τόνδε τὸν τρόπον· Ἡμι. Α, Συνημ. Α, Ἐφ. Β, Ἡμ. πΒ, Ἐφ. πΒ. Ὅθεν ἕπεται ὅτι, Ἡμ. πΑ, ταυτὸ σημαίνει τῷ Συνημ. Α, (§. 825.). Καὶ Ἐφ. π Α, ταυτὸ τῷ Συνεφ. Α, (§. 837.) Καὶ τῆς ἀκτῖνος δὲ, ἤτοι τῆς ἡμιδιαμέτρου σύμβολον ἔσαι τὸ ακ, ἢ Ακ. Διὰ δὲ τοῦ Τ σημανθήσεται τὸ τεταρτημόριον, τὸ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου ακ, ἢ Ακ, καταγεγραμμένον. Ταῖς μέντοι τεμνούσαις, καὶ τοῖς παρημιτόνοις ἐνταῦθα οὐ προσχρησόμεθα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 842. Τῶν αὐτῶν γωνιῶν, τὰ ἡμίτονα, καὶ τὰ συνημίτονα, καὶ τὰ παρημίτονα, εἴτε ἐφαπτόμεναι, καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι, εἴτε τέμνουσαι καὶ αἱ συνδιατέμνουσαι, ἐὰν πρὸς διαφόρους ἀναφέρωνται ἀκτῖνας, ἔσονται ὡς αἱ ἀκτῖνες.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 167. Τῆς δοθείσης γωνίας Γ, ἐν ἀκτῖσιν ΑΓ = ΒΓ, καὶ αΓ = βΓ, κείσθω μέτρα καταγεγραμμένα τὰ ΑΒ, αβ. Ἡμίτονα δὲ, πρὸς τὰς τεθείσας ἀκτῖνας τὴν ἀναφορὰν ἔχοντα, τὰ ΒΔ, βδ. Συνημίτονα δὲ, τὰ ΔΓ, δΓ. Παρημίτονα δὲ, τὰ ΑΔ, αδ. Ἐφαπτόμεναι δὲ ΕΑ, εα. Τέμνουσαι δὲ ΕΓ, εΓ. Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ εὐθεῖαι ΕΑ, ΒΔ, εα, βδ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΓ κάθετοι οὖσαι, παράλληλοι πᾶσαι εἰσὶν, ἔσαι ΒΓ : βΓ = ΒΔ : βδ = ΔΓ : δΓ. Ἀλλὰ καὶ ΒΓ : βΓ = ΑΓ : αΓ. Ἄρα καὶ ΒΓ : βΓ = ΑΓ − ΔΓ : αΓ − δΓ = ΑΔ : αδ. Καὶ παρὰ ταῦτα ΑΓ : αΓ = ΑΕ : αε = ΕΓ : εΓ. Περὶ δὲ τῶν συνεφαπτομένων καὶ συνδιατεμνουσῶν, ταυτὸ δῆλον ἐντεῦθεν, ὅτι ἐφαπτόμεναι αἱ αὐταὶ εἰσὶ καὶ τέμνουσαι τοῦ παραπληρώματος τῆς αὐτῆς γωνίας, Γ, τῆς δεδομένης.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 843. Κἀντεῦθεν καὶ πρὸς γωνίαν τὴν αὐτὴν Γ, ὁ λόγος ὁ τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὸ ἡμίτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, πρὸς τὰ λοιπὰ, εἰς ταυτὸ ἥκει, ὁποσηοῦν ἂν ἡ ἀκτὶς ληφθείη. Δυνατὸν δὲ τόνδε τὸν λόγον, καθ' ἣντιναοῦν γωνίαν, ὥσπερ διὰ γραμμῶν εὐθειῶν, οὕτωσι καὶ δι' ἀριθμῶν, ὅσον ἂν ἐθέλοιτις, ἀκριβῶς ἐχόντων παριςάνεσθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 844. Οἱ δὲ λόγοι οὗτοι, κατὰ πάσας τὰς ἐν μοίραις τε, καὶ λεπτοῖς πρώτοις καταμετρεμένας γωνίας, δι' ἀριθμῶν παριςάμενοι, τὸ Κανόνιον συναποτελοῦσι τῶν Ἡμιτόνων, καὶ Ἐφαπτομένων, καὶ Τεμνουσῶν. Ἐν ᾧ τῆς Ἀκτῖνος ἀντὶ μονάδος ληφθείσης, καὶ εἰς μέρη 10000000 διαιρεθείσης, τῶντε μοιρῶν, καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ἐν τάξει ἐκκειμένων, ἀντιςοίχως παράκειται οἱ τῶν τηλικούτων μορίων ἀριθμοὶ, ἐξ ὧν, τῶν τοσῶνδε τόξων, ἢ γωνιῶν συγκροτοῦνται τὰ ἡμίτονα, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι. Προσετέθησαν δὲ οἱ τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν λογάριθμοι, οὓς ἄλλως ἐπὶ τῶν λογαριθμικῶν ἔδει Πινάκων ἀναζητεῖν χρονοτριβοῦντας, εἰς ἐπιβοήθημα τοῦ ὑπολογισμοῦ. Τοῖς δὲ τῶν λογαρίθμων τούτων χαρακτηριςικοῖς τοιάδε τις τροπὴ εἰσενήνεκται, ὥςε τῷ λογαρίθμῳ τῆς ἀκτῖνος, ἢ ἐςὶ 10, ἀριθμὸν ἀντιςοιχεῖν 10.000.000.000. Καὶ εἰς τοσαῦτα ἄρα μέρη ἡ ἀκτὶς ἐνταῦθα διῃρημένη νοεῖται. Τῶνγε μὴν τοιούτων λογαρίθμων, παρὰ τὸ χαρακτηριςικὸν, ἑπτὰ μόνοι οἱ πρῶτοι τῶν χαρακτήρων γράφονται, οἳ δήπου ἀποχρῶντες εἰσίν.

§. 845. Αὐτοὶ δὲ τῷ Πίνακι τῶν λογαρίθμων, ὃν πρὸς τῷ τέλει τοῦ βιβλιαρίου ὑποσυνάπτομεν, καὶ τὸ τῶν ἡμιτόνων, καὶ ἐφαπτομένων Ἀβάκιον προσεθεσεθέμεθα, ἀλλοίως γε μὴν, καὶ οὐχ ὡς ἔθος ἐπὶ τοῦ μείζονος Κανόνος, τὰ ἐν αὐτῷ διαιτήσαντες, λίαν δὲ ἐπιτεμόντες. Ἡ μὲν οὖν ἀκτὶς ἡμῖν εἰς χίλια μόνα διαιρεῖται μόρια· Τὰ δ' ἡμίτονα, ἅτινα ταῖς μοίραις ἀνήκει, καὶ τοῖς λεπτοῖς τοῖς κατὰ τὴν στήλην ἀριθμουμένοις, ἣ ἐπιγέγραπται Ἡμίτ. εἰσὶν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐν τῇ πρώτῃ τῶν στηλῶν ἀντίστοιχοι, οἷστισιν ὁμοστοίχως, κατὰ τὴν δευτέραν στήλην ἀντιπαράκεινται οἱ τῶν αὐτῶν ἡμιτόνων λογάριθμοι. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, αἵτε ἐφαπτόμεναι, καὶ οἱ τούτων λογάριθμοι, ἀντιστοιχοῦσι ταῖς μοίραις καὶ τοῖς λεπτοῖς, τοῖς ἐν τῇ στήλῃ, ἣ ἐπιγραφὴ Ἐφαπ. Ἀλλ' αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται, ὑπὲρ τὴν 45 μοῖραν οὐ γίνονται. Οὐδὲ γὰρ χρεία τῶν ὑπὲρ τὴν ἀκτῖνα ἐφαπτομένων, ὡς ἐξὸν, ἐκ τῆς ἐφεξῆς στήλης, ἧς ἐπιγραφὴ Συνεφαπ., τῇ αὐτῇ εὐχερείᾳ, τὰς τῶν ὑπὲρ τὰς 45 μοίρας γωνιῶν συνεφαπτομένας λαμβάνειν. Καὶ γὰρ καὶ τῶν ἐπὶ τῆσδε τῆς στήλης ἀριθμῶν ἑκάστῳ ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τῆς πρώτης τῆς ἐπιγεγραμμένης Ἀριθ. συνεφαπτομένη ἐστὶ τῆς γωνίας τῆς τῷ ἀριθμῷ ἐκείνῳ ἐκδηλουμένης· ὁ δὲ τῆς δευτέρας στήλης ἀριθμὸς ὁ ὁμόστοιχος, ὁ τῆς συνεφαπτομένης ἐστὶ λογάριθμος.

§. 846. Εἰς μὲν οὖν τὸν ἐπ' ἀκριβείας τῆς ἐνδεχομένης ὑπολογισμὸν, τὸν οὕτως ἐπιτετμημένον Πίνακα ἀποχρήσειν, πολλοῦγε καὶ δεῖ. Ἀλλὰ γὰρ ἔνθα μετρίως τινὸς ἐμφιλοχωροῦντος διαπτώματος ἀμελεῖν ἐξέσται, πολὺ τοῦ ἄλλως ἀλυσιτελοῦς ἂν ἐσομένου πόνου, διὰ τοῦ τοιοῦδε ὑφαιρεθήσεται Πίνακος. Μυρία γὰρ ὅσα ὑπολογισμοῖς καθυποπίπτει, τὰ δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς ἄλις δυνάμενα ἐκπεραίνεσθαι, παρατηρουμένων μάλιστα τῶν ἅ, μικρὸν ὕστερον περὶ τῆς αὐτοῦ ὑποτεθείσεται χρήσεως.

ΘΕΩ-

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 847. Ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, Σχ. 168.
ὁποτερασοῦν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, οἷον τῆς Β ληφθείσης, ἐστὶν ἡ τῶν πλευρῶν μεγίστη ΑΒ, πρὸς τὴν ἀπεναντίον τῇ ῥηθείσῃ γωνίᾳ πλευρὰν ΑΓ, ὡς Ἀκ. πρὸς Ἡμ. Β. Ἡ δὲ πλευρὰ ΓΒ, ἡ τῇ γωνίᾳ προσκειμένη, πρὸς τὴν ἀπεναντίον ΑΓ, ὡς Ἀκ., πρὸς Ἐφαπτ. Β.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ἀκτῖνος πηλικησοῦν ληφθείσης ΔΒ = ΕΒ, τό, τε τῆς γωνίας μέτρον καταγραφῇ ΔΕ, καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ ΔΗ, καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΕΖ, φανερὸν ὅτι ΑΒ : ΑΓ = ΔΒ : ΔΗ = Ἀκ. : Ἡμ. Β. Καὶ παραπλησίως ΓΒ : ΑΓ = ΕΒ : ΕΖ = Ἀκ. : Ἐφ. Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 848. Ἐπεὶ δ' αὐτὸ τοῦτο καὶ περὶ τῆς γωνίας Α κρατεῖ, ἣ τῆς Β παραπλήρωμα ἐστὶν, ἤτοι πΒ· ἔσται ΑΒ : ΒΓ = Ἀκ. : Ἡμ. πΒ. Καὶ ΑΓ : ΓΒ = Ἀκ. : Ἐφ. πΒ· ἤτοι ΑΒ : ΒΓ = Ἀκ. : Συνημ. Β. Καὶ ΑΓ : ΓΒ = Ἀκ : Συνεφ. Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 849. Τῶν Ἀναλογιῶν ΑΓ : ΓΒ = Ἀκ : Συνεφ. Β, καὶ ΓΒ : ΑΓ = Ἀκ : Ἐφ. Β, ἀλλήλαις παραβαλλομένων, εὔδηλον ὡς ἐφ' οἱασοῦν γωνίας Β, ἐστὶν Ἐφ. Β : Ἀκ. = Ἀκ : Συνεφ. Β. Ὅθεν ἐπειδὴ καὶ κατ' ἄλλην ἡντιναοῦν γωνίαν τὴν Δ, ἐστὶν Ἐφ. Δ : Ἀκ. = Ἀκ : Συνεφ. Δ, ἔσται ἐν γένει, Ἐφ. Δ : Ἐφ. Β = Συνεφ. Β : Συνεφ. Δ.

Ἀμέλει-

Ἀμέλειτοι πανταχοῦ ἡ ἀκτὶς, μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ τῆς συνεφαπτομένης τῆς αὐτῆς γωνίας, ἡ μέση ἀνάλογος ἐστίν. Αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι δυοῖν πηλικωνοῦν τόξων, ταῖς αὐτῶν τούτων συνεφαπτομέναις ἀντιπεπόνθασιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 850. Ἐξ αὐτοῦ δὲ τοῦ σχήματος καταφαίνεται, ὅτι καὶ ΕΒ : ΕΖ = ΒΗ : ΗΔ· τουτέστιν Ἀκ : Ἐφ. Β = Συνημ. Β : Ἡμ. Β. Κἀντεῦθεν Ἀκ × Ἡμ. Β = Ἐφ. Β × Συνημ. Β. Ἐπειδὴ δὲ τόδε κρατεῖ κἀπὶ τῆς γωνίας Α, ἥτις ἐστὶ πΒ, ἔσται ὁμοίως Ἀκ : Ἐφ. πΒ = Συνημ. πΒ : Ἡμίτ. πΒ· τουτέστιν Ἀκ : Συνεφ. Β = Ἡμίτ. Β : Συνημ. Β. Καὶ Ἀκ × Συνημ. Β = Συνεφ. Β × Ἡμ. Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

Σχ. 169. 107. §. 851. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Α, κάθετος ἀχθῇ ἡ ΑΔ, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, εἰ δέοι προεκβληθείσης, ἔσται ΑΔ : Ἀκ = ΔΒ : Ἐφ. ΔΑΒ. Καὶ ΑΔ : Ἀκ = ΔΓ : Ἐφ. ΔΑΓ. Κἀντεῦθεν ΔΒ : ΔΓ = Ἐφ. ΔΑΒ : Ἐφ. ΔΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 852. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν τούτων καθ' ἃς εὐθεῖά τις διὰ τριῶν ἄλλων προσδιορίζεται, παρὰ τὸ ἀπόλυτον τῆς ποσότητος, καὶ τὰ σημεῖα ἅμα ἐν λόγῳ τιθῆται, τὰ ἐν ταῖς τρισὶ, δι' ὧν ἡ τετάρτη ἐπιφέρεται, τῆς ἀκτῖνος ἀεὶ διὰ τοῦ + προσσημειουμένης, καὶ τῆς τετάρτης ὁμοίως τὸ κατάλληλον προκύπτει σημεῖον, κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀρχὴν (§. 652.) ληφθὲν· ὅθεν γίνεται φανερὸν ἐν τίνι τεταρτημορίῳ ἐκπερατοῦται τὸ τόξον, ᾧ τὸ εὑρε-

εὑρεθὲν ἡμίτονον, ἢ συνημίτονον ἐςὶν ἐπανῆκον, ἢ ἡ ἐφαπτομένη, ἢ ἡ συνεφαπτομένη. Οὕτως ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀναλογίας (§. 849.) Ἐφ. Δ : Ἐφ. Β = Συνεφ. Β : Συνεφ. Δ, ἡ μὲν Ἐφ. Δ θετικὴ ἦ, ἡ δὲ Ἐφ. Β ἀποφατικὴ, διὰ τὸ καὶ τὴν Συνεφ. Β ὡσαύτως ἀποφατικὴν εἶναι, προκύπτει Συνεφ. Δ καταφατικὴ, κατὰ τὸν κανόνα· ὁπότε φανερὸν καὶ ἀποφατικὴν τὴν τοιάνδε συνεφαπτομένην εἶναι μὴ δύνασθαι, ἀεὶ τῆς συνεφαπτομένης τὸ αὐτὸ φερούσης σημεῖον, ὃ τῇ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἐφαπτομένη προσκείμενον ἐςὶν. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας (§. 850.) Συνημ. Β : Ἡμ. Β = Ἀκ : Ἐφ. Β, τεθῇ τὸ μὲν Ἡμ. Β εἶναι καταφατικὸν. τὸ δὲ Συνημ. Β ἀποφατικὸν, ὃ τεκμήριον ἐςὶ τὴν γωνίαν Β ἀμβλεῖαν εἶναι, προκύψει δὴ ἡ Ἐφ. Β. ἀποφατική· εἴπερ τῷ ὄντι, πᾶσα πάσης ἀμβλείας ἡ ἐφαπτομένη ἐςί. Καὶ ἔςιν ἄρα τὰ ἐνταῦθα ἡμῖν, περὶ τῶν τεταρτημορίου ἐλασσόνων ἀποδεδειγμένα τόξων, δι᾽ ὧν ἡ τῶν ὀξειῶν καταμέτρησις, καθόλου ἀληθεύοντα, οὐ μόνον τῆς ποσότητος ἀπολύτως θεωρουμένης, ἀλλὰ καὶ τῶν σημείων ἐν λόγῳ γινομένων, καὶ τῆς δι᾽ αὐτῶν ὑποδεικνυμένης θέσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 853. Ἐὰν Α καὶ Β τόξα δύο σημαίνῃ κύκλου τοῦ αὐτοῦ, τῆς ἡμιπεριφερείας ἐλάσσονα· ἢ τὰς ὑπὸ τῶν τηλικούτων τόξων καταμετρουμένας γωνίας· ἡ Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Α + $\frac{1}{2}$Β) σημαίνῃ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἐκ τούτων ἡμιαθροίσματος, καὶ Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Α − $\frac{1}{2}$Β) τὴν τῆς τῶν αὐτῶν τούτων τόξων, ἢ γωνιῶν ἡμιδιαφορᾶς· ὧν ἂν ἐφαπτομένων ἐνταῦθα μόνον τὸ μέγεθος θεωροῖτο. Ἔςαι δὴ Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Α

$(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B}) : \text{Ἐφ.} (\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B}) = (\text{Ἡμ. A} + \text{Ἡμ. B}) : (\text{Ἡμ. A} - \text{Ἡμ. B})$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τῶν Α, Β ἡμιάθροισμα, ὡς ἐκ τοῦ ὑποτεθέντος, ἀεὶ δυοῖν τεταρτημορίων ἔλαττόν ἐστι· τεταρτημορίου δὲ ἤτοι ἔλαττον, ἢ μεῖζον.

Σχ. 171. Πρῶτον οὖν ἐὰν ἔλαττον ᾖ, ἐν κύκλῳ τῷ περὶ τὸ Γ γεγραμμένῳ, γενέσθω $\text{ΔΕ} = \frac{1}{2}\text{Α} + \frac{1}{2}\text{Β}$· καὶ $\text{ΕΖ} = \text{ΕΗ} = \frac{1}{2}\text{Α} - \frac{1}{2}\text{Β}$· καὶ ἀχθήτω ΕΓ ἀκτίς· καὶ ἐπεζεύχθω ΖΗ, ἥτις παρὰ μὲν τῷ Θ δίχα τμηθήσεται, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΓ κάθετος ἔσται (§. 359.). Ἀχθήτω δὲ καὶ ἡ ΖΓ ἀκτίς· ἥ, τε ΖΗ προσαχθήτω, εἰς ὃ ἂν τῇ ΓΔ διαμέτρῳ προσεκβεβλημένῃ προσπέσοι κατὰ τὸ Ι. Ἔσται τοίνυν (§. 851.) $\text{ΘΙ} : \text{ΘΖ}$ ἢ $\text{ΘΗ} = \text{Ἐφ. ΙΓΘ} : \text{Ἐφ. ΘΓΖ} = \text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}\text{Α} + \frac{1}{2}\text{Β}) : \text{Ἐφ.} (\frac{1}{2}\text{Α} - \frac{1}{2}\text{Β})$. Ἀλλὰ μὴν τὸ τόξον $\text{ΔΗ} = \text{ΔΕ} - \text{ΕΗ} = \frac{1}{2}\text{Α} + \frac{1}{2}\text{Β} - \frac{1}{2}\text{Α} + \frac{1}{2}\text{Β} = \text{Β}$· κἀντεῦθεν $\text{ΗΜ} = \text{Ἡμ. Β}$· καὶ $\text{ΔΖ} = \text{ΔΕ} + \text{ΕΖ} = \frac{1}{2}\text{Α} + \frac{1}{2}\text{Β} + \frac{1}{2}\text{Α} - \frac{1}{2}\text{Β} = \text{Α}$· καὶ μὲν δὴ καὶ $\text{ΖΝ} = \text{Ἡμ. Α}$. Ἄρα $\text{ΖΚ} = \text{Ἡμ. Α} - \text{Ἡμ. Β}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{ΗΖ} : \text{ΗΘ} = 2 : 1 = \text{ΖΚ} : \text{ΘΛ}$· ἔσται $\text{ΘΛ} = \frac{1}{2}\text{Ἡμ. Α} - \frac{1}{2}\text{Ἡμ. Β}$· καὶ $\text{ΘΟ} = \text{ΘΛ} + \text{ΗΜ} = \frac{1}{2}\text{Ἡμ. Α} - \frac{1}{2}\text{Ἡμ. Β} + \text{Ἡμ. Β} = \frac{1}{2}\text{Ἡμ Α} + \frac{1}{2}\text{Ἡμ. Β}$. Ἐπεὶ δὲ καὶ $\text{ΙΘ} : \text{ΘΗ} = \text{ΘΟ} : \text{ΘΛ}$· ἔσται δήπου καὶ $\text{Ἐφ.} (\frac{1}{2}\text{Α} + \frac{1}{2}\text{Β}) : \text{Ἐφ.} (\frac{1}{2}\text{Α} - \frac{1}{2}\text{Β}) = (\frac{1}{2}\text{Ἡμ. Α} + \frac{1}{2}\text{Ἡμ. Β}) : (\frac{1}{2}\text{Ἡμ. Α} - \frac{1}{2}\text{Ἡμ. Β}) = (\text{Ἡμ. Α} + \text{Ἡμ. Β}) : (\text{Ἡμ. Α} - \text{Ἡμ. Β})$.

Δεύτερον δὲ, ἐὰν τὸ τῶν τόξων ἡμιάθροισμα τεταρτημορίου μεῖζον ᾖ, κείσθω δὴ τούτων τὸ μεῖζον Β, τὸ δ' ἔλαττον Α· καὶ γινέσθω $\text{δΕ} = \frac{1}{2}\text{Β} + \frac{1}{2}\text{Α}$· καὶ ΕΖ, ἢ $\text{ΕΗ} = \frac{1}{2}\text{Β} - \frac{1}{2}\text{Α}$. Καὶ ἔσται δὴ καὶ ἤδη, $\text{ΙΘ} : \text{ΘΖ}$ ἢ $\text{ΘΗ} = \text{Ἐφ.} (\frac{1}{2}\text{Β} + \frac{1}{2}\text{Α}) : \text{Ἐφ.} (\frac{1}{2}\text{Β} - \frac{1}{2}\text{Α})$. Ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τῆς ὑπὸ ΔΓΕ, τῇ ἐφαπτομένῃ τοῦ ἐκείνης ἀναπληρώματος, ἤτοι τῆς

τῆς ὑπὸ ΕΓδ, ἀπολύτως θεωρεμένη ἴση ἐςὶ (§. 833.). Τὰ γὰρ σημεῖα, ἢ τὰ τῆς θέσεως, ἃ διὰ τῶν σημείων ἐλέγχεται, ἐνταῦθα ἀλογεῖται. Ἀλλὰ μὴν $\delta H = \delta E + EH = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = B$· καὶ HM = Ἡμ. B· καὶ μὲν ὖν καὶ $\delta Z = \delta E - EZ = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = A$· καὶ ZN = Ἡμ. A. Ἔςι δὲ δὴ καὶ ΘΟ = $\frac{1}{2}$ Ἡμ. A + $\frac{1}{2}$ Ἡμ. B· καὶ ΘΛ = $\frac{1}{2}$ Ἡμ. A − $\frac{1}{2}$ Ἡμ. B· τοιγαρὖν ΘΟ : ΘΛ = (Ἡμ. A + Ἡμ. B) : (Ἡμ. A − Ἡμ. B). Ἀλλ' ἦν γάρ, ὡς ἀνωτέρω, ΙΘ : ΘΗ = ΘΟ : ΘΛ. Ἆρα κἀπὶ τῆς δευτέρας τῆσδε ὑποθέσεως, Ἐφ. $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ = (Ἡμ. A + Ἡμ. B) : (Ἡμ. A − Ἡμ. B).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 854. Ἐὰν ἀντὶ τῶν τόξων A, B τὰ αὐτῶν ληφθῇ παραπληρώματα πA, πB· ὧν τὸ μὲν ᾖ μεῖζον, τοῦτο δ' ἔλαττον· ἔςαι ὡσαύτως, Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi A + \frac{1}{2}\pi B)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B)$ = (Ἡμ. πA + Ἡμ. πB) : (Ἡμ. πA − Ἡμ. πB) = (Συνημ. A + Συνημ. B) : (Συνημ. A − Συνημ. B). Ἔςι δὲ (ἑκατέρου τῶν τόξων A καὶ B τεταρτημορίου τοῦ T ἐλαττονουμένου) $A = T - \pi A$, καὶ $B = T - \pi B$· οὐκοῦν ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων τὰ ἴσα ἀφαιρεθῇ, $B - A = \pi A - \pi B$. Διὸ καὶ τὰ ἡμίση τούτων τῶν τόξων ἴσα ἔςαι, καὶ Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B)$ = Ἐφ. $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Ἐὰν δὲ τὰ αὐτὰ τόξα ἐπαθροισθῇ, προκύψει $B + A = 2T - \pi B - \pi A$· κἀντεῦθεν $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = T - (\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A)$. Καὶ ἔςιν ἄρα $\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A$ τὸ παραπλήρωμα τοῦ ἡμιαθροίσματος $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$· τοῦτο γὰρ λοιπόν, ἐὰν ἐκεῖνο ἀπὸ τοῦ τεταρτημορίου ἀφαιρεθῇ. Ἔνθεν τοι Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A)$ = Συνεφ. $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$. Καὶ Συνεφ. $(\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A)$ = Ἐφ. $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$.

Ὡς ἅπερ ἑκάτερον ᾖ τῶν τόξων τεταρτημορίου μεῖζον, τὸ αὐτὸ ὡσαύτως δειχθήσεται, διὰ τὸ εἶναι τινικαῦτα $A = T + \pi A$, καὶ $B = T + \pi B$. Ἐὰν δὲ τὸ μὲν B, τεταρτημορίου μεῖζον ᾖ, τὸ δὲ A ἔλαττον· τουτέστιν ἐὰν ᾖ $A = T - \pi A$, καὶ $B = T + \pi B$, τῇ τῶν προτέρων ἀφαιρέσει ἀπὸ τῶν ὑστέρων, ἔσται $B - A = \pi B + \pi A$· ὅθεν γίνεται $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A$· ἤτε Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A) =$ Ἐφ. $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Ἐὰν δὲ τὰ αὐτὰ τόξα ἀλλήλοις ἐπαθροισθῇ, προκύψει $B + A = 2T - \pi A + \pi B$· κἀντεῦθεν $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = T - (\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B)$. Ἐξ οὗ φανερὸν, ὡς ἐνταῦθα τῶν τόξων $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, καὶ $\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B$, τὸ δεύτερον τοῦ προτέρου παραπλήρωμα ἐστίν· ὑπολείπεται γὰρ ἐκεῖνο, ἐὰν τοῦτο ἀπὸ τοῦ τεταρτημορίου ἀφαιρεθῇ. Καὶ ἔστιν οὕτως Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B) =$ Συνεφ. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ καὶ Συνεφ. $(\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B) =$ Ἐφ. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. Καὶ ταῦτα ἄρα ἐὰν ἐπὶ τῆς καθόλου ἀναλογίας (§. 854.) Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi A + \frac{1}{2}\pi B)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B)$ $=$ (Συνημ. A + Συνημ. B.) : (Συνημ. A − Συνημ. B), ἐν ἰδίοις τόποις τεθῇ, γίνεται ἐν ὑποθέσει μὲν τοῦ τῶν τόξων ἑκάτερον A, B τεταρτημορίου ἐλαττοῦσθαι, ἢ πλεονάζειν·

Συνεφ. $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ $=$ (Συνημ. A + Συνημ. B) : (Συνημ. A − Συνημ. B).

Ἐν ὑποθέσει δὲ, τοῦ τὸ μὲν μεῖζον τῶν τόξων B, ὑπερέχειν τεταρτημορίου πλεονάζον, τὸ δ᾽ ἔλαττον A, τεταρτημορίου ἐλλείπειν.

Ἐφ. $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$: Συνεφ. $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$ $=$ (Συνημ. A + Συνημ. B) : (Συνημ. A − Συνημ. B).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 172. 173. §. 855. Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ΑΒΓ, δύο ἀεὶ αἱ τυχοῦσαι πλευραὶ ΑΓ, ΒΓ, εἰσὶν

ὡς

ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἃς ὑποτείνουσι, πρὸς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀναφερόμενα· τουτέστιν, ὡς ΑΓ : ΓΒ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀπὸ γὰρ τοῦ Γ σημείου εὐθείας καταχθείσης τῆς ΓΔ, καθέτου τῇ πλευρᾷ ΑΒ, τῇ, δεῆσαν, προεκβεβλημένῃ, ἔσαι· ΑΓ : ΓΔ = Ἀκ : Ἡμ. Α· καὶ ΓΒ : ΓΔ = Ἀκ. Ἡμ. Β. (§. 847.). Ἄρα καὶ ΑΓ : ΓΒ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Α. (§. 185.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 856. Ἕπεται δὲ ἐντεῦθεν ΓΑ + ΓΒ : ΓΑ − ΓΒ = (Ἡμ. Β + Ἡμ. Α) : (Ἡμ. Β − Ἡμ. Α.) (§. 171.). Ἐπεὶ δὲ ἄρα (Ἡμ. Β + Ἡμ. Α) : (Ἡμ. Β − Ἡμ. Α) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α). Ἔσαι ὁμοίως ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου ἐπιπέδου τριγώνου, ΓΑ + ΓΒ : ΓΑ − ΓΒ = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 857. Ἐκ τῶνδε τῶν Θεωρημάτων (§. 847. 855. 856.) τὰ εὐθύγραμμα των τριγώνων δι᾽ ὑπολογισμοῦ ἐπιλύεται· τουτέστι, δοθέντων ἐπὶ παντὸς τριγώνου, τῶν, δι᾽ ὧν τὰ λοιπὰ προσδιορίζεται, εἴτε γωνίαι ὦσιν, εἴτε πλευραὶ, διὰ τῶν ἐν τῷ Κανονίῳ ἡμιτόνων, καὶ ἐφαπτομένων ληπτὰ γίνεται τὰ δι᾽ ἐκείνων διοριζόμενα. Δῆλον δὲ, διὰ μόνων τῶν τοῦ τριγώνου γωνιῶν τὸν μὲν λόγον τῶν πλευρῶν δίδοσθαι, τὰς δὲ πλευρὰς αὐτὰς οὔ· ὧν γὰρ αἱ γωνίαι ἴσαι, ὅμοια μὲν τὰ τρίγωνα, ὡς ἐν πλευραῖς ἀνάλογον οὔσαις περιεχόμενα, τό γε μὴν τῶν ἐπ᾽ αὐτοῖς πλευρῶν μέγεθος, πηλικονοῦν ὅσον εἶναι ἐνδέχεται.

Δύο δὲ τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ τῷ εὐθυγράμμῳ μόναι γωνίαι οὔποτ᾽ ἂν δοθεῖεν, μὴ καὶ τῆς τρίτης ἐξ αὐτῶν ἀεὶ ἐπιφερομένης (§. 302.). Ἐὰν ἄρα δ[...] δεδομέναι τύχωσι γωνίαι τριγώνου παντὸς, καὶ παρὰ ταύτας, καὶ μία τις τῶν πλευρῶν, ἀεί τοι ἡ πλευρὰ αὕτη, πρός γε τὰς δοθείσας γωνίας, ὡσαύτως ἔχουσα θέσεως ἐστί· καὶ διὰ ταύτης δὲ καὶ τῶν γωνιῶν, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τοῦ τριγώνου προσδιορίζονται (§. 320.).

Ἐὰν δὲ μία μόνη τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ γωνιῶν ᾖ δεδομένη, δύο παρὰ ταῦτα πλευρῶν χρεία, εἰς τὴν τοῦ τριγώνου κατασκευήν· ὧν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν περιεχουσῶν, πάντη καὶ τὰ λοιπὰ προσεπιδιορίζεται, αἵτε δύο γωνίαι φημὶ αἱ λειπόμεναι, καὶ ἡ πλευρὰ ἡ τρίτη (§. 316.).

Ἀλλ' εἴπερ αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν οὐδαμῶς περιέχουσι, καὶ ἡ τρίτη μὲν ὁμοίως πλευρὰ κἀνταῦθα, διὰ τῆς ἀπεναντίον αὐτῇ γωνίας διορισθήσεται, οὐκ ἀεὶ γε μὴν ἡ γωνία αὕτη διὰ τῶνδε τῶν δεδομένων τὸν διορισμὸν ἕξει. Ἐπίσται γὰρ δηλονότι ἐν γωνίᾳ τῇ δοθείσῃ, καὶ δυσὶ πλευραῖς, ὧν τὴν ἑτέραν δέοι τῆς γωνίας κεῖσθαι ἀπεναντίον, δισσὰ τρίγωνα πολλάκις κατασκευάσαι, ὧν ἐν θατέρῳ ἡ γωνία, ἡ ἀπεναντίον τῆς λοιπῆς πλευρᾶς κεισομένη, ἀμβλεῖα εἴη, ἐν θατέρῳ δ' ὀξεῖα, καὶ τῆς προτέρας ἀναπλήρωμα (§. 347.). Διὸ καὶ ἑκατέρα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμιτόνου δοθήσεται. Κατὰ δὲ τὸ διττὸν τῆς τηλικαύτης γωνίας, καὶ ἡ τρίτη γωνία, ἣν ὑποτενεῖ ἡ ζητουμένη πλευρὰ διπλῆ τις ἀναφυήσεται.

Τελευταῖον δὲ, ἐὰν μηδεμία ᾖ δεδομένη τοῦ τριγώνου γωνία, ἀλλ' αἱ ἐπ' αὐτῷ πλευραὶ πᾶσαι, αἱ γωνίαι ἀείποτε πάντη διορισθήσονται (§. 323.).

§. 858. Ἃ τοίνυν ἡ Γεωμετρία, ἐκ τῶν παρὰ τοῖς τριγώνοις διδομένων, διὰ τῆς τοῦ σχήματος κατασκευῆς ἀνευρίσκει, αὐτὰ ταῦτα ἡ μέθοδος τοῦ

ἀριθ-

ἀριθμητικῶς τὰ τρίγωνα ἀναλύειν, διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀνακαλύπτει. Λέγεται δὲ αὕτη Τριγωνομετρία Ἐπίπεδος, διὰ τὸ εἶναι καὶ Τριγωνομετρίαν ἄλλην Σφαιρικὴν, τὴν περὶ τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας καταγραφόμενα ὡσαύτως καταγινομένην. Ἐφ᾽ ἑκατέρας δὲ ὡς διδόμενα πάντως ὑποτίθεται τὰ δυνατά· τίς γὰρ ἂν, τριγώνου φέρε, οὗ αἱ δύο ἅμα πλευραὶ τῆς τρίτης εἰσὶν ἐλάσσονες, τὰς γωνίας λαβεῖν ἀξιώσειεν, ὁπότε τὸ τοιόνδε τρίγωνον πάντῃ ἀδύνατον;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 859. Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ἐπιπέδου εὐθυγράμμου, ἐὰν τρία τινὰ δοθῇ, ἐξ ὧν τὰ λοιπὰ διορίζεται, τὰ λοιπὰ ταῦτα, εἴτε γωνίαι εἶεν, εἴτε δὴ πλευραὶ, εἴτε δὲ, καὶ πλευραίτε καὶ γωνίαι ἀναμὶξ, ἣ προσδιορίζεται, διὰ τοῦ Κανονίου τῶν ἡμιτόνων, καὶ τῶν ἐφαπτομένων, ἐξ ὑπολογισμοῦ ἀποδιδόναι.

ΛΥΣΙΣ.

Α΄.

§. 860. Ἐὰν ὦσιν αἱ τρεῖς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου γωνίαι διδόμεναι, ἐκποριθέντων ἀπὸ τοῦ Πίνακος, τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ, δοθήσεται ὁ λόγος τῆς πλευρᾶς ΒΓ, πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Καὶ γὰρ ΒΓ : ΑΒ = Ἡμ. Α : Ἡμ. Γ. (§. 855.). Ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς Γωνίας Β ἐκ τοῦ Πίνακος ληφθῇ, ὁ λόγος τῆς ΑΒ, ἢ τῆς ΒΓ, πρὸς τὴν ΑΓ πλευρὰν, τὸν αὐτὸν τρόπον δοθήσεται. Σχ. 174.

Β΄.

§. 861. Ἐὰν δύο γωνίαι ὦσι διδόμεναι Α καὶ Γ, δοθήσεται καὶ ἡ τρίτη Β. Ἐὰν δὲ παρὰ ταῦτα, καὶ καί τις τῶν πλευρῶν ΑΒ διδομένη ᾖ, εὑρεθήσεται ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ, οὕτως· Ἡμ. Γ : Ἡμ. Α = ΑΒ : ΒΓ· ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ, οὕτως· Ἡμ. Γ : Ἡμ. Β = ΑΒ : ΑΓ.

Γʹ.

§. 862. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, μόνη ἡ ὀρθὴ γωνία Β δεδομένη ᾖ, μετὰ τῶν αὐτὴν περιεχουσῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, εὑρεθήσεται ἡ γωνία Γ, οὕτως· ΒΓ : ΑΒ = Ἀκ : Ἐφ. Γ (§. 735.)· ἢ οὕτως· ΑΒ : ΒΓ = Ἀκ : Συνεφ. Γ, (§. 736.). Ταύτης δὲ τῆς γωνίας Γ εὑρεθείσης, δοθήσεται δὴ καὶ ἡ Α, ἣ τῆς Γ εἰς ὀρθὴν ἐστὶ παραπλήρωμα. Κἀντεῦθεν καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ προσευρεθήσεται, διὰ τῆς Βʹ. τῶν ἐπιλύσεων.

Δʹ.

§. 863. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ λοξογωνίου τριγώνου, ἡ κατὰ τὸ Γ γωνία δοθῇ, μετὰ τῶν αὐτὴν περιεχουσῶν δύο πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ, δοθήσεται ἅμα, καὶ τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν τὸ ἄθροισμα Α + Β, καὶ τούτου τὸ ἥμισυ· $\frac{1}{2}$Α + $\frac{1}{2}$Β. Καὶ ἐὰν ἄρα γένηται ΑΓ + ΒΓ : ΑΓ − ΒΓ = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α) (§. 856.), ἐξευρεθήσεται $\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α, ἡ τῶν ζητουμένων γωνιῶν ἡμιδιαφορά· ὅθεν συνάγεται τὴν μὲν τούτων μείζονα Β εἶναι = ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) + ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α), τὴν δὲ ἐλάσσονα Α = ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) − ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α)· οὕτω δὲ τῶν γωνιῶν δοθεισῶν, καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ ΑΒ, διὰ τῆς Βʹ. τῶν ἐπιλύσεων ἐξιχνευθήσεται.

Εʹ.

§. 864. Ἐὰν αὖθις μία μόνη τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ γωνιῶν ἡ Γ, δεδομένη ᾖ, μετὰ καὶ δύο πλευρῶν (ἀλλὰ μὴ τῶν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν περιεχουσῶν) ΑΒ, ΑΓ, ζητηθήσεται ἡ γωνία Β, οὕτως· ΑΒ : ΑΓ = Ἡμ. Γ : Ἡμ. Β. Δοθέντος γὰρ τοῦ Ἡμ. Β, δοθή-

δοθήσεται καὶ ἡ γωνία Β, εἰ μόνον μὴ ἀγνοοῖτο πότερον ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα αὕτη ἐςί· ταύτης δὲ τῆς Β εὑρεθείσης, δοθήσεται καὶ ἡ Α. Κἀντεῦθεν αὖθις, καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν πλευρῶν ληφθήσονται διὰ τῆς Β΄. τῶν ἐπιλύσεων.

ς΄.

§. 865. Ἐὰν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, αἱ πλευραὶ ὦσι διδόμεναι, καταχθείσης τῆς ΑΔ καθέτου τῇ βάσει, δοθήσεται ἡ ΒΔ ταύτης ἡμίσεια. Ἔνθεν τοι ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΔ, αἱ γωνίαι εὑρεθήσονται διὰ τῆς Ε΄. τῶν ἐπιλύσεων. Τούτων δ᾽ ἡτισοῦν ληφθεῖσα, τὰς λοιπὰς ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς εὐθὺς ἤλεγξεν. Σχ. 175.

Ζ΄.

§. 866. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ σκαληνοῦ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ πᾶσαι ὦσι διδόμεναι, κέντρῳ μὲν τῷ Α, τῷ κατὰ τὴν γωνίαν ἣν ἡ μεγίςη τῶν πλευρῶν ΒΓ ὑποτείνει, διαςήματι δὲ τῷ ΑΓ, τῆς ἐλαχίςης τῶν πλευρῶν, γεγράφθω κύκλου περιφέρεια, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε, ἔςαι $ΒΕ = ΒΑ + ΑΓ$, καὶ $ΒΖ = ΒΑ - ΑΓ$. Διὸ καὶ ἄμφω ΒΕ, καὶ ΒΖ δεδομέναι ἔσονται. Ἐπεὶ τοίνυν $ΒΓ : ΒΕ = ΒΖ : ΒΔ$ (§. 339.), διὰ τῆς δε τῆς ἀναλογίας εὑρεθήσεται ἡ ΒΔ. Κἀντεῦθεν $ΔΓ = ΒΓ - ΒΔ$. Ἐπιζευχθείσης οὖν τῆς ΑΔ, ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΓ, ἅπασαι δοθήσονται αἱ πλευραί. Ἐντεῦθεν δὲ, καὶ αἱ γωνίαι, διὰ τῆς ς΄. ἐπιλύσεως. Τούτων μία ἡ Γ τοιγαροῦν καὶ αἱ λοιπαὶ ἐν τῷ ΑΒΓ οὖσαι γωνίαι, διαφόροις τρόποις, ῥαδίως προσευρεθήσονται. Σχ. 176.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 867. Ἐν γένει πάσας τὰς τοῦ τριγώνου γωνίας προγιγνωσκομένας εἶναι δεῖ, πρὶν ἢ τούτων ἔχειν τὰς πλευρὰς ἀνιχνεύεσθαι. Ἐν δὲ ταῖς διὰ τῶν δοθεισῶν ἀναλογιῶν εὑρισκομέναις πλευραῖς,

 ἀμφι-

ἀμφιβολίας ἐκτὸς τὸ πρᾶγμα, κἂν αὗται διὰ τῶν ἡμιτόνων προσδιορίζοιντο καὶ τῶν ἐφαπτομένων, αἱ ταῖς ὀξείαις ἐπίσης καὶ ταῖς ἀμβλείαις τῶν γωνιῶν εἰσὶ προσανήκουσαι· οὐ γὰρ αἱ γωνίαι αὐταὶ τὸν ὑπολογισμὸν εἰσίασι· τότε διὰ γωνιῶν διαφερουσῶν, τὸν αὐτὸν προσδιορίζεσθαι τρόπον, οὐδὲν τῷ τῶν ἡμιτόνων τε καὶ ἐφαπτομένων διορισμῷ προσλυμαίνεται.

§. 868. Δοθείσης ἀλλ' οὖν τῆς γωνίας, διὰ τοῦ κατ' αὐτὴν ἡμιτόνου, ἢ τῆς ἐφαπτομένης, ἀεὶ δήπου λειπόμενον ἐστὶ ζητεῖν, πότερόνποτε ἀμβλεῖα, ἢ ὀξεῖα ἡ τηλικαύτη γωνία καθέστηκεν; (§. 823. 833.). Ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς Γ. ἐπιλύσεως, πρόχειρος ἡ ἀπάντησις, ἐπεὶ περὶ τῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐνταῦθα λόγος γωνιῶν, αἱ ἀείποτε ὀξεῖαι εἰσίν. Ἐν δὲ τῇ Δ'. ἐπιλύσει, τῶν ζητουμένων γωνιῶν τῆς μείζονος Β, δυεῖν ὀρθῶν ἐλάττονος οὔσης, πολλῷ δὴ μᾶλλον ἡ Β – Α δυεῖν ὀρθῶν ἐλαττωθήσεται, κἀντεῦθεν καὶ ἡ ταύτης ἡμίσεια $\frac{1}{2}$Β – $\frac{1}{2}$Α, ὀρθῆς ἐλάσσων, τουτέστιν ὀξεῖα, ἔσται· ὥστε οὐδ' ἐν τούτοις ἀμφισβήτησις ὑπολείπεται.

Σχ. 174. §. 869. Ἐν δὲ τῇ Ε'. τῶν ἐπιλύσεων, καθ' ἣν ἡ γωνία διὰ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς δίδοται, ἀμφισβητεῖν ἀεὶ λείπεται περὶ τῆς ὀξύτητος ἢ ἀμβλύτητος τῆς γωνίας, εἰμὴ διὰ τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γνωρίμων ὑποθέσεων τὰ τῆς ἀμφιβολίας ἐκ μέσου γίγνοιτο. Αἱ δ' ὑποθέσεις εἰσὶ, τὴν ΑΓ πλευρὰν, ἣ τὴν Β γωνίαν ὑποτείνει, μείζονα εἶναι τῆς ΑΒ τῆς προσκειμένης αὐτῇ· ἣν γὰρ τοῦτο ᾖ, ἡ γωνία, ἧς ἡ ζήτησις ὑποτίθεται Γ, ἀείποτε ὀξεῖα ἔσται. Τῆς γάρτοι κατὰ τὸ Β ἐξ ἀνάγκης ἐλάσσων οὔσα, οὔτ' ἄρ' ὀρθὴ, οὔτ' ἀμβλεῖα γένοιτο, τῆς Β ὀξείας καθεστώσης. Ὀρθῆς δὲ οὔσης τῆς Β, ἢ ἀμβλείας, καὶ τὴν Γ ὀξεῖαν εἶναι δεῖν, οὐδὲν ἧττον φανερόν. Ἀλλ' ἐὰν ἡ Γ ᾖ δεδομένη, ἥτε ΑΓ πλευρὰ μείζων τῆς ΑΒ, οὐδὲν κωλύσει τοῦ μὴ τὴν Β γωνίαν, ἤτοι ὀξεῖαν εἶναι,

εἶναι, ἢ ὀρθὴν, ἢ ἀμβλεῖαν. Κἀνταύτῃ ἄρα τῇ ὑποθέσει, εἰ μὴ ὀρθὴ οὖσα ἡ κατὰ τὸ Β εὑρεθείη γωνία, πότερον ἄρα ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα ἐστί; μετέωροι μένομεν τὴν διάνοιαν ἐπέχοντες.

§. 870. Ἐν δὲ τῇ ς'. τέως καὶ τῇ ζ'. τῶν ἐπιλύσεων, αἱ Β καὶ Γ γωνίαι ἀεὶ ὀξεῖαι εἰσὶ, μόνης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ἅτε δὴ πασῶν μεγίστης, ὀρθῆς, ἢ ἀμβλείας εἶναι ἐνδεχομένης· ὡς γὰρ ἂν αἱ Β καὶ Γ ἐπιγνωσθῶσιν, οὐδὲν ἀπορεῖν περὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λειφθήσεται.

§. 871. Ὅ, τι δ' ἀνήκει τῷ ὑπολογισμῷ, οὐδὲν ἐξ αὐτοῦ δυσχερὲς, τοῖς μὴ μείζονα, παρ' ἣν οἱ Πίνακες, ἥπερ ἔχουσιν ἐπιχορηγεῖν οἷοί τε εἰσὶ, τὴν ἀκρίβειαν ἀπαιτοῦσι. Δυνατὸν δὲ καὶ ἐμπαραβύειν τοὺς Πίνακας, καὶ ἡμίτονα, ἢ ἡμιτόνων λογαρίθμους, γωνίαις ταῖς ἐπὶ ταῖς μοίραις καὶ τοῖς πρώτοις λεπτοῖς, καὶ δεύτερα περιεχούσαις ἀντιστοιχοῦντας εὑρίσκειν, καὶ ἐκ τῶν Πινάκων οὐδέν τι ἧττον, ὅσοι πρὸς λεπτὰ μόνον τὰ πρῶτα, ἤτοι ἕκαστα, ἢ ἀνὰ δύο, ἢ κατὰ τρία, ἢ πέντε, ἢ δέκα, καταγεγραμμένοι εἰσίν. Ὁ δὲ δὴ τρόπος, ᾗ τοῦτο διαπεραίνεται, πρὸς τῷ τέλει ὑποτεθείσεται, ἔνθα περὶ τῆς τῶν Πινάκων πραγματευσόμεθα χρήσεως. Ἀμέλει τοι αἱ τῶν γωνιῶν, ἢ τῶν τόξων διαφοραὶ, εἰσὶν αἱ διαφοραὶ τῶν ἡμιτόνων αὐτῶν, τοσούτῳ ἀκριβέστερον, ὅσῳ αἱ διαφοραὶ ἐλάσσονες. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἐφαπτομένων, καὶ δὴ καὶ περὶ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων, ἀληθεύει ῥηθέν. Τοιγαροῦν ἐὰν ᾖ α μὲν ἐλάσσων γωνία, Α δὲ μείζων, διαφορὰ δὲ ἡ ἐν αὐταῖς βραχεῖά τις, καὶ ἡλίκη τινῶν μόνων λεπτῶν· ᾖ δὲ τούτων μεταξὺ γωνία ἡ a, γινέσθω, (Α – α) : (a – α) = (Ἡμ. Α – Ἡμ. α) : Ἡμ. a – Ἡμ. α). Καὶ δοθήσεται διὰ ταύτης τῆς ἀναλογίας τὸ Ἡμ. a, ἐὰν ᾖ διδομένη a· ἤτε γωνία a, διδομένου τοῦ Ἡμ. a. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον χωρεῖν ἐξέςαι, κἀν τοῖς λοιποῖς παραπλησίοις ἐμπαραβύσμασιν.

§. 872. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τοῦ, ἐν τέλει τοῦ πονηματίου, προςεθέντος ἡμῖν κατ' ἐπιτομὴν Πίνακος, οὐ πολλή τις ἡ ἐκ τῆς χρήσεως τῆς ῥηθείσης μεθόδου συντέλεια. Συντελεῖ μὲν γάρ τι καὶ ἐπὶ αὐτοῦ, οὐδὲν δὲ τοσοῦτον, ὅσον ἐν τῷ τοῖς πληρεςέροις ἐντυγχάνειν πίναξιν· οὐ γὰρ οἱ τῶν λεπτῶν ἀριθμοί, οἱ τοῖς τὰ ἡμίτονα, ἢ τὰς ἐφαπτομένας παριςάνουσιν ἀριθμοῖς ἀντιπαρακείμενοι, οὐδ' αὐτῶν οἱ λογάριθμοι, πάντη ἀκριβεῖς εἰσίν, οὐδὲ τὰς τῶν γωνιῶν, ἢ τῶν τόξων διαφορὰς, τῶν τοῖς ἡμιτόνοις ἐκείνοις, ἢ ταῖς ἐφαπτομέναις ἀντιςοιχούντων, ἐπὶ λεπτοῦ προβαλλόμενοι· τῶν δὲ δὴ Πινάκων τῶν ἐπ' ἀκριβείᾳ ἐν τοῖς μάλιςα διαφερόντων εὐχρηςότατοι εἰσίν, οὓς ἐν Ἀγγλίᾳ ἐκδιδομένους ἴσμεν, ἐπιγραφὴν φέροντας.

Sherwin's Mathematical Tables.

§. 873. Ἐν δὲ τῷ κατ' Ἐπιτομὴν ἐκκειμένῳ ἐκείνῳ Πίνακι, οὐδ' αἱ τῶν 45 μοίρας ὑπερβαινόντων τόξων ἐφαπτόμεναι προσετέθησαν, μόναι δὲ αἱ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν· αἱ δὲ ἀνάπαλιν συνεφαπτόμεναι, ἐπὶ τῶν 45 μοιρῶν ἐλαττουμένων οὐ κεῖνται· τῆς γάρτοι χρείας ἀπαιτούσης, καθάπερ ἐκ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης τὸν τῆς συνεφαπτομένης λογάριθμον, οὕτως ἀνάπαλιν ἐκ τοῦ τῆς συνεφαπτομένης τὸν τῆς ἐφαπτομένης πορίσασθαι ῥᾴδιον. Ἐπειδὴ γὰρ (ἡλίκον δ' ἂν ᾖ τὸ ὑπό Α δηλούμενον τόξον) Ἐφ. Α : Ἀκ. = Ἀκ : Συνεφ. Α (§. 849.) ἔςαι καὶ ἐν γένει, λογ. Ἐφ. Α − λογ. Ἀκ = λογ. Ἀκ − λογ. Συνεφ. Α. (§. 239.) κἀντεῦθεν λογ. Ἐφ. Α = 2 λογ. Ἀκ − λογ. Συνεφ. Α. καὶ λογ. Συνεφ. Α = 2 λογ. Ἀκ − λογ. Ἐφ. Α. Ἰςέον δὲ ὡς ἐπὶ τοῦ

τοῦ

τοιῦδε πίνακος τίθεται ὁ λογ. Ἀκ. = 3, 00000, διὸ 2 λογ. Ἀκ = 6, 00000. Καὶ ἀπὸ τῦδε ἄρα τῦ ἀριθμῦ τὸν λογάριθμον τῆς συνεφαπτομένης παντὸς τόξυ ἀφαιρετέον, ἐπειδὰν ὁ τῆς ἐφαπτομένης ζητῆται τῦ αὐτῦ τόξυ λογάριθμος· ἢ τὸν τῆς ἐφαπτομένης ἀνάπαλιν, ζητυμένυ τῦ τῆς συνεφαπτομένης· τὰ πολλὰ δὲ τὰς ἐφαπτομένας ἢ συνεφαπτομένας, ἃς ὁ Πίναξ ὀ περιέχει, ἐκκλίνειν οἷόντε, ἀντὶ τῦ λόγυ τῶν ἐφαπτομένων, τῦ τῶν συνεφαπτομένων ἀνάπαλιν λαμβανομένυ, ἢ καὶ ἐκείνυ, ἀντὶ τύτυ (§. 849.). Ἀλλὰ γὰρ διὰ τῶν ὑποσυναπτομένων ἐφεξῆς παραδειγμάτων, ὅσατε λοιπὰ, καὶ τὰ δὴ εἰρημένα ταῦτα διαλευκανθήσεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α.

§. 874. Ἔςω (§. 860.) γωνία Α = 61°, 15΄· Σχ. 174. καὶ γωνία Β = 94°, 20΄, ἧς ἀναπλήρωμα 85°, 40΄· ἐξ ὧν ἡ Γ = 24°, 25΄· καὶ ἔςαι δὴ ἐκ τῦ κατ᾽ ἐπιτομὴν Πίνακος, ἐγγύςπυ Ἡμ. Α = 877, καὶ Ἡμ. Β = 997, καὶ Ἡμ. Γ = 413. Οὐκῦν ΑΒ : ΑΓ = Ἡμ. Γ : Ἡμ. Β = 413 : 997. Καὶ ΑΒ : ΒΓ = Ἡμ. Γ : Ἡμ. Α = 413 : 877. Καὶ ΑΓ : ΒΓ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Α = 997 : 877.

Ἐκ δὲ τῦ πληρεςέρυ τῶν ἡμιόνων Κανονίυ, ἐπειδὴ Ἡμ. Α = 8767268. Καὶ Ἡμ. Β = 9971413. Καὶ Ἡμ. Γ = 4133693, διὰ τῶνδε τῶν ἀριθμῶν, οἱ λόγοι τῶν εἰρημένων πλευρῶν ἀκριβέςερον παρίςανται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

§. 875. Ἔςωσαν (§. 861.) γωνίαι, ὡς αἱ πρόσθεν ληφθεῖσαι Α = 61°, 15΄, Β = 94°, 20΄· κἀντεῦθεν καὶ Γ = 24°, 25΄. Ἡ δὲ πλευρὰ ΒΓ ἔςω = 587, 036· εὑρεθήσεται ὖν ἐκ τῦ ἐπιτετμημένυ Πίνακος ἡ πλευρὰ ΑΒ τόνδε τὸν τρόπον.

λογ.