῦ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΑΓΒ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 888. Ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τῆς στερεᾶς γωνίας, καὶ ὑπὲρ τὴν τριάδα πηλικοσοῦν γένοιτο ἄν. Αἱ δέ τοι πλευραὶ ὅπως δὴ καὶ περάτων τυγχάνουσιν ἔχουσαι· μᾶλλον, δὲ εἴπερ ὅλως περατέμεναι εἰσὶν, ὡς αἱ ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΒ, ΑΔ, ΒΔ, διαφέρει οὐδέν. Περατουμένων δὲ κύκλων τόξοις τῶν τῇ αὐτῇ μὲν ἡμιδιαμέτρῳ, κέντρῳ δὲ τῷ Γ καταγραφομένων, αὐτὰ τὰ τόξα τῶν πλευρῶν τὰ μέτρα ἐστὶ, τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας πίπτοντα, τῆς περὶ κέντρον τὸ Γ σχηματογραφουμένης σφαίρας, καὶ τῶν περιφερειῶν μέρη τῶν κατ' αὐτὴν τριῶν μεγίστων κύκλων γινόμενα. Ἐπεὶ δὲ ἐν γένει γωνία πᾶσα, οἷον

οἷον ἡ Β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δυεῖν εὐθειῶν περιεχομένῃ, ὧν ἡ μὲν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΒ, ἡ δὲ ἐν τῷ ΒΓΔ, ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐφεστήκασι κάθετοι (§. 512.), δυνατὸν αὐτὸ τὸ Β, τὸ σημεῖον εἶναι, καὶ τότε δὴ ἡ μὲν εὐθεῖα, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τομέως ΑΓΒ, ἐπὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΒ κάθετος, τοῦ ΑΒ τόξου πρὸς τῷ Β ἐφάψεται. Ἡ δὲ εὐθεῖα, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΓΒ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΓΒ κάθετος, ἐφάψεται τοῦ τόξου ΔΒ, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ τῷ Β (§. 372.). Τοιγαροῦν καθόλου, ἡ τῆς στερεᾶς γωνίας γωνία, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ τῶν οὕτως ἐφαπτομένων συνισταμένῃ, ἴση ἐστίν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 889. Τρίγωνον Σφαιρικὸν ΑΒΔ, ἐστὶ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ τρισὶ τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας μεγίστων κύκλων ἐκπερατούμενον τόξοις ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ. Πλευραὶ δὲ ταύτης, αὐτὰ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ. Γωνίαι δὲ, αἱ πρὸς αὐτοῖς τοῖς σημείοις Α, Β, Δ, ὑπὸ τῶν εὐθειῶν περιεχόμεναι τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 890. Ἐὰν ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α, Β, Δ, τῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου γωνιῶν, ἐπὶ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον Γ εὐθεῖαι καταχθῶσιν ΑΓ, ΒΓ, ΔΓ, γωνία στερεὰ προκύψει ΑΒΓΔ τρίπλευρος, ἧς αἱ μὲν γωνίαι αἱ αὐταὶ εἰσὶ ταῖς τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου γωνίαις Α, Β, Γ, αἱ δὲ πλευραὶ, αἱ γωνίαι εἰσὶ τῶν τομέων ΑΓΒ, ΒΓΔ, ΔΓΑ, αἱ ὑπὸ τῶν τόξων ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ καταμετρούμεναι· ταὐτητοι ἐὰν αἵ τε πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, διά τε τῶν μοιρῶν, καὶ τῶν ἐν αὐταῖς λεπτῶν ἐκφέρωνται, οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ κἀπὶ τὰς πλευρὰς, καὶ τὰς γωνίας τοῦ στερεοῦ, ἐπίσης ἀνάγεσθαι ἕξουσιν· οὐδὲ τις ἔσται, τῶν δὲ μόνων τῶν μέτρων θεωρουμένων, μεταξὺ τȣ̃ ςερεȣ̃ τριπλεύρȣ τριγώνȣ, καὶ τȣ̃ τριγώνȣ τȣ̃ σφαιρικȣ̃, ὅλως διαφορά. Εὐληπτοτέρα δὲ χεδὸν ἡ τῆς τȣ̃ ςερεȣ̃ τριπλεύρȣ γωνίας διάσκεψις, ἢ ἡ τȣ̃ τριγώνȣ τȣ̃ σφαιρικȣ̃· ȣ̃ δὴ χάριν τὰ περὶ τῶν σφαιρικῶν ῥηθησόμενα τριγώνων, ἐκ τῶν ςερεῶν τὰ πολλὰ γωνιῶν μεταλαμβάνειν ἔςαι εὐπετέςερον.

§. 891. Ἰδὼ δὲ κατὰ γένος, τῆςτε τȣ̃ ςερεȣ̃ τριπλεύρȣ γωνίας, καὶ τῆς τȣ̃ σφαιρικȣ̃ τριγώνȣ, κατασκευὴν, ȣ̃τως οἷόντε ἐννοεῖν. Τομεὺς κύκλȣ ὁποιοσȣ̃ν ὁ ΔΓΒ ἀντὶ βάσεως ὑποτίθεται. Ἀπὸ δὲ τȣ̃ κέντρȣ Γ, εὐθεῖατις ἡ ΓΑ, ἐν μετεώρῳ ὁπωσȣ̃ν ἄγεται, ȣ̃τω δηλαδὴ, ὡς ἐκτὸς τȣ̃ κατὰ τὸν τομέα ΔΓΒ ἐπιπέδȣ γίνεσθαι ἀγομένην· εἶτα κέντρῳ δὴ τῷ Γ, ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ ΑΓΔ, τόξον καταγράφεται τὸ ΑΔ, τὸν ΑΓΔ τομέα διαπερατȣ̃ν· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον κἀπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ ΑΓΒ, ὁ τομεὺς ΑΓΒ διαπερατȣ̃ται. Ὁ δέτοι τομεὺς ΒΓΔ ὁ ἀντὶ βάσεως λαμβανόμενος, ἤτοι μείζων ἂν εἴη ἡμικυκλίȣ, ἢ ἐλάσσων.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 892. Ἐπὶ παντὸς σφαιρικȣ̃ τριγώνȣ, ἐὰν ἡ πλευρὰ τῆς τȣ̃ κύκλȣ ἡμιπεριφερείας ἐλάσσων ἦ, καὶ ἡ ἀπεναντίον αὐτῇ γωνία δυεῖν ὀρθῶν ἐλάσσων ἔςαι. Μείζων δ' ἂν εἴη, ὑπὲρ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς πλευρᾶς μεγεθυνομένης.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 178. Ἔςω τȣ̃ περὶ τὸ Γ γεγραμμένȣ κύκλȣ ΑΒΔ, διάμετρος ἡ ΑΒ· κατηγμένης δὲ τῆς ΕΓ, τῆς ἐπὶ τȣ̃ κατὰ τὸν κύκλον ἐπιπέδȣ, ἤτοι πρὸς κάθετον ἱςαμένης, ἢ πλαγίως, κείσθω διὰ ΑΒ, καὶ ΕΓ ἡμικύκλιον, ἐν τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ τὸ ΑΕΒ. Καὶ τοίνυν ἀντὶ βάσεως ληφθέντος τȣ̃ τομέως ΑΓΔ, ἐλάσ-

ἐλάσσονος ἢ κατὰ τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ, καὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΕΔ πληρωθέντος, δῆλον ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία, ἡ ἀπεναντίον τῇ πλευρᾷ ΑΔ, δυεῖν ὀρθῶν ἐλάσσων ἔσαι· ὅτι ΑΕΔ + ΔΕΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ᾽ ἐὰν τομεὺς ἡμικυκλίου μείζων ληφθῇ ἀντὶ βάσεως, ὁ ΑΒΔΓ, οὗ, τῶν λοιπῶν κατὰ χώραν μενόντων, ἀντὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ, πλευρὰ καθίσαται ἡ ΑΒΔ, τῆς ἡμιπεριφερείας μείζων, γωνία γίνεται ἀπεναντίον τῆς δε τῆς πλευρᾶς, ἡ ἐξωτέρα ΑΕΔ· τουτέσιν, ἡ τῆς προτέρας ΑΕΔ, τὸ εἰς τέτλαρας ὀρθὰς, οὖσα παραπλήρωμα, ἥτις δήπου καὶ ὀρθῶν δύο μείζων ἐσίν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 893. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ Σχήματος φανερὸν, ὅτι οἱασδήποτε πλευρᾶς τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου προαχθείσης· οἷον τῆς ΑΕ, κατὰ τὴν ΕΒ· τῷ τριγώνῳ ΑΔΕ, προσεχὲς ἕτερον ἐπαναφυήσεται τὸ ΕΒΔ, οὗ ἡ μὲν Β γωνία ἴση ἔσαι τῇ ἐν τῷ προτέρῳ Α, αἱ δὲ πρὸς τοῖς Ε καὶ Δ σημείοις γωνίαι, παραπληρώματα εἰσὶ τῶν ἐν ἐκείνῳ γωνιῶν (τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ) τῶν πρὸς τοῖς αὐτοῖς Ε καὶ Δ. Τοῖς δ᾽ αὐτοῖς τούτοις τριγώνοις, ἡ μὲν ΕΔ πλευρὰ κοινὴ ἐσί· τῶν δὲ λοιπῶν ἡ μὲν ΒΔ ἀναπλήρωμα τυγχάνει τῆς πλευρᾶς ΑΔ, ἡ δὲ ΕΒ τῆς ΕΑ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 894. Τὰ σφαιρικὰ τῶν τριγώνων, ὧν μία τις τῶν πλευρῶν, τῆς ἡμιπεριφερείας μείζων ἐσὶν, ἐν μέρει εἴωθεν ἀποτίθεσθαι· τοῦ γὰρ ΕΑΔΓ δοθέντος, τοῦ ἐκείνων τινὶ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀπεναντίον κειμένου, καὶ τὸ τοιοῦτῶδες ἀεὶ τρίγωνον δίδοται. Τῶν ἄρα ὑπὸ σκέψιν εἰωθότων γίνεσθαι σφαιρικῶν τριγώνων, οὐδέτις πλευρὰ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, οὐδέτις γωνία τὰς δύο ὀρθὰς ἐσὶν ὑπερβάλλουσα.

§. 895. Ἀλλ' ἡ γωνία Α ἢ Β, ἰῶ τὸ ΑΕΒ ἐπίπεδον, μετὰ τοῦ ἀντὶ βάσεως ληφθέντος ΑΒΔ ἐπιπέδου ἀπολαμβάνει, ἤτοι ὀρθὴ ἐστὶν, ἢ πλαγία· καὶ εἰ μὲν ὀρθὴ, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον Ὀρθογώνιον λέγεται, ἥτε πλευρὰ ΕΔ, ἡ ἀπεναντίον αὐτῆς, Ὑποτείνουσα· τῶν δὲ λοιπῶν πλευρῶν, ἡ μὲν Βάσις, ἡ δὲ Κάθετος καλεῖται. Εἰ δ' οὖν ἅπασαι πλάγιαι ὦσιν αἱ γωνίαι, τὸ τρίγωνον ἀκούει Πλαγιογώνιον, ἢ Λοξογώνιον.

§. 896. Ἐνταῦθα συντομίας χάριν, ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ μὲν Βάσις δηλωθήσεται διὰ Β, ἢ β· ἡ δὲ Κάθετος Κ, ἢ κ· ἡ δ' ὑποτείνουσα Υ, ἢ υ. Καὶ τῶν γωνιῶν δὲ ἡ μὲν ὀρθὴ σημειωθήσεται Ο, ἢ ο· ἡ δὲ μεταξὺ τῆς τε βάσεως καὶ τῆς ὑποτεινούσης, ἡ ἀπεναντίον τῇ καθέτῳ, Μ, ἢ μ· ἰῶ δ' ἂν ἡ ὑποτείνουσα μετὰ τῆς καθέτου περιέχοι, Ν, ἢ ν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 179. §. 897. Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΝΟΜ, ἐὰν ἡ γωνία Μ, ὀρθῆς ᾖ ἐλάσσων, ἢ ἴση, ἢ μείζων, καὶ ἡ πλευρὰ Κ, ἡ ἀπεναντίον αὐτῆς, ἤτοι τεταρτημορίου ἐλάττων, ἢ τεταρτημορίῳ ἴση, ἢ τεταρτημορίου μείζων ἔσαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ ΓΜ, δι' ἧς τὸ τῆς ὑποτεινούσης ἐπίπεδον, τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον διατέμνει, ἀνήχθω ἐπίπεδον τὸ ΜΓΔ, ἐπὶ τοῦ τῆς βάσεως ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ἐφεξῶς. Ἐπειδὴ οὖν καὶ τὸ Κ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Β πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἔσαι καὶ ἡ ΔΓ, ἡ κοινὴ τῶν ἐπιπέδων τομὴ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Β κάθετος (§. 517.) καὶ ΔΘ, ἢ Δο τεταρτηταρτημόριον. Ἔνθεν τοι ἡ πλευρὰ ΝΟ ἤτοι τεταρτημορίου ἐλάσσων, ἢ τεταρτημορίῳ ἴση, ἢ τεταρτημορίου μείζων, ἤγε ἡ Υ πρὸς τάδε, ἢ τάδε τοῦ ΔΓΜ ἐπιπέδου πίπτουσα εἴη, ἢ αὐτῷ τούτῳ τῷ ἐπιπέδῳ συμπίπτουσα· τουτέστιν, ἤπερ ἡ Γωνία Μ, ἤτοι ἐλάσσων εἴη τῆς ὀρθῆς γωνίας ΔΜΟ, ἢ ταύτῃ ἴση, ἢ αὐτῆς μείζων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 898. Ληφθείσης δὲ τῆς Κ ἀντὶ βάσεως, γίνεται Β κάθετος. Ἄρα καὶ ἡ Ν γωνία, ὁμοειδὴς ἔσται τῇ πλευρᾷ τῇ ἀπεναντίον· τουτέστιν ὀξεῖα μὲν, τῆς Β τεταρτημορίου ἐλαττουμένης· ὀρθὴ δὲ, τεταρτημορικῆς οὔσης· ἀμβλεῖα δὲ, ὑπὲρ τὸ τεταρτημόριον τῆς Β μεγεθυνομένης. Εὔδηλον γὰρ, ὥσπερ ἐκ τῆς γωνίας τὸ τῆς πλευρᾶς εἶδος, οὕτως ἀνάπαλιν ἐκ τῆς πλευρᾶς τὸ εἶδος συνάγεσθαι τὸ τῆς γωνίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 899. Ἐπὶ παντὸς τριγώνου σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου, ἐὰν τῶν πλευρῶν ἑκατέρα Β καὶ Κ τεταρτημορίου ἐλάσσων ἢ μείζων ᾖ, ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημορίου ἐλάσσων ἔσται. Ἐὰν δὲ τῶν πλευρῶν ἡ μὲν ἑτέρα Β, ἢ Κ ἐλάσσων ᾖ τεταρτημορίου, ἡ ἑτέρα δὲ μείζων, ἡ ὑποτείνουσα ἔσται τεταρτημορίου μείζων. Ἐὰν δὲ τέως ἐκείνων ἡ ἑτέρα τεταρτημόριον ᾖ, καὶ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημόριον ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜο ἐν ᾧ λαμβάνεται ἡ βάσις, ἐφ' οὗ τε ΟΛο πρὸς ὀρθὰς ἐφίσταται, ἀχθήτω ΜΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου οΟ πλαγιάζουσα· ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ δὲ καὶ ἐπίπεδον τὸ ΔΛΕ πρὸς ὀρθὰς ἑσταθήτω, Σχ. 180.

τέμνον τὸ Ο Λο κατὰ τὴν ΑΓ. Ἔσονται οὖν ΑΓΟ, ΑΓο ὀρθαὶ (§. 517.)· καὶ τὰ ΑΟ, Λο τεταρτημόρια. Πᾶσα δὲ γωνία ἣν ἂν ἡ ΓΜ μετὰ τῆς εὐθείας τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΑΕ διὰ τοῦ Γ ἠγμένης, περιέχοι, ὀρθὴ ἔσαι (§. 506.). Ἄρα καὶ ΗΓΜ γωνία ἔσαι ὀρθὴ, καὶ ηΓΜ· καὶ ἡ μὲν ΝΓΜ ὀρθῆς ἐλάσσων, ἡ δὲ νΓΜ ὀρθῆς μείζων. Διὸ ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΝΟΜ, οὗ αἱ πλευραὶ Β καὶ Κ τεταρτημορίου ἐλάσσονες εἰσὶν, ἡ ὑποτείνουσα ΝΜ, τεταρτημορίου τοῦ ΗΜ ἐλάσσων ἔσαι, παραπλησίως, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΝοΜ, οὗ πλευραὶ Νο, οΜ, τουτέσι Κ, Β τεταρτημορίου μείζονες εἰσίν. Ἐπὶ δὲ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου νΟΜ, ἐν ᾧ νΟ, ἤτοι Κ μείζων ἢ κατὰ τεταρτημόριον ἐσὶν, ΜΟ δὲ, ἤτοι Β, ἐλάσσων, ἡ ὑποτείνουσα Μν, τοῦ τεταρτημορίου Μη μείζων ἐσὶν, ὡς καὶ τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ νΜο, ἐν ᾧ οΜ, ἤτοι Β, τεταρτημορίου μείζων ἐσί· νο δὲ, ἤτοι Κ, τεταρτημορίου ἐλάσσων· τελευταῖον ἐὰν Κ γένηται ἡ ΑΟ, ἡ μὲν τῆς ὑποτεινούσης γωνία ΑΓΜ, ὀρθὴ ἔσαι, αὐτὴ δὲ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημόριον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 900. Ἐντεῦθεν ἀμοιβαδὸν ἕπεται, ὡς ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὀξεῖα ᾖ, ἑκατέρα τῶν πλευρῶν Κ καὶ Β, ἤτοι μείζων ἔσαι ἐξ ἀνάγκης τεταρτημορίου, ἢ ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ ἡ ὑποτείνουσα ἀμβλεῖα ᾖ, ἐκείνων ἡ ἑτέρα τοῦ τεταρτημορίου μείζων ἔσαι, ἡ ἑτέρα δὲ ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημόριον ᾖ, ἤτοι Κ, ἢ Β τεταρτημορίῳ ἐξισωθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 901. Ἐντεῦθεν εἴδη δύο σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τεθεῖναι δύναται, τὸ μὲν, οὗ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημορίου ἐλαττοῦται, τὸ δὲ, οὗ πλεονάζει· τὸ γὰρ τρίτον εἶδος, ὃ τῶν εἰρημένων ἂν μεταξὺ ταχθείη,

θείη, ȣ̓ δηλονότι τεταρτημορίῳ ἡ ὑποτείνȣσα ἴση, ἐφ᾽ ἑκάτερον ἂν ἴσῳ δικαιώματι ἀναχθείη τῶν ἀνωτέρω δυεῖν, ἥπερ ἡ ὀρθὴ γωνία μεγίςη μὲν εἶναι ὀξειῶν ἁπασῶν ὑποτίθεται, ἁπασῶν δ᾽ ἀμβλειῶν ἐλαχίςη.

§. 902. Ἐὰν ȣ̓͂ν ἡ ὑποτείνȣσα τεταρτημορίȣ ἐλάσσων ᾖ, τὸ τρίγωνον, ἤτοι ΝΜΟ ἔςαι, ȣ̓ αἱ μὲν πλȣραὶ Κ καὶ Β τεταρτημορίȣ ἐλάσσονες, αἱ δὲ γωνίαι Μ, καὶ Ν ὀξεῖαι· ἡ ΝΜο, ᾧ τῷ πρὸ τȣ̃ προσεχὲς ἰῶ ἐφεξῆς. Ἐὰν δὲ ἡ ὑποτείνȣσα τεταρτημορίȣ μείζων ᾖ, τὸ τρίγωνον ἔςαι, ἤτοι ὡς τὸ νΜΟ, ἢ κατὰ τὸ νΜο. Τῷ γȣ̃ν προτέρῳ νΜΟ, ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τȣ̃ ἐπιπέδȣ οΛΟ, ἔςι τρίγωνον ἐφεξῆς, ȣ̓ ἡ ὑποτείνȣσα τῆς ὑποτεινȣ́σης Μν ἀναπλήρωμα ἐςὶ, καὶ τεταρτημορίȣ ἑπομένως ἐλάσσων· ἡ δὲ βάσις ἀναπλήρωμα τῆς βάσεως Μο, διὸ καὶ τεταρτημορίȣ ὡσαύτως ἐλάσσων. Οὔσης δὲ ἄρα καὶ τῆς ον τεταρτημορίȣ ἐλάσσονος, ἅπασαι αἱ ἐν ἐκείνῳ τῷ τριγώνῳ πλȣραὶ τεταρτημορίȣ ἐλάσσονες εἰσίν· αἵτε γωνίαι, παρὰ τὴν ἐν αὐτῷ ὀρθὴν, ὀξεῖαι. Τȣ̃ δ᾽ αὐτȣ̃ γένȣς, καὶ θατέρῳ τῷ νΜο προσεχὲς ἔςαι, τρίγωνον ἕτερον ὑπένερθε τῆς βάσεως ΜΓΟ· ȣ̓ δηλονότι ἡ μὲν ὑποτείνȣσα, ἀναπλήρωμα ἐςὶ τῆς ὑποτεινȣ́σης νΜ, ἡ δὲ κάθετος ἀναπλήρωμα τῆς καθέτȣ νΟ. Παντὶ ἄρα σφαιρικῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ȣ̓ αἱ πλȣραὶ Β, Κ ȣ̓κ εἰσὶ τεταρτημορίȣ ἐλάσσονες, ȣ̓δ᾽ αἱ γωνίαι Μ καὶ Ν ὀξεῖαι, προσεχές τι ἕτερον τρίγωνον ἔςαι, ᾧ τὰ εἰρημένα (τῶν πλȣρῶν καὶ γωνιῶν πάθη) παροπηδεῖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 903. Ἐπὶ τȣ̃ σφαιρικȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ (ᾧ αἱ πλȣραὶ πᾶσαι τεταρτημορίȣ ἐλάσσονες εἰσὶ, καὶ αἱ γωνίαι ἑπομένως, παρὰ τὴν ὀρθὴν, ὀξεῖαι)· δεδομένων, παρὰ ρὰ τὴν ὀρθήν, τῶν δύο ἤτοι πλευρῶν, ἢ γωνιῶν, ἢ πλευρᾶς καὶ γωνίας, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 181. Ληφθείσης, ἀντὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, στερεᾶς γωνίας τριπλεύρου τῆς ΝΓΜΟ, κατὰ τὴν ΟΜ, ἥτις ἂν ἐφεστήκοι κάθετος τῇ εὐθείᾳ ΜΓ, ἀχθήτω ἐπίπεδον τὸ ΝΟΜ, τῇ βάσει ΟΓΜ κάθετον. Ἐπειδὴ οὖν καὶ τὸ ΝΟΓ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὀρθὸν ἐστὶν, ἔσται καὶ ΝΟ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΟΓΜ, καὶ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΓ, ΟΜ κάθετος (§. 517.). Ἀλλὰ καὶ ΜΓ ἡ ἐπὶ τοῦ ΟΜΓ ἐπιπέδου, τοῦ ἐπὶ τὸ ΝΟΜ πρὸς ὀρθὰς ἐφεστῶτος, τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ ΟΜ κάθετος οὖσα, οὐδέντι ἧττον καὶ ἐπιπέδῳ τῷ ΝΟΜ, καὶ τῇ ἐπ' αὐτῷ εὐθείᾳ ΝΜ κάθετος ἔσται (§. 514.). Ἔνθεν τοι τὰ τρίγωνα ΝΟΓ, ΟΓΜ, ΝΓΜ, ΝΟΜ, πάντα ὀρθογώνια ἔσται. Ἡ δὲ Μ γωνία τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΝΜΟ, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ γωνίᾳ Μ τῆς στερεᾶς τριπλεύρου γωνίας (§. 512.).

Τούτων οὖν τῶν τριγώνων κατ' ἐπίπεδον ἀναπτυχθέντων, ἀναφύεται τὸ 182 Σχῆμα τόνδε τὸν τρόπον. Μενέτω κατὰ χώραν τὸ τρίγωνον ΝΟΓ, τὸ δὲ ΟΓΜ περὶ τὴν πλευρὰν ΟΓ περιαχθήτω, ὥστε κατὰ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τῷ ΝΟΓ συνδιεκταθῆναι. Ἐπὶ δὲ τὸ αὐτὸ, καὶ τὸ ΝΜΓ, περὶ τὴν ΜΓ περιαχθὲν, τοῖς εἰρημένοις συνεπιπεδούσθω. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ ΜΓ, ἐφ' ἑκατέραν τῶν εὐθειῶν ΜΟ, ΜΝ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε, τῶν ὀρθῶν ἤδη γωνιῶν ΟΜΓ, ΝΜΓ τῶν πρὸς τῇ αὐτῇ ΜΓ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων, ἡ ΟΜ τῇ ΜΝ κείσεται ἐπ' εὐθείας· τελευταῖον δὲ καὶ τὸ ΝΟΜ, περὶ τὴν ΝΟ περιαχθὲν, κατὰ τὸ αὐτὸ τοῖς λοιποῖς ἐπίπεδον καθεστάσθω· ἅμα δὲ τούτου γενομένου, καὶ ἡ ΜΟ, ἡ ΜΟ, ἡ ἐπὶ τὴν ΝΟ κάθετος, τῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν ΝΟ καθέτῳ ΓΟ κείσεται ἐπ' εὐθείας. Τοίνυν τῶν ἐπὶ τῦ ὕτως ἀνακύπτοντος ἐπιπέδυ Σχήματος σημείων, τοῖς ὁμοίοις γράμμασι, τοῖς κατὰ τὴν στερεὰν γωνίαν ἐπιχαραχθεῖσιν αὐτοῖς, διασημαινομένων, αἱ ἐφεξῆς ἀναλογίαι ἐκ τῶνδε τῶν τριγώνων συνάγονται.

Ἐκ μὲν τῶν τριγώνων ΟΓΜ, ΝΓΜ, συνάγεται·

ΜΝ : ΜΟ = Ἐφ. Υ : Ἐφ. Β. (§. 851.).

Ἐκ δὲ τῦ τριγώνυ ΝΟΜ ἐστιν,

ΜΝ : ΜΟ = Ἀκ : Συνημ. Μ.

Α'. Τοιγαρῦν, Ἀκ : Συνημ. Μ = Ἐφ. Υ : Ἐφ. Β.
ἢ γῦν Ἀκ : Συνημ. Μ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Υ.
(§. 849.)

Ἐπεὶ δὲ τὰ ἐπώνυμα Μ καὶ Ν ἀμείβεσθαι δύναται, τῆς μὲν Β ἀντὶ Κ τεθείσης, τῆς δὲ Κ ἀνάπαλιν ἀντὶ Β, μενέσης δὲ τῆς Υ, ἔσαι ὁμοίως·

Ἀκ : Συνημ. Ν = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Υ.

Ἀλλὰ γὰρ ἐὰν ἡ δὶς ἐπὶ τῦ 182 Σχήματος ἀπαντῶσα εὐθεῖα ΝΓ, ἀντὶ ἀκτῖνος ληφθῇ, ἐκ τῶν τριγώνων ΝΜΓ, ΝΟΓ γίνεται,

ΝΜ : ΝΟ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. Κ.

Ἐκ δὲ τῦ τριγώνυ ΝΟΜ συνάγεται,

ΝΜ : ΝΟ = Ἀκ : Ἡμ. Μ.

Β'. Ἄρα Ἀκ : Ἡμ. Μ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. Κ.

Καὶ τῇ ἀμοιβῇ τῶν ἐπωνύμων Μ, Ν, Β, Κ

Ἀκ : Ἡμ. Ν = Ἡμ. Υ : Ἡμ. Β.

Αὖθις, ἐὰν ἡ ΟΓ εἰς ἀκτῖνα τεθῇ, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΓΜ, ΝΓΟ, ἐπιφέρεται,

ΟΜ : ΟΝ = Ἡμ. Β : Ἐφ. Κ.

Ἐκ

Ἐκ δὲ τῦ ΝΟΜ τριγώνυ ἐςὶν,

ΟΜ : ΟΝ = Ἀκ : Ἐφ. Μ.

Γ΄. Ἄρα Ἀκ : Ἐφ. Μ = Ἡμ. Β : Ἐφ. Κ.

ἐῖτ᾽ ἐν, Ἀκ : Ἡμ. Β = Ἐφ. Μ : Ἐφ. Κ.

ἢ, Ἀκ : Ἡμ. Β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Μ.

Καὶ τῇ ἀμοιβῇ τῶν ἐπωνυμιῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Κ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Ν.

Ἤδη μὲν ἐν ἐκ τῆς Β΄. Ἀναλογίας, καθ᾽ ἑκατέραν ἐπωνυμίαν,

Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ,

Καὶ Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Ν : Ἡμ. Β,

Ἑπομένως ἄρα, Ἡμ. Β : Ἡμ. Ν = Ἡμ. Κ : Ἡμ. Μ.

Ἐκ δὲ δὴ τῆς ἀναλογίας ταύτης καὶ τῶν Γ΄. εὑρεθεισῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Μ.

Συνθέσει συνάγεται·

Ἀκ : Ἡμ. Ν = Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ : Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ.

Ἐπειδὴ δὲ ἐν γένει Ἀκ × Συνημ. Α = Ἡμ. Α × Συνεφ. Α (§. 850.), ἔςαι ὁμοίως, ἐὰν ἀντὶ Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ, τεθῇ Ἀκ × Συνημ. Κ. Καὶ ἀντὶ Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ, τεθῇ Ἀκ × Συνημ. Μ,

Δ΄. Ἀκ : Ἡμ. Ν = Συνημ. Κ : Συνημ. Μ.

Καὶ ἀμειβομένων τῶν ἐπωνυμιῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Μ = Συνημ. Β : Συνημ. Ν.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ μὲν τῆς Γ΄. Ἀναλογίας, ἐςὶν

Συνεφ. Μ : Συνεφ. Κ = Ἡμ. Β : Ἀκ.

Ἐκ

Ἐκ δὲ τῆς Ἀναλογίας τῆς Β΄.

Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ = Ἀκ : Ἡμ. Υ,

Ἄρα ἐν συνθέσει, ἔσαι,

Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ : Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Υ.

Ὅθεν ἐὰν ἀντὶ Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ, τεθῇ Ἀκ × Συνημ. Μ, καὶ Ἀκ × Συνημ. Κ, ἀντὶ Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ (§. 850.), γίνεται·

Συνημ. Μ : Συνημ. Κ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Υ.

Ἡ δὲ δὴ Α΄. Ἀναλογία φέρει,

Ἀκ : Συνημ. Μ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Υ.

Ὅθεν αὖθις ἐν συνθέσει γίνεται·

Ἀκ : Συνημ. Κ = Ἡμ. Β × Συνεφ. Β : Ἡμ. Υ × Συνεφ. Υ.

Καὶ τῆς αὐτῆς, ὡς πρὸ μικρᾶ γενομένης ἀντικατασάσεως,

Ε΄. Ἔσαι Ἀκ : Συνημ. Κ = Συνημ. Β : Συνημ. Υ.

Τελευταῖον ἐν συνθέσει τῶν λόγων τῶν ἐπὶ τῆς Α΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Συνημ. Μ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Υ,

τῇ μετὰ τῶν λόγων τῆς Ἀναλογίας τῆς Β΄.

Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ = Ἀκ : Ἡμ. Υ,

Καὶ ἐπὶ τῆς Γ΄. Ἀναλογίας ἀμειβομένων τῶν ὀνομάτων,

Ἡμ. Κ : Ἀκ = Συνεφ. Ν : Συνεφ. Β,

γίνεται, Ἡμ. Μ : Συνημ. Μ. = Ἀκ × Συνεφ. Ν : Ἡμ. Υ × Συνεφ. Υ.

Ἀλλαμὴν Ἡμ. Μ : Συνημ. Μ = Ἀκ : Συνεφ. Μ, καὶ Ἡμ : Υ × Συνεφ. Υ = Ἀκ × Συνημ. Υ,

Τύτων

Τούτων ἄρα ἀντὶ ἐκείνων ἀντικαταστάντων, γίνεται,

ϛʹ. Ἀκ : Συνεφ. Μ = Συνεφ. Ν : Συνημ. Υ.

Αἱ ἄρα ἓξ Ἀναλογίαι αἱ οὕτως εὑρεθεῖσαι, καὶ ἐπὶ ταύταις αἱ ἐξ αὐτῶν κατ' ἀμοιβὴν ὀνόματος τῶν Β, Κ, Μ, Ν γινόμεναι ἄλλαι τέτταρες, εἰσὶν αἱ ἑξῆς.

Αʹ. Ἀκ : Συνημ. Μ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Υ.
Βʹ. Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ.
Γʹ. Ἀκ : Ἡμ. Β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Μ.
Δʹ. Ἀκ : Ἡμ. Ν = Συνημ. Κ : Συνημ. Μ.
Εʹ. Ἀκ : Συνημ. Β = Συνημ. Κ : Συνημ. Υ.
ϛʹ. Ἀκ : Συνεφ. Μ = Συνεφ. Ν : Συνημ. Υ.

Ζʹ. Ἀκ : Συνημ. Ν = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Υ.
Ηʹ. Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Ν : Ἡμ. Β.
Θʹ. Ἀκ : Ἡμ. Κ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Ν.
Ιʹ. Ἀκ : Ἡμ. Μ = Συνημ. Β : Συνημ. Ν.

Ἔνθα ἀντὶ τοῦ λόγου τῶν συνεφαπτομένων, ὅπη παρείκοι ἀντικαθιστᾶν οἷόν τε τὸν λόγον τῶν ἐφαπτομένων ἀντιπεπονθότως. Ἐπεὶ δὲ αἱ Ἀναλογίαι αὗται, ἁπάσας ἐμπεριειλήφασι τὰς συζυγίας, τῶν ὅσαπερ ἐν τῷ σφαιρικῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἤτοι ὡς δεδομένα, ἢ ὡς ζητούμενα ἀπαντήσειεν. Ἔστι δ' ἁπανταχοῦ, τῶν ἐν ἑκάστῃ Ἀναλογίᾳ ὅρος εἷς ἡ ἀκτίς· ἐκ δὲ δὴ τριῶν ὅρων, οὐκ ἔστιν ὅτε ὁ τέταρτος ἀνάλογον οὐ προσευρίσκεται· Πάντως δὴ διὰ τῶν τοιούτων Ἀναλογιῶν, ἐὰν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, δύο τῶν λοιπῶν ὁποιαδήποτε τῶν ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου δοθῇ τριγώνου, εἴτε αἱ δύο τῶν πλευρῶν, εἴτε καὶ τῶν γωνιῶν αἱ δύο, ἢ τέως καὶ πλευρὰ καὶ γωνία, δοθήσεται καὶ τ' ἄλλα. Αʹ, διὰ τὸ τὰς μὲν πλευρὰς τεταρτημορίου ἐλάσσονας τίθεσθαι, τὰς δὲ

γωνίας

γωνίας ὀξείας, εἴτε διὰ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων διδῶτο, εἴτ᾽ οὖν καὶ διὰ τῶν συνημιτόνων, ἢ συνεφαπτομένων, πάντη διορισθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 904. Ὅτι δὲ αἱ δέκα εὑρεθεῖσαι Ἀναλογίαι, πρὸς ἐπίλυσιν ἁπάντων τῶν περὶ τὰ σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ζητεῖσθαι δυναμένων, ἔχουσιν ἀποχρώντως, εἰ μόνον μήτε τῶν πλευρῶν τις ὑπερέχουσα εἴη τὸ τεταρτημόριον, μήτε τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθὴν, οὕτως ἂν ἀποδειχθείη. Ἔνεισι δὴ τῷ σφαιρικῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τὰ πέντε ταῦτα, Μ, Ν, Κ, Β, Υ. Ἀμέλειτοι δύο μὲν γωνίαι, τρεῖς δὲ πλευραί· τῶν δὲ, συντρία, τοῖς δὲ μόνοις τοῖς δέκα τρόποις συμβαίνουσι· ΜΝΚ, ΜΝΒ, ΜΝΥ, ΜΚΒ, ΜΚΥ, ΜΒΥ, ΝΚΒ, ΝΚΥ, ΝΒΥ, ΚΒΥ. Ἀλλὰ τούτων γὰρ τῶν συζυγιῶν ἑκάστη, ἐπὶ μιᾶς τινος τῶν δέκα Ἀναλογιῶν, εὑρεθείη. Καὶ ἔστιν ἄρα, ἐὰν δύο δοθῇ, τῶν ἐν τοῖς πέντε γράμμασι Μ, Ν, Κ, Β, Υ σημαινομένων, διά τινος τῶν Ἀναλογιῶν ἐκείνων, ἀεὶ τὸ τρίτον λαμβάνειν, διὰ τὸ τὸν τέταρτον εἶναι ἁπανταχοῦ, ὅρον τὸν αὐτὸν Ακ, ἀεὶ ἐν ὑποθέσει διδόμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 905. Ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐφ᾽ οὗ τινὲς μὲν τῶν πλευρῶν τεταρτημορίου μείζονές εἰσι, τινὲς δὲ τῶν γωνιῶν ὀρθῆς μείζονες, δυεῖν τινων δοθεισῶν, εἴτε πλευρῶν, εἴτε καὶ γωνιῶν, εἴτε δὴ πλευρᾶς καὶ γωνίας, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀναλυέσθω ἀντὶ τοῦ προτεθέντος τριγώνου, τὸ ἐκείνῳ προσεχὲς (§. 902.), οὗ πᾶσαι μὲν αἱ πλευραὶ τεταρτημορίου ἐλάσσονες, πᾶσαι δ᾽ αἱ γωνίαι, παρὰ τὴν ἐν αὐτῷ ὀρθὴν, ὀξεῖαι. Ἐπειδὴ γὰρ τοῦ

τοιοῦδε

τοιῦδε τριγώνυ, αἱ μὲν πλευραὶ ἀναπληρώματα εἰσὶ τῶν πλευρῶν τῦ προτεθέντος, αἱ δὲ γωνίαι τῶν γωνιῶν, ἐπάναγκες καὶ τῶν αὐτῶν εὐμοιρεῖν ἡμιτόνων, καὶ ἐφαπτομένων τῶν αὐτῶν· ὥστε τέτων διδομένων, καὶ τὰ ἡμίτονα, ἢ τὰς ἐφαπτομένας δίδοσθαι τῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν, τῶν ἐπὶ τῦ τριγώνυ τῦ εἰς ἐπίλυσιν προτεθέντος. Ἀλλὰ γὰρ τῶνδε τῶν πλευρῶν, ποτὲ μὲν τεταρτημορίυ πλεοναζυσῶν, ποτὲ δ᾽ ἐλαττυμένων· καὶ τῶν γωνιῶν ὡσαύτως ἄλλοτε μειζόνων, ἄλλοτε δ᾽ ἐλασσόνων ἢ κατ᾽ ὀρθὴν γινομένων, ποτέρω ἄρα τῶν εἰδῶν ἂν εἴη προσανῆκον, τὸ ζητύμενον ἐπὶ παντὸς τῦ προκειμένυ, ἐκ τῶν δοθέντων διοριζέσθω, ἢ τὰ Θεωρήματα ἐδίδαξε φθάσαντα (§. 897. 899.).

Ἢ, ὅτι τὰ συνημίτονα καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τεταρτημορίυ μειζόνων τόξων, ἢ τῶν τὴν ὀρθὴν ὑπερβαλλυσῶν γωνιῶν κατ᾽ ἀπόφασιν εἰσὶν, (§. 827. 832. 838.) ἐπειδὰν τὰ συνημίτονα καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ἐλαττυμένων τεταρτημορίυ τόξων, καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν κατὰ θέσιν ληφθῶσι, διακρινέσθωσαν δὴ τὰ συνημίτονα, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς ἀμβλείας, διὰ τῶν σημείων + καὶ −, καὶ ἐπαγέσθω κατὰ τὺς ὑποτεθέντας ὅρυς (§. 652.) τὸ σημεῖον τῦ ζητυμένυ· ὅπερ ἐὰν μὲν ᾖ +, ἔσαι τὸ ζητύμενον τεταρτημορίυ, ἢ ὀρθῆς ἔλαττον· ἐὰν δὲ −, ἔσαι μεῖζον. Ἀλλὰ γὰρ τὸ θετικὸν ἡμίτονον, ὃ τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ ἐπίσης ἐςὶ προσανῆκον, ὥσπερ καὶ τῇ ὀξείᾳ, τῇ ὑπὲρ τὴν διάμετρον ἐφεξῆς ἐκείνῃ κειμένῃ, τὴν ζητυμένην πλευρὰν, ἢ γωνίαν, ἐν ἀμφιβόλῳ ἐᾷ, εἰ μὴ διὰ τῦ Θεωρήματος (§. 877.) προσδιορισθείη.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 906. Ἀκριβῦσι δὲ πάντα καλῶς, ἐπ᾽ ἐκείνων μόνων φανερὸν ἐςὶ τὸ ζητύμενον ἀμφιῤῥεπὲς πρόκυπτον, ἐφ᾽ ὧν δεδομένα τυγχάνει Μ καὶ Κ· ἤ, ὅπερ

εἰς

εἰς ταυτὸν ἥκει, Ν καὶ Β. Ἐν γὰρ δὴ τούτοις οὕτω διὰ τοῦ ἡμιτόνου τὸ ζητηθὲν ἀποδίδοται, ὥστε ἄδηλον ἔτι μένειν, πότερον ἄρα ἡ Ν, ἢ Μ γωνία ὀξεῖα, ἢ μή; πότερον δὲ ἡ πλευρὰ Β, ἢ Κ τεταρτημορίου μείζων, ἢ ἐλάσσων ἐστίν; ὡς ἐκ τῆς τῶν Ἀναλογιῶν ἐστὶ σαφὲς διασκέψεως, δι᾽ ὧν τὰ τοιάδε τρίγωνα ἀναλύεται (§. 903.). Καίτοι γὰρ κατὰ τὴν ἐν ταῖς Ἀναλογίαις ἐκείναις Β΄. παρὰ τὴν διὰ Μ καὶ Κ παρισαμένην Υ, ἔτι καὶ ἡ Κ, καὶ ἡ Μ παραστῆναι δύναται, οὐ μὴν ἀλλ᾽ εἰ κατ᾽ ἐκείνην ἡ Κ ζητοῖτο, ἐν τοῖς δοθεῖσιν ἂν εἴη ἡ Μ· καὶ ἀνάπαλιν τῆς Μ ζητουμένης, δοθήσεται ἡ Κ. Εἰσὶ γὰρ αὗται ἀείποτε, ἡ Μ λέγω καὶ ἡ Κ, τῆς αὐτῆς καταστάσεως· τουτέστιν ἤτοι ἄμφω 90° μείζονες, ἢ ἄμφω ἐλάσσονες, ἢ τέως 90° ἴσαι (§. 897.), ὡς μηδεμίαν δήπου ἐπὶ τούτων ἀμφιβολίαν τοῦ λοιποῦ περιεῖναι. Ἀλλὰ καὶ ἡ Η΄. τῶν Ἀναλογιῶν, ἐφ᾽ ἧς τὰ εἰρημένα κρατεῖ, οὐδὲν πλέον ἢ τοῖς ὀνόμασι, τῆς Β΄. διενήνοχεν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 907. Ὁ δὲ τῆς περιούσης ἀμφιβολίας λόγος, διδομένων τῶν Μ καὶ Κ, ἢ τῶν Ν καὶ Β, ἐν τούτῳ κεῖται, ὅτι ἐξ ἐκείνων δεδομένων, δύο ἀεὶ τρίγωνα κατασκευάζεσθαι ἔχουσιν. Ἐὰν γὰρ μεταξὺ τῶν ἡμικυκλίων ΜΟμ, ΜΝμ, τῶν κατὰ τὰ Μ καὶ μ σημεῖα ἀμοιβαδὸν τεμνομένων, τομεὺς τεθῇ ὁ ΝΓΟ, ἐπὶ τοῦ ΜΟμ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ἐφεστηκώς, ἔσται ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΟ ἡ κατὰ τὸ Μ γωνία, ἴση τῇ κατὰ τὸ μ, τοῦ τριγώνου ΝΟμ, τοῦ ἐκείνῳ ὄντος ἐφεξῆς· καὶ ΝΟ, ἤτοι Κ ἐπ᾽ ἀμφοῖν κοινή. Ἔνθεν τοι καὶ τῶνδε, (δηλ. τῶν Μ καὶ Κ) δεδομένων, οὐδεὶς τοῦ λοιποῦ λόγος δι᾽ ὃν ἄν τις τὸ ζητηθὲν (Υ, ἢ Β, ἢ Ν) θατέρῳ μᾶλλον, ἢ θατέρῳ τῶν τριγώνων προσάψειε. Σχ. 183.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ.

§. 908. Τ᾽ ἄλλα δὲ ἐκ τῶν προτεθεισῶν Ἀναλογιῶν, τὴν, ὁτιοῦν ἂν εἴη τὸ προτεθὲν, προσφυῶς