



ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΕΠΙΠΕΔΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 816.

Εάν ἐπὶ κύκλῳ περιφερείας, ἧς διάμετρος μὲν Σχ. 165.
ἢ AB , κέντρον δὲ τὸ Γ , τόξον ληφθῆ ὁποῖον
ὅποτε ἀρχόμενον μὲν ἀπὸ τῆς A , ἐπὶ δὲ τὸ
 Δ ἐκπερατῆμενον ἀπὸ δὲ τῆςδε τῆς κατὰ τὸ τόξον
πέρας Δ , κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρως ἀχθῆ ἢ
 DE , αὕτη δὴ ἢ DE ἡμίτονον καλεῖται τῆς αὐτῆς
τόξου AD , καὶ τῆς γωνίας ὡσαύτως, τῆς ὑπὸ τῆς
τόξου καταμετρημένης.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 817. Ὅποιον ἂν σημεῖον A , εἰς ἀρχὴν ἔχει
τεθεῖναι, τῆς περὶ κέντρον τὸ Γ , διαστήματι τῷ GA
καταγραφομένης περιφερείας. Τῆς γὰρ ἐπὶ τῆς
ἀκτίνος ἐχάτῃ σημείῳ, ἀπὸ A διὰ Δ , Z , B , H
περιαγομένης, ἢ περιφέρειαν διεξοδύεται. Ἐάν ἔν
τῇ ἀνταῦθα ἢ τῆς σημείῳ κινήσις κατὰ τὸ Δ , πρὸ
τῆς τινὸς ὅλιω περιφέρειαν καταγραφίῃ, γίνεται
τὸ Δ πέρασ τῆς τόξου AD , τῆς τῆς περιφερείας
ἐλάσσονος. Διῶνται δὲ ἢ τῆς σημείῳ κινήσις, πα-
ρὰ τὸ σημεῖον Δ τέως εἰῶναι, καὶ μετὰ τὸ τινὸς ὅλιω
περιφέρειαν ἐκπεριελθεῖν καὶ δὴ, καὶ μετὰ τὸ
καὶ δις, καὶ τρίς, καὶ πολλαῖς τινὸς περίοδον ἐκ-
περαῖναι ἢ κειμένῃ παρὰ τῷ Δ , τόξα ἀριθμῶ πάν-
τὸς ἐπέκεινα περατῆνται ὡς τὸ $ADBAD$, τὸ
 $ADBADBAD$, καὶ ἔτιως ἐφεξῆς, οἷς ἀπασιν ἢ
αὕτη ἀρχὴ A ἐσὶν. Ἐκάστῃ δὲ τῶν εἰρημύων τόξων,
ἢ αὕτη DE ἡμίτονον ἐσὶν ἢ γὰρ μόνῃ τῆς AD , τῆς
παν-

πάντων ἐλαχίστη. Ἀμέλειτοι εἰν α, τότε τὸ ἐλαχίστον τῶν παρὰ τὸ Δ ἐκπερατεμένων σημαίνει τόξον, π δὲ τιὸ ὅλιω περιφέρειαν, ἔσται ἢ αὐτὴ εὐθεῖα ΔΕ, τὸ ἡμίτονον ἑκάστη τῶν τόξων τῶνδε, α, π + α, 2π + α, 3π + α, 4π + α, καὶ ἔτις ἐπ' ἀπειρον. Ταῦ μὲν ἐν τόξοις ταῦτα, τὰ τῆς ἡμιπεριφέρειᾶς μείζονα, καίτοι διασκέψεως ἐπὶ τῆ παρόντος μηδαμῶς τυγχάνοντα, τὴν γεμίω τῶν ἡμιτονων καθόλου ἀνοιαν παρεχόμενα, πρὸς ἄντι ποτὲ ἡμῖν ἐσόμενον εἰκόσσι προὔποτιθεύσαι. Σημείωσαι δὲ, ὡς ἡ γωνία, ἧς τὸ μέτρον μείζον τῆς ἡμιπεριφέρειᾶς ἐστὶ, δυεῖν ὀρθῶν μείζων ἐστίν.

§. 818. Ἀχθείσης τῆς ΖΗ διαὶ τῆ κέντρα Γ, ὡς ἐπὶ τῆς ΑΒ διαμέτρου πρὸς ὀρθῶς ἐπίσταθαι, ἢ περιφέρειᾶ εἰς τέτταρα τεταρτημόρια διατέμνεται ὧν τὸ μὲν πρῶτον ΑΖ, τὸ δὲ δεύτερον ΖΒ, τὸ δὲ τρίτον ΒΗ, τὸ δὲ τέταρτον ΗΑ. Ἐπὶ τέτων ἐντινος πάντως, τὸ πέρασ παντὸς προσληφθέντος τόξου, οἷον τὸ Δ, πίπλειν ἐπάναγκες, εἰμὴ ἐπὶ αὐτῶν πίπλοι τῶν ἀρχικωτέρων σημείων Η, Ζ, Β, Η, τινός (ἀπερ ἐξέσω ὀνομάζειν ΣΤΗΡΙΓΜΑΤΑ). Πίπλον τοίνω τὸ Δ κατ' ἀρχῆς τῆς περιφέρειᾶς Α, εἰς τὸ μηδὲν οἰχήσεται τὸ τόξον, ὃ σημαίνει τὸ α· τῶν δὲ λοιπῶν ἑκάστων π + α, 2π + α, 3π + α, κζ. ἢτοι ὀλοχερῆς ἢ περιφέρειᾶ ἔσται, ἢ τῆς περιφέρειᾶς τὸ πολλαπλῆν· τὸ, τε ἡμίτονον ἐπιποσῆν τῶν τηλικῶνδε τόξων ἐν σημείω συσαλήσεται, ἔ μέγεθος ἑδῶν. Ἀφισαμῆς δὲ τῆ Δ ἀπὸ τῆ Α πρὸς τὸ Ζ, γεννάται ὀποσονῆν τὸ α, καὶ ἄμα καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτῆ τῆ δὲ βραχυτάτη τῆδε τόξου, ἡλικον κατ' ἀρχῆς εἶται εἶκος τῆς κινήσεως, καὶ τὸ ἡμίτονον σμικρὸν ἐστὶ, μόνιστι τῆ τόξου ὑπελατθόμενον, ἔ καὶ τὸσῶδε ἦτον ἀντιδιαφέλλεται, ὅσῶγε τῆ Α ἦτλον τὸ Δ ἀφέσηκον. Αὐξοντι δὲ τὸ ἀπ' ἀντεῦθεν τῶ τόξου συσαύξει καὶ τὸ ἡμίτονον, εἰς ὃ τὸ Δ τῶ Ζ συμπέσοι, ἀφισα

Θα τῷ AZ τεταρτημορίῳ τὸ AD σωεξισῶται, καὶ ἢ μὲν γωνία ὑπὸ AGZ ἐρθῆ, τὸ δ' ἡμίτονον ἴσον τῇ ἀκτίνι ZI καθίσταται. Ἀπὸ δὲ τῆς σφίγγματος Z εἰάν ἐφεξῆς τὸ τόξον ἐπαύξη, καὶ τέτις τὸ πέρασ ἐπὶ θάτερον τῶν τεταρτημορίων ZB γένηται, ἢ μὲν γωνία ἢ ὑπὸ τῆς τόξε καταμετρεμένη, καὶ νῦν ὁμοίως ἐπαύξει, τό γε μὲν ἡμίτονον ἀπομειῶται, καὶ τοσῶδε ἔλαττον καθίσταται, ὅσα δὴ μᾶλλον τὸ τῆς τόξε πέρασ πρὸς τὸ B πελάζον γίνεται. Τὸ δὲ Δ πίπιον ἐπὶ τὸ B , τετέσι τὸ α τόξον δυοὶ περιφερείας τεταρτημορίοις σωεξιτέμενον, αὐθις οἴχεται τὸ ἡμίτονον, εἰμὴ καὶ πρὶν ὅλως ὄχετο, μέρες τινὶ τῆς περιφερείας παρὰ τῷ B συγκεχυμένον.

§. 819. Ἀλλὰ γὰρ τὰ ἡμίτονα, ἅπερ ἄχρι τῆδε διεσκεψάμεθα, τῶν ἐλασσόνων ἡμιπεριφερείας τόξων, δι' ὧν αἱ ἐλάττορες δυεῖν ἐρθῶν γωνία καταμετρῶνται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς διαμέτρου AB πίπιοντα μέρη, ἅπαντα ἀντὶ θητικῶν ἔχουσιν ἐκλαμβάνεσθαι, καὶ τῶν ἡμιτόνων ἕτως ἀντιδιασέλλεσθαι, ἃ ἐπὶ θάτερα τῆς διαμέτρου κείμενα, τῇ πρὸς ἐκείνα παραθέσει ἀπεφατικά γίνεται.

§. 820. Ἀμέλειτοι εἰάν τὸ πέρασ τῆς τόξε ἐπὶ τῆς τρίτης τεταρτημορίας BH , ἀπὸ τῆς σφίγγματος B πρὸςγε τὸ H ἀποχωρῆ, τὰ ἡμίτονα τῇ αὐτῇ τάξει προσεπαυξήσουσιν, ἢ περ ἐπὶ τῆς πρώτης τῶν τεταρτημορίων κατείδομεν αὐξόντα. Τῆς δὲ τόξε $AZBH$ τεταρτημορίοις τρισὶ σωεξισωθέντος, τὸ ἡμίτονον αὐθις, ἴσον τῇ ἀκτίνι HI κατασῆσεται. Ἀπὸ δὲ τῆς σφίγγματος H τῆς τόξε προαγομένη, τοσῶδε μᾶλλον τὸ ἡμίτονον ἐκμειῶται, ὅσα τὸ τῆς τόξε πέρασ ἔγγιον τῆς A σημείε γίνεται. Ἐνθα γεγονός, τὸ ἡμίτονον αὐθις εἰς τὸ μηδὲν τραπήσεται. Πίπιλα δὲ πάντα ταῦτα τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων, τῶν ἀπὸ τῆς δευτέρας ἐσγ' ἐπὶ τὸ τέταρτον τῶν τεταρτημορίων ἐκπερατμενίων (ὡς ἐπὶ τῆς πρὸ ὀφθαλμῶν χήματος).

τος)· ἀερεθε τῆς διαμέτρως AB , τετῆσιν ἐπὶ τὰ ἀντιθετα τῶν μερῶν ἐφ' ἃ κείμενα ἴσ' τὰ τῶν τόξων, τῶν ὑπὲρ τὴν ἡμιπεριφέρειαν μὴ γινομένων. Ῥαδίον δὲ αὐτὰ ταῦτα τὰ εἰρημνά, καὶ πὶ τὰ τόξα τὰ τῆς ὀλοχερῆς περιφερείας μείζονα, ἢ καὶ περιφερειῶν μιᾶς πλείονων, μετνεγκεῖν.

§. 821. Ἄλλ' ἐν μέρει τὰ τηλικαῖδε τόξα εἰσάσαντες, τὰ τὴν περιφέρειαν ὑπερβάλλοντα, ἐπὶ παντὸς ἡμίτονου θητικῆ, διὸσα τόξα ἐπιθεωρεῖμεν, οἷον τὸ μὲν AD , τὸ δὲ $AZΘ$, ὧν τὰ πέρατα Δ , καὶ Θ , ἐπ' ἔχ' ταυτὸ πίπτει τεταρτημόριον, ἀλλὰ τὸ μὲν ἐπὶ τῆ πρώτῃ AZ , τὸ δ' ἐπὶ τῆ δευτέρῃ ZB . Ἐὰν γὰρ ληφθῆ $ZΘ = Z\Delta$, ἢ $BΘ = AD$, ἢ διὰ τῆ Θ δήπε εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς AB διαμέτρως ἀγομῆ καθετος, ἢ τὸ ἡμίτονον ἐσὶ τῆ τόξω $AZΘ$, ἴση γίνεται τῆ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρως καθετῶ DE , ἢ τῆ τόξω AD τὸ ἡμίτονον ἐσὶν. Ἐσαί ἀρα τὸ αὐτὸ θητικὸν ἡμίτονον δυοῖν τόξων, ὧν τὸ μείζον $AΘ$, τὸ τεταρτημόριον ὑπερβάλλει τῶ τόξω $ZΘ = Z\Delta$, ὃ τὸ ἔλαττον AD τῆ τεταρτημορίῃ ἐλλείπει· ἔπερ ἔτως ἔχοντες, τὸ τῶν τόξων ἀθροισμα $AD + AΘ$, τετῆσιν $AZ + Z\Delta$, καὶ $AZ - Z\Delta$, ἐσὶ $2AZ$, ἴσον τεταρτημορίοις δυοῖ. Τῶν δὲ μεγέθει διαφεροσῶν γωνιῶν, ὧν τὸ αὐτὸ θητικὸν ἡμίτονον, καὶ τὸ πρὸς τὴν ὀρθὴν παραπλήρωμα τὸ αὐτὸ ἔσαί· τῶν αὐτῶν δὲ γωνιῶν ἢ ἑτέρας τῆς ἑτέρας, τὸ πρὸς ταῖς δύο ὀρθαῖς ἐσὶν ἀναπλήρωμα.

§. 822. Τὸν αὐτὸν δὲ σιμάγεται τρόπον, καὶ δυοῖν τόξων, ὧν ἑδέτερον ὑπὲρ τὴν ὀλίω περιφέρειαν γίνεται, εἰάν ἢ τὸ αὐτὸ ἀποφατικὸν ἡμίτονον, τοσῶδε τὸ ἔλαττον ἐλλείπει τῶν τριῶν τεταρτημορίων $AZBH$, ἴσῶ τὸ μείζον ὑπερβάλλει αὐτά. Ὡς τὸ ἀθροισμα τῶν τηλικῶτων τόξων ἐξ τεταρτημορίων σιμαποτελεῖν· τετῆσι τῶν τριῶν τὸ διπλάσιον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 823. Τὸ τῆς ἡμιπεριφερείας ἡμίτονον, καὶ τὸ τῆς περιφερείας δὲ τῆς ὀλοχερεῖς, καὶ ἂν γίνετο τόξε παντός, τῆ ἀναφυσμῆς πολλαπλασιασμῶ τῆς ἡμιπεριφερείας δι' ἀριθμῶ ὀλοχερεῖς, μέγεθος ἔδον ἔχον ἐστί. Τὸ δὲ τῆς τεταρτημορίου ἡμίτονον ἴσον τῆ ἀκτίνι καὶ εἰάν αὐτὴ ῥηθῆ α, ἔσται τὸ τῶν τριῶν τεταρτημορίων ἡμίτονον, ἦτοι τὸ μοιρῶν $270 = - α$. Εἰσὶ δὲ παρὰ ταῦτα καὶ ἕτερα ὑπὲρ ἀριθμῶν τόξα, ὧν τὸ ἡμίτονον ἦτοι $+ α$, ἢ $- α$. Ἐάν ἐν ληφθῆ τὸ $\Delta \Delta$ τόξον μοιρῶν φέρε 50, τὸ τέττα ἡμίτονον ἔδοντι ἦτλον καὶ τῶ αὐτῆ ἀναπληρώματι, τῶ μοιρῶν ὄντι 130, ἀνήκον ἔσται, καὶ πολλοῖς δὲ καὶ ἄλλοις τόξοις, ἅπερ ἐπὶ τῆ παρόντος ἔ πρόκειται θεωρεῖν. Τῆ δέτοι τόξε τῆ λίαν βραχυτάτε, καθάπερ δὴ καὶ τῆ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ τῆς ὀλης περιφερείας μόλις διαφέροντος, τὸ ἡμίτονον μονονεχὶ ἴσον ἐσὶ περιφερείας μέρει, σὺ ὦ σιωζάνειν ἔοικε, καὶ συγχέεσθαι, καὶ τοσῶδε μάλλον καὶ ἀκριβέστερον, ὅσα τὸ τηλικόν ἡμίτονον ἔλατλον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 284. Συνημίτονον τῆ παρὰ τὸ Δ ἐκπερα-
 τισμῆς τόξε, ἔ ἀρχὴ ἀπὸ Λ , καὶ τῆς γωνίας, ἧς
 τότε τὸ τόξον μέτρον ἐστί, λέγεται τὸ μέρος τῆς δια-
 μέτρης ΓE , τὸ ἀπὸ τε τῆ κέντρης Γ , καὶ τῆ ἡμιτό-
 νης ΔE ἀπολαμβάνομενον· τὸ δὲ τῆς διαμέτρης ΛE
 μέρος, τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆ τόξε Λ , καὶ τῆ ἡμι-
 τόνης ΔE τῆ αὐτῆ τόξε $\Lambda \Delta$, Ἠμίτονον καλεῖται
 πλάγιον, ἢ Παρημίτονον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 825. Τὸ σινημίτονον ΓE , ἐπίσης τῶ ἡμιτό-
 νω ΔE , ἅπασιν ἐσὶν ἀνήκον τοῖς τόξοις, ὧν ἢ καὶ
 ἀρχὴ κατὰ τὸ Λ , τὸ δὲ πέρας κατὰ τὸ Δ . Ἐπεὶ
 δὲ

δὲ τετωνί των τόξων τὸ ἐλάχισον $\Lambda\Delta$, τεταρτημο-
 ρίς ἐλάττω ἐστὶ, τὸ τέταρτον σιμημίτονον, ἄρα τὸ αὐ-
 τὸ τῷ τόξῳ $\Delta\Gamma$ ἡμίτονον ἐστί, τῷ ἀπὸτε τῷ κατὰ
 τὸ πρότερον τόξον πέρατος, καὶ τῆς διαμέτρου ZH
 ἐναποκρυβανομίας ὅπερ αὐτόθεν φανερόν, ἐάν-
 τις ἀπὸ τῷ σημείῳ Δ , ἐπὶ τὴν διάμετρον ZH κά-
 θετον ἀγάγη τὴν $\Delta\epsilon$. Ἐστὶ δὲ τὸ ΔZ τῷ $\Lambda\Delta$ τό-
 ξῳ τῷ ἐλάχιστῳ των ὧν τὸ ΓE σιμημίτονον ἐστὶ, πα-
 ραπληρώμα ἐστὶ τεταρτημόριον. Ἐστί ἄρα τὸ τῷ
 $\Lambda\Delta$ τόξῳ σιμημίτονον, τῷ ἐλάττω τεταρτημορίῳ,
 καὶ ἡμίτονον τῷ παραπληρώματος τόξῳ τῷ αὐτῷ.
 Σημείωσα δὲ, ὡς ἀντὶ των τόξων, ἕδος τὰ πολλα
 καὶ ταῦτα τὰς γωνίας ὀνομάζειν, τὰς ὑπὸ των τη-
 λικέτων τόξων καταμετρημίας.

§. 826. Ἐάν ἔν καὶ ἤδη, τῆς ἀκτίνος περὶ τὸ Γ
 περιεγομνίας, περιφέρειαν νοηθῆ καταγραφομνία,
 τῷ ἐπὶ τῆς ἀκτίνος πέρατος (ἀπ' ἀρχῆς ληφθείσης
 τῆς κατὰ τὸ A) διὰ Z καὶ B καὶ H κατὰ μικρὸν
 ἐπὶ τὸ A πάλιν χωρῆντος, εὐδῆλον δὲ κατ' ἀρχαίς
 μὲν τῆςδε τῆς κινήσεως, ἔστω τὸ ἕχατον τῷ ἕτως
 ἀνακύψοντος τόξῳ, συμπίπτει τῷ A , ὅτι τὸ μὲν E
 ὡσαύτως τῷ A σιμημίττει, τὸ δὲ σιμημίτονον τῷ ἀκτίν-
 νι ΓA σιμημίττειται. Ἐῖτα πηλικέτινος ἀνακύψαν-
 τος τόξῳ τῷ $\Lambda\Delta$, τῷ τῷ E ἀπὸ τῷ A ἀπαναχω-
 ρήσει, γίνεται μὲν τὸ σιμημίτονον ΓE τῆς ἀκτίνος
 ΓA ἐλάττω, ἀλλὰ τῷ τόξῳ βραχυτέρη ἔτι τυγχά-
 νοντος ἢ διαφορὰ ἔ πάλιν ἐπίσημος ὑπεκμειῖται
 δ' ἐκεῖνο τὸ σιμημίτονον, τῷ Δ σημείῳ διὰ τῷ τε-
 τερτημορίῳ ΛZ , πρὸς τὸ Z προεγομνίας, καὶ διω-
 κῶς ὑποφθίνει, εἰς ὃ τῷ κατὰ τὸ τόξον πέρατος
 τῷ Z σιμημικότος κατὰ σημείον συστῆ, ἔ μέγεθος
 ἔστω ὡς εἶναι λοιπὸν ὁ τὸ τῷ τεταρτημορίῳ σιμη-
 μίτονον, ἢ τῆς ὀρθῆς γωνίας τῆς ὑπὸ τῷ τεταρτη-
 μορίῳ καταμετρημίας. Τὸ δ' ἀπαντεῦθαι τῷ τόξῳ,
 τῷ τῷ ὡ αὐτῷ πέρατος, ἀπὸ τῷ Z ἐπὶ τὸ ἐφεξῆς
 τεταρ-

τεταρτημόριον ΖΒ μεταβάσεται καὶ προόδω, ἐπαύ-
 ζοντος, καὶ τὸ σωημίτονον αὐτὸ ἐπὶ τῆς ΓΒ ἀκτῆ-
 νος, ἧς ἡ θέσις τῆ προτέρα ΓΑ ἀντίθετος μετασῆ-
 σεται, ἐπαύξειν αὖθις ἀρχόμενον, καὶ δὴ καὶ αὖ-
 ζον, τῆς ἀπὸ τῆς ἀκτίνος ΓΒ διαφορᾶς αὐτῶ ἐκ-
 μεισμένης τε καὶ ὑποφθινύσης, εἰς ὃ τῆ ἐν τῷ τόξῳ
 πέρατος ἐπὶ τὸ Β ἀφαικομένη, καὶ τῆ τῶς αὐτῆ
 εἰς μέγεθος τεταρτημορίων δυοῖν ΑΖΒ ἤδη κεχωρη-
 κότης, τῆ ἀκτίνι ἐξισωθεῖη, τῆς διαφορᾶς τέλεον
 ἐκλελοιπύσας.

§. 827. Ἐντεῦθεν ἔπεται, ὡς εἰάν τὸ τῆ τῶς
 ὁ ἐλαττον ἀν ἡ τεταρτημορίαι, σωημίτονον θετικῶς
 ἐκληφθῆ, τὸ τῆ μείζονος ἢ κατὰ τεταρτημόριον,
 ἀποφατικὸν ἔσται. Καὶ ταύτη δὲ καὶ τῆς ὀξείας γω-
 νίας ἢ ἀμβλείας ἀντιδιασαλήσεται. Ἐάν γὰρ τὸ
 κατ' ἐκείνῳ σωημίτονον ἔστω + ἐπισημειωθῆ, τὸ
 κατὰ ταύτῳ σημειωτέον ἔστω -. Μόνης δὲ ἀπο-
 λύτως τῆς ποσότητος ἐπὶ τῶν τόξων θεωρημένης,
 ὧν τὰ πρὸς τὸ τεταρτημόριον παραπληρώματα ἴσα
 εἰσι, καὶ τὰ σωημίτονα αὐτοῖς ἴσα εἶναι πρόδηλον.
 πλὴν ἀλλὰ τῆ τῶν δε τῶν τόξων ἐλαίσονος σωημί-
 τονον ἔχοντος + σ, τὸ μείζον ἔξει - σ· τοιαῦτα δὲ
 τὰ τόξα ΑΔ, καὶ ΑΖΘ.

§. 828. Ἐάν τὸ τῆ τῶς πέρατος, ὑπερβάν τὸ
 σήριγμα Β, περαιτέρω χωρῆ πρὸς τὸ Η, τὰ σωη-
 μίτονα τῶ αὐτῶ λόγῳ ὑπομειωθήσεται, ὡ ἐπὶ τῆ
 ἠγησαμένης τεταρτημορίαι ΖΒ προσήυξανε. Καὶ ἔσι
 δὲ καὶ ταῦτα πάντα ἀποφατικά. Τῆ δὲ τῶς
 ΑΖΒΗ, τῆ τρισὶ τεταρτημορίοις ἐξισομένης, σωη-
 μίτονον ἔδεν· ὑπὲρ δὲ τὸ τηλικῆτον μέγεθος γινομέ-
 νη τῆ τῶς, καὶ τῆ κατ' αὐτὸ πέρατος ἀπὸ τῆ Η
 ἐπὶ τὸ Α προβαίνοντος, τὰ σωημίτονα αὖθις θετι-
 κὰ ἔσται, καὶ ὡσαύτως ἐπὶ τὸ μείζον χωρήσει, ὡς
 ἐπὶ τῆ πρώτῃ τεταρτημορίαι ΑΖ ἐχώρει ἐπὶ τὸ
 ἐλαττον· τέρμα δὲ τῆς τῶτων αὐξήσεως τὸ σημεῖον
 Λα Λ,

Λ , Ξ , τῷ κατὰ τὸ τόξον πέρατος γνομένων, τετέ-
 ρισι, τῆς ὅλης ἤδη πληρωθείσης περιφερείας, τῇ
 ἀκτίνι αὐθις σιωεξισωθήσεται τὸ σιωημίτονον. Ἐν
 δὲ τῶν πρόχειρον καὶ τὰ σιωημίτονα ἐπικρίνειν
 τῶν τόξων, τῶν γνομένων ὑπὲρ τινὶ περιφέρειαν
 τῶν γὰρ ἐντὸς τῷ πρώτῃ τεταρτημορίῃ $\Lambda\Xi$ ἢ
 ἐντὸς τῷ ἑκάστῃ $\text{H}\Lambda$ ἐκπερατωμένων, τὰ σιωημίτο-
 να θετικά. Ἐντὸς δὲ τῷ ὀδυτέρῃ ZB , ἢ τῷ τρίτῃ
 BH , ἀποφατικά. Ἐσι δὲ παρὰ τὰ ὑπὲρ ἀριθ-
 μὸν τόξα, τὰ ἐν τῷ πρώτῃ τεταρτημορίῳ $\Lambda\Xi$ πε-
 ρατωμένα, καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ $\text{H}\Lambda$ ὁμοίως ὑπὲρ
 ἀριθμὸν ἄλλα, ὧν σιωημίτονον ἐστὶ τὸ αὐτὸ, καὶ τῷ
 το θετικόν. Παραπλησίως δὲ παρὰ τὰ ἀριθμὸν
 ὑπερπαύοντα τόξα, τὰ ἐν τῷ ὀδυτέρῳ τεταρτημο-
 ρίῳ ZB ἐκτερωματιζόμενα, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ BH
 ὁμοίως ἀριθμὸν ἐπέκεινα, ὧν σιωημίτονον τὸ αὐτὸ,
 ἀλλὰ τῷ ἀποφατικόν. Τοῖς δὲ δὴ τῶν ἡμιτόνων
 πλαγίοις, ἢτοι τοῖς παρεπιτόνοις, ὧν ἄλλως τὰ κυ-
 ριώτερα τῶν παρεπομένων εἰ χαλεπὸν σιωιδεῖν, ἐπὶ
 τῷ παρόντος εἰ προχρησόμεθα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 166. §. 829. Ἐὰν κύκλος περὶ διάμετρον τινὶ AB ,
 ἀπὸ κέντρῃ τῷ Γ καταγεγραμμένος, πρὸς τῷ Λ
 ἀπληται εὐθεῖα πέρασ ἐκ ἔχουσα, ληφθέντος δὲ ἐπὶ
 τῆς τῷ κύκλος περιφερείας τῷ τυχόντος σημείῃ Δ
 ἀχθῆ ἢ $\Gamma\Delta$, καὶ προαχθῆ, εἰς ὃ ἂν τινὶ ἀπτομένῳ
 τῆμοι κατὰ τὸ E , εἰρήσεται ἢ AE Ἐφαπτομένη
 παντὸς τόξου AD , ἀπὸ μὲν τῷ Λ ἀρχομένης, ἐπὶ
 δὲ τῆς GE περατωμένης ἢ καὶ τῆς γωνίας ἐφαπτομένη
 ἐν τῷ αὐτῷ τόξῳ καταμετρεῖ, τῆς ὑπὸ AGD . Ἡ
 δὲ GE , ἢ ἀπὸ τῷ κέντρῃ ἐπὶ τινὶ EL εὐθεῖαν δια-
 τείνουσα, ἢ τῆς ὑπὸ AGD γωνίας, καὶ δὴ καὶ τῷ
 AD τόξῳ, Τέμνουσα ἐστὶ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 830. Ἡ αὐτὴ ΑΕ ἀναρίθμων ὑπάρχει ἐφαπτομένη τόξων, ὧν ελάχισον τὸ ΑΔ, τὸ καταμετρῆν τὴν ὑπὸ ΑΓΔ. Οὐκ ἀσωτελές δὲ τὸ καὶ τέτοις τὸν νῦν εἰ γίνε ἐπισῆσαι, καὶ μὴδεμίαν ἡμῖν πρὸς τὸ παρὸν, τὰ ὑπερβάλλοντα τὴν ἡμιπεριφέρειαν τόξα, τὴν χεῖσιν παρέχοιτο.

§. 831. Πρὶν ἢ τὸ τῆς διαμέτρου πέρασ Δ, ἢ τῆς περιαγωγῆς ἢ περιφέρειας καταγράφεται, ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ἀρχῆς ἀπαναχωρήσει, ἢ ἐφαπτομένη μηδὲν ἐσίν. Ἀπὸ τῆς ἀρχῆς δέτι μικρὸν, καὶ βραχὺ ἢ ἴσον ὅσον τόξον καταγράψαν, αἶμα καὶ ἢ ἐφαπτομένη τῆς τηλικῆς τόξε προάγεται, βραχέα μᾶτοι τὴν ἀρχὴν ὡς εἶκος, καὶ τοσαῦτα ἢ ἴσον τῆς τόξε ἔχουσα διαστέλλεται, ὅσα αὐτὸ ἔλαττον ἐσίν. Περαιτέρω δὲ τῆς περιαγωγῆς τῆς Δ προβαίνοντος, συναύξει δὴ τῷ τόξῳ καὶ ἢ ἐφαπτομένη, καὶ πρὸς τόξον τὸ ΑΔ, ὃ εἰ ἢ = 45°, ἢτοι πρὸς ἡμίσειαν ὀρθῆς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΓΔ, ἴση τῆς ἀκτίνι ΑΓ καθίσταται. Τὸ δ' εἰ ἀπαντεῦθον τῆς Δ πρὸς τὸ Ζ χωρῆντος, γίνεται ἢ ἐφαπτομένη τῆς ἀκτίνος μείζων, καὶ σφόδρα ἐπαύξει, ἐξ ἢ καὶ μέγεθος τέως προσλαμβάνει (αἰετι μείζων καὶ μείζων) παντὶ τῷ δοθέντι συνεξισόμενον. Τελουταῖον δὲ τῆς Δ σωιόντος τῷ Ζ, ἢ ἐφαπτομένη εἰσαμῆ περατέται· ἢ γὰρ ἢ ΓΔ, σωιζήσασα ἢδη τῆς ΖΓ, τῆς ἐπὶ τῆς ΑΒ διαμέτρου καθέτω, ἀπαντησασα διωθήσεται τῆς εὐθείας ΑΕ, τῆς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καὶ ταύτη διαμέτρου πρὸς ὀρθῆς ἐφεσῶση, ὅποσον εἰν ἑκατέρω καὶ προαχθεῖν. Ἔσιν ἄρα τῆς τεταρτημορίας, ἢτοι τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ ἐφαπτομένη ἀπειρομεγέθους, ὅτι εἰδὲν ἐσὶ τῷ ὄντι σημεῖον Ε, ὃ εἰν αὐτὴν περατώσειν· εἰδ' εἰν δοθεῖν ποτέτι μέγεθος, ἢπερ εἰν ἢ τῆς τεταρτημορίας, ἢ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ ἐφαπτομένη, μὴ μείζων γίνετο.

§. 832. Αὐται δὲ δὴ αἱ ἐφαπτόμεναι, ὧν τὰ τόξα τεταρτημορίαι ἐλάσσονα, πᾶσαι τῆς διαμέτρου ὑπερθεῖν πίπτουσιν, εὐθεῖοι, κατὰ τὰ ληφθέντα, καὶ θητικά τακτέαι εἰσὶ· προσδύοντος δὲ τῆ κατὰ τὸ τόξον πέρατος ἀπὸ τῆ Ζ ἐπὶ τὸ Β, ἢ τέμνεσα, ἢτοι ἢ ἀκτὶς ἢ προεκβληθεῖσα, τῇ εὐθείᾳ ΕΛ τῇ τῆ κύκλου κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη, αὐθις ἀπαντᾷ, ἀλλ' ἐνερθε τῆς διαμέτρου ΑΒ. Περαιτέδω γὰρ δὴ τὸ τόξον κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐφαπτομένη ἔσαι ἢ ΑΛ, μεγέθει μὲν πεπερασμένη, διωάμει δὲ ἀποφατική· ὁ, καὶ ἐπὶ ἑτινοσῶν σημείαι, τῶν ἐπὶ τῆ ΖΒ τεταρτημορίαι, τὸ τόξον ἐκπερατῶντος, κρατήσαι. Ἀλλὰ γὰρ εἴαν τὸ τόξον, μικρὸν ὅσον τῆ τεταρτημορίαι ἐπέκεινα γίνηται· τετέσαι εἴαν μὴ πάνυτι τὸ Θ τῆ Ζ ἀποχωρήσει, μεγάλητις ἢ ἐφαπτομένη ἔσαι, καὶ ὑποφθινεῖγε τῆ τόξαι αὐζοντος, ὡσε, εὐ ὡ εἴαν εἰς μέγεθος δυοῖν τεταρτημορίαιων τέτο ἐφίκοιτο, τῆ Θ τῶ Β συμπίπτοντος, καὶ αὐτῶ αὐθις ὅλως ἀφανίζεσθαι.

§. 833. Ἐάν γένηται $Z\Theta = Z\Delta$ τετέσαι, εἴαν δύο τόξαι ληφθῆ $\Lambda\Delta$, καὶ $\Lambda\Theta$, ὧν θάτερον τὸ $\Lambda\Delta$, τοσάτω τῆ τεταρτημορίαι ἐλλείπον ἢ, ὅσω θάτερον αὐτῆ ὑπερέχει, γίνεσαι καὶ $B\Theta = \Lambda\Delta$, καὶ τεῦθαι καὶ $\Lambda K = \Lambda\Delta$, καὶ ἔσαι ἄρα ἢ ὑπὸ $\Lambda\Gamma\Lambda = \Lambda\Gamma E$, καὶ ἐπομένως $\Lambda\Lambda = \Lambda E$ τετέσαι αἱ ἐφαπτόμεναι δυοῖν τόξων, ἄπερ ἄμα τῶ ἡμιπεριφέρειαι ἀναπληροῖ, ἢ δυοῖν γωνιῶν, ὧν ἢ ἑτέρα τῆς ἑτέρας ἀναπλήρωμα εἰσὶν εἰς δύο ὀρθαῖς, ἀπολύτως ληφθεῖσαι, ἐξισωθήσονται. Διοίσαι δὲ, ἢπερ, τῆς τῆ ἐλάσσονος ἢ κατὰ τεταρτημορίαιον τόξαι θητικῶς νοσημένης, ἢ τῆ μείζονος μὲν ἢ κατὰ τεταρτημορίαιον, ἐλάσσονος δὲ ἢ κατὰ δύο, ἀποφατική ἔσαι· τῶ δ' αὐτῶ τέτω τεκμηρίαι καὶ ἢ ὀξείαι γωνία τῆς ἀμβλείαις διακριθήσεται.

§. 834. Εἰ δὲ δόξαι καὶ τὰ τῆς ἡμιπεριφερείας μείζονα διασκέψασθαι τόξα, τῶ σημεῖον ἐπὶ τὸ τρίτον τῶν τεταρτημορίων ΒΗ, κατὰ μικρὸν ἀπὸ τῶ Β ἐπὶ τὸ Η προσαγομένη, εὐδήλον ὡς αἰ ἐφαπτόμενα, αἰ τοῖς μὴ τὰ τρία τεταρτημόρια ὑπερβάλλουσι τόξοις ἀνήκοντα, τῇ αὐτῇ προόδῳ προσαύξουσι, καθάπερ καὶ αἰ ἐπὶ τῶ πρώτῳ τῶν τεταρτημορίων, καὶ εἰσὶν αἰ πᾶσαι θητικά ὡσαύτως· οἷον εἰάν γνήθται $ΒΙ = ΑΔ$, ἡ ἐφαπτομένη τῶ τόξῳ ΑΖΒΙ, ὅλως ἡ αὐτῇ εἶναι τῇ ἐφαπτομένη τῶ τόξῳ ΑΔ. Ἡ δὲ τῶ ΑΖΒΗ τόξῳ τῶ τοῖς τρισὶ τεταρτημορίοις ἐξισουμένη ἐφαπτομένη, ἔδόντι ἢ τὸν ἀπειρομεγέθους εἶναι, ἢ ἡ τῶ τεταρτημορίῳ ΑΖ. Ὑπὲρ δὲ τὸ σήριγμα τὸ κατὰ τὸ Η, εἰάν τὸ ἐπὶ τῶ τόξῳ ἔχοντον ἀπὸ τῶ Η ἐπὶ τὸ Α προβαῖνον γνήθται ἐν τῶ τετάρτῳ τῶν τεταρτημορίων ΗΑ, αἰ ἐφαπτόμενα αὐθὶς ἀποφατικά εἶσονται, καὶ ὑποφθίνουσι τῇ αὐτῇ προόδῳ, ἢ ὑποφθίνουσαι ἐτύγχανον καὶ αἰ τῶν τόξων, τῶν ἐν τῶ δευτέρῳ τεταρτημορίῳ ΖΒ περατευμένων, ἄχρις ἔ καὶ τῶδε δὴ τῶ τεταρτημορίῳ πληρωθέντος, ἐν σημείῳ τέως ἡ ἐφαπτομένη συσταλεῖ, εἴθαι ἡ τῶν τετάρτων τεταρτημορίων, παραπλησίως τῇ τῶν δυοῖν ἐφαπτομένη, ἀπολήγει εἰς τὸ μηδέν.

§. 835. Τὰ δ' ἀνήκοντα ταῖς τεμνέσαις ἐντεῦθεν ῥᾶστα ἐπισυνάγεται. Αὐξουσι γὰρ τῶν ἐφαπτομένων αὐξουσῶν, καὶ μειουμένων μειῶνται· καὶ συμπροβαῖνουσι προβαίνουσαι ἐπὶ τὸ ἀπειρον· τῆς γεμῶν ἐφαπτομένης εἰς τὸ μηδέν ἀποληγέσης, ἡ τέμνεσαι ἴση τῇ ἀκτίνι καθίσταται, ἢς ἐλάσσων εἶναι ἔπτε διώαται, ἔδὲ φύσιν ἔχει, ἄτε δὴ πλάρῳ τῶ ἑρθογωνίῳ περιγώνῳ ἢ μεγίστη τυγχάνουσα, ἔ αἰ λοιπαὶ πλάρῳ ἢ ἀκτίνι, καὶ ἡ ἐφαπτομένη.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 836. Ἐάν εὐθεῖα πέρας μὴ ἔχουσα ἢ ΜΝ κύκλῳ ἐφάπτηται κατὰ τὸ Ζ, τὸ τῶ τεταρτημορίῳ

Α α 3

Α Ζ

ΑΖ πέρασ ὄν τὸ ἔχατον, ἢ δὲ, ἐκ τῆ ἀκολούθῃ ἐπι-
 τλῶ ἐφαπτομῆν ΕΛ κἀθετος, τὸ ἐπ' αὐτῆσ μέρος
 ΖΜ τὸ μεταξὺ τῆ σημείσ Ζ, καὶ τῆσ ἀκτίνσ ΓΔ
 ἀπολαμβάνομενον προαχθείτῃσ, λέγεται **Συνε-**
Φαπτομένη τῆ τόξῃ ΑΔ, καὶ τῆσ γωνίασ ὑπὸ
 ΑΓΔ· ἔ μόνον δὲ, ἀλλὰ καὶ ἔτινοσῶν ἑτέρῃσ τόξῃσ,
 τῆ κατὰ τὸ Α μὲν ἀρχομῆσ, ὑπὸ δὲ τῆσ ΓΔ τε-
 μνῆσ πειρατῆμῆσ, καὶ δὴ, καὶ τῆσ ὑπὸ τῆ τηλι-
 κῆτῃ τόξῃ καταμετρημῆσ γωνίασ. Ἡ δὲ ΓΜ
 εὐθεία, ἢ ἀπολαμβάνομῆ μεταξὺ τῆ κέντῃσ,
 καὶ εὐθείασ τῆσ ΜΝ, τῆ αὐτῆ τόξῃ, ἢ τῆσ γωνίασ
Συνδιατέμνεσ καλεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 837. Καὶν ἐκ τῆ χήματοσ δῆλον τλῶ σι-
 φαπτομῆν τῆ τόξῃ ΑΔ, ἢτισ ἐσὶ ΖΜ, ἐφαπτομέ-
 νῃ αἶμα τῆ ΖΔ τόξῃ εἶναι τλῶ αὐτλῶ. Καὶ τοίνῃ τῆ
 τόξῃ τῆδε ΖΔ, πρὸσ ἐκεῖνο τὸ ΑΔ εἰσ τεταρτημό-
 ριον ὄντεσ παραπληρώματοσ, ἢ τῆ τόξῃ σι-
 φαπτομῆ τῆ τεταρτημορίσ ἐλάσσονοσ, ἢ αὐτῆ αἶμα ἐφαπτο-
 μῆ ἔσαι, τῆ εἰσ τεταρτημόριον ἐκεῖνεσ παραπληρώ-
 ματοσ. Καὶ ἢ τῆσ γωνίασ σι-
 φαπτομῆ τῆ παραπληρώματοσ τῆσ αὐτῆσ. Ἡ ἐφαπτο-
 μῆ τῆσ γωνίασ 30°, σι-
 φαπτομῆ τῆσ 60°, ἢσ
 ἐκεῖνη τὸ παραπλήρωμα.

§. 838. Ὁ δέτοι. τρόποσ ὄν αἶ σι-
 φαπτομῆ αὐξοσίτε καὶ φθίνεσι, τῆ τόξῃ ἀπὸ τῆ μηδενὸσ
 ἐξῆσ προσίοντεσ, ἐκ τῶν εἰρημῶν ῥῆσῃσ κατανοεῖται.
 Ἐὰν τὸ τόξον ΑΔ ἀμέγεθεσ ἢ, ἢ σι-
 φαπτομῆ ἔσαι ἀπειρομεγέθεσ. Συμπίπτει γὰρ τλῶκαὺτα ἢ
 τμνῆσ τῆ ΓΑ, ἢτισ προεκβληθεῖσῃσ προεκβλη-
 θεῖσῃ τῆ ΖΜ ἔδαμῆ ἀπαντήσῃ, ὡσε τεμῆν. Τῆ
 δὲ ἐπὶ τῆ τόξῃ πέρατοσ Δ ἀπὸ τῆσ ἀρχῆσ Α ἀφί-
 σαμῆσ, κατὰ λόγον τῆσ πρὸσ τὸ Ζ ἐγγύτητοσ,
 ἐλάσσων ἢ ΖΜ σι-
 φαπτομῆ καθίσαται· τῆ δὲ
 ἀκτῆ-

ἀκτίνι ἐξισῶται τῷ Δ σημεῖοις τὸ μεσαιῶτα τῷ τεταρτημορίῳ ἐπέχοντος, καὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ ἡμισείας ὀρθῆς γινομένης. Ἐντεῦθεν δὲ ἐφεξῆς τῷ τόξῳ προσαύζοντος, ἡ σωεφαπτομένη ὑπομειῶται, ἕως ἂν τέλος ἐκλίποι, τῷ μὲν τόξῳ τεταρτημορικῷ γεγονότος, τῆς δὲ γωνίας ὀρθῆς. Ἐὰν ἔν τὸ ἀπὸ τῷδε, ἐπὶ τὸ μείζον ἐπιπροΐη τὸ τόξον, σωεφαπτομένητις αὐτῆς ἀνακύψει, ἐπὶ θάτερα τῆς ΖΗ πίπτουσα διαμέτρῳ, τῶν πρὸς αὐτῇ τῶν τεταρτημορίῳ ἐλασσόνων τόξων σωεφαπτόμεναί πίπτουσι, τὰ ἀντίθετα. Εἰσὶ δὲ αὐτῶν αἱ σωεφαπτόμεναί τῶν τόξων, τῶν μείζονων μὲν τεταρτημορίῳ, ἐλασσόνων δὲ ἡμιπεριφερείας ἀποφατικῆς ῥητέας, ἢ αἱ τῶν ἐλασσόνων τεταρτημορίῳ τεθῶσιν εἶναι θετικῆς. Αὐξῆς γὰρ ἡ ἀποφατικῆς αὕτη σωεφαπτομένη διωκῶς, τῷ κατὰ τὸ τόξον πέρατος διὰ τῷ ΖΒ τεταρτημορίῳ, ἀπὸ τῷ Ζ ἐπὶ τὸ Β ἀπιόντος. Ἐὰν ἔν τὸ τόξον ΖΘ, ἴσον ληφθῆ τῷ ΖΔ, ἔσται δὲ καὶ ἡ ἐκεῖνη σωεφαπτομένη ΖΝ, τῇ τέττα ΖΜ ἴση· ὡς τὰς σωεφαπτομένας δυεῖν τόξων ΑΔ, ΑΘ, ὧν ἐκεῖνο τοσῶδε τῷ τεταρτημορίῳ ἐλλείπει, ὅσῳ τῷτο ὑπερέχει, μηδαμῶς μεγέθει ἀλλήλων ἀντιδιατέλλεσθαι, μόνοις δὲ τοῖς σημείοις, οἷς τὰ κατὰ θέσιν τῶν καὶ ἀποφασιν διακρίνεται· τὰ δέτοι τόξα $ΑΔ = ΑΖ - ΖΔ$, καὶ $ΑΘ = ΑΖ + ΖΘ$, ἅμα ληφθέντα, παρέχεται τὸ ἄθροισμα $ΑΔ + ΑΘ = 2ΑΖ$, τὸ δυεῖν τεταρτημορίοις σωεξισόμενον. Ἐνθεντοὶ καὶ αἱ γωνία, αἷς αἱ αὐτῆς σωεφαπτόμεναί προσανήκουσιν, ἀθροισθῆσαι, τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν ἀποδώσασιν. Ἐν γίνεσι δὲ καὶ τῷδε τῷ τεταρτημορίῳ ἢ τῷ ΖΘ τόξῳ, ἢ τῆς ὑπὸ ΖΓΘ γωνίας ἐφαπτομένη, τῆς ἀντὶ παραπληρώματος ἔσης τῇ ὑπὸ ΑΓΘ, ἢ αὐτῇ καὶ τῷ τόξῳ ΑΖΘ, ἢ τῆς ὑπὸ ΑΓΘ γωνίας σωεφαπτομένη ἔσιν.

§. 839. Ἐν ᾧ δ' ἂν τὸ τῷ τόξῳ πέρατος, τῷ Β σφίγγματι, ὅτι ἐγγίσα γένοιτο, ἡ σωεφαπτομένη

καθ' ὑπερβολὴν μεγαθυύεται, ἐν δὲ τόξῳ τῷ δυσὶ
 τεταρτημορίοις ἴσῳ, ἀπειρομεγέθους καθίσταται· εἴτ'
 ἔν, πάντες ὅπερ ἂν δοθῆν, μεγέθους μείζων· τῆ
 δὲ σφίγγματος Β ἐπέκεινα, εἰάν τὸ τόξον ἐπὶ τὸ μεί-
 ζον προβαίνει, προεληλυθότος τῆ κατ' αὐτὸ πέρα-
 τος, ἐπὶ τῆ τρίτῃ τῶν τεταρτημορίων ΒΗ, ἡ σωε-
 φαπτομένη αὐθις ὄροντε λαμβάνει καὶ θέσιν, καὶ
 τὸν αὐτὸν τρίτον ὑποκειμένη πρόεισιν, ὃν ἐν τῷ
 πρώτῳ ὑπεμείετο τεταρτημορίῳ τῷ ΑΖ· οἷον εἰάν
 ληφθῆ $ΒΙ = ΑΔ$, ἡ σωεφαπτομένη τῆ τόξου
 ΑΖΒΙ, ἡ αὐτὴ ὅλως γίνεται τῆ ΖΜ, τῆ τόξου ΑΔ.
 Ἄλλὰ τῆ ΑΖΒΗ τόξου, τῆ τρισὶ τεταρτημορίοις
 ἐξισμένης, σωεφαπτομένη ἕδεμία ἐστίν· Ἐάν δὲ
 τῶδε τῷ τόξῳ, τόξον ἕτερον προσεπιγυγνήται τὸ τυ-
 χόν ΗΚ, ἀνακύψει αὐθις σωεφαπτομένη ἡ ΖΝ
 ἀποφατική, ἡ δὴ, τῆ ΗΚ τόξου ἐν τῷ τετάρτῳ τέ-
 τῳ τεταρτημορίῳ διωκεῖως αὐξόντος, αὐξει, ὡσπερ
 ἔν καὶ αἱ σωεφαπτόμεναι τῶν τόξων ἠυζανον τῶν
 ἐπὶ τῆ δεύτερῃ τεταρτημορίῃ περατθμένων· τελευ-
 ταῖον δὲ καὶ τῆ κατὰ τὸ τόξον τέρατος τῆ ἀρχῆ
 τῆ αὐτῆ Α συμπύπτοντες, ἀπειρομεγέθους αὐθις
 καθίσταται.

Τὰ δὲ περὶ τῆς σιωδιατεμνύσης, ἢτοι τῆς τεμ-
 νύσης τῆ παραπληρώματος τῆ δοθέντος τόξου, ἡ
 τῆς γωνίας, ῥηθιῶσι διωάμενα, τοῖς εἰρημένοις ὄν-
 τα παραπλήσια, εὐχερῶς ἕκαστος σωόψεται, καὶ
 μάλιστὰ τοῖς αἱ (§. 835.) παρατηρηθεῖσι τὸν νῦν
 ἐπισήσας.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΕΝΙΚΟΝ.

§. 840. Ἄπαντα καθόλα τὰ ἡμίτονα, αἶτε
 ἐφαπτόμεναι, καὶ αἱ τέμνεσαι πάσαι, ἐκ τῆ αὐτῆ
 κυκλικῆς τεταρτημορίῃ ΑΖ ληφθιῶσι ἔχουσιν· Ἐάν
 γὰρ τόξον πηλικονῆν, ἐπὶ τῶδε τῆ τεταρτημορίῃ
 ληφθῆν, τόξου τινὸς ἕτερος τεταρτημορίῃ ἐλάσσονος,
 τὸ

τὸ παραπλήρωμα εἶναι νοηθῆ, οἷον τῷ Λ , ἔσται τὸ ἡμίτονον ἐκείνθ τῷ τόξθ, σιμημίτονον τέτθ τῷ Λ , τὸ αὐτό. Καὶ ἡ ἐκείνθ ἐφαπτομένη, τῷδε τῷ Λ σιμφαπτομένη. Καὶ ἡ ἐκείνθ τέμνεσα, τῷ αὐτῷ τέτθ Λ σιμδιατέμνεσα. Οὕτω τὸ 10 μοιρῶν ἡμίτονον, ἐσὶ μοιρῶν 80 σιμημίτονον. Καὶ τὸ ἡμίτονον 20 μοιρῶν, σιμημίτονον μοιρῶν 70, καὶ τὰ ἄλλα ἀσαύτως. Τῶν δέτοι τόξων, τῶν παρὰ τῷ Λ ἀρχομένων, καὶ ἐπὶ τὰ Z, B, H πρραγομένων, τοῖς ν ἀποσάσεσιν ἴσαις ἀπὸ τῶν σιριγμαίων Z, H , ἐκπερατεμένοις, τὰ αὐτὰ ἔλως ἡμίτονα ἐσὶ· τὰ δὲ σιμημίτονα, αἶτε ἐφαπτόμενα τέττων καὶ σιμφαπτόμενα, μεγέθει μὲν ἑδαμῶς ἀπολύτω, θέσει δὲ, ἰὼ τὰ σιμεία $+$, $-$ ἐλέγχει, διενλώχασιν. Ἄλλα καὶ τῶν τόξων τῶν ἀπ' ἀρχῆς τῆς αὐτῆς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐκτρέχόντων, τοῖς ἐπίσης ἀφεσῶσιν ἀφ' ἑκατέρθ τῶν σιριγμαίων A, B , τὰ αὐτὰ μὲν ἔλως σιμημίτονα ἐσὶ, τὰ δὲ ἡμίτονα, αἶτε ἐφαπτόμενα, καὶ αἶ σιμφαπτόμενα, μεγέθει μὲν ἀπολύτω κἀνταῦθα ἴσαι, ἐπὶ δὲ τὰ ἀντίθετα τῆς διαμέτρου AB πίπτεσα, εἰσὶ κ ἀντιθέτοις σιμείοις διαγνωριζόμενα.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 841. Σιτωμίαςτε χάριν καὶ σαθιωείας, ἡ μὲν γωνία, ἡ τὸ τόξον δι' οἷος, ἡ πλειόνων γραμμαίων A, B σιμείθθ, τὸ δὲ τῆς μὲν εἰς ὀρθίω, τῷ δὲ εἰς τεταρτημέριον παραπλήρωμα, τὸ καθ' ὑπεροχίω, ἡ κατ' ἔλλειψιν, διὰ τῷ π ἐκείνοις πρραεπιχαρασομένης δηλέθθ, ἔτω $\pi A, \eta \pi B$. Καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον διὰ τῷ $H\mu$. δικτυπέθθ, τὸ δὲ σιμημίτονον διὰ τῷ $\Sigma\upsilon\eta\mu$. ἡτε ἐφαπτομένη διὰ τῷ $E\phi$. καὶ ἡ σιμφαπτομένη διὰ τῷ $\Sigma\upsilon\eta\phi$. ἀ τοῖς δηλωτικοῖς τῶν γωνιῶν, ἡ τῶν τόξων, ἡ τῶν παραπλήρωμαίων αὐτῶν γράμμασι δέον πρραεπιγράθειν, $\Lambda\alpha 5$ τόνδε

τόνδε τὸν τρόπον Ἡμι. Α, Συνημ. Α, Ἐφ. Β, Ἡμ. πΒ, Ἐφ. πΒ. Ὅθεν ἔπεται ὅτι, Ἡμ. πΑ, ταῦτό σημαίνει τῷ Συνημ. Α, (§. 825.). Καὶ Ἐφ. πΑ, ταῦτό τῷ Συνεφ. Α, (§. 837.) Καὶ τῆς ἀκτῖνος δὲ, ἢ τοι τῆς ἡμιδιαμέτρου σύμβολον ἔσαι τὸ ακ, ἢ Ακ. Διὰ δὲ τῆς Γ σημαθήσεται τὸ τεταρτηνέριον, τὸ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου ακ, ἢ Ακ, καταγεγραμμένον. Ταῖς μύτοι τεμνύσαις, καὶ τοῖς παρημίτοις ἀταῦθα ἔ προσχρησόμεθα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 842. Τῶν αὐτῶν γωνιῶν, τὰ ἡμίτονα, καὶ τὰ συνημίτονα, καὶ τὰ παρημίτονα, αἴτε ἐφαπτόμενα, καὶ αἴ συνεφαπτόμενα, αἴτε τέμνεσαι ἢ αἴ συνδιατέμνεσαι, εἰάν πρὸς διαφορὰς ἀναφέρωνται ἀκτίνας, ἔσονται ὡς αἴ ἀκτῖνες.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 167. Τῆς δοθείσης γωνίας Γ, ἐν ἀκτίσιν ΑΓ = ΒΓ, καὶ αΓ = βΓ, κείθω μέτρα καταγεγραμμένα τὰ ΑΒ, αβ. Ἡμίτονα δὲ, πρὸς τὰς τεθείσας ἀκτῖνας τὴν ἀναφορὰν ἔχοντα, τὰ ΒΔ, βδ. Συνημίτονα δὲ, τὰ ΔΓ, δΓ. Παρημίτονα δὲ, τὰ ΑΔ, αδ. Ἐφαπτόμενα δὲ ΕΑ, εα. Τέμνεσαι δὲ ΕΓ, εΓ. Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ εὐθεῖαι ΕΑ, ΒΔ, εα, βδ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΓ κείθονται ἔσαι, παράλληλοι πάνσαι εἰσὶν, ἔσαι ΒΓ : βΓ = ΒΔ : βδ = ΔΓ : δΓ. Ἄλλὰ καὶ ΒΓ : βΓ = ΑΓ : αΓ. Ἄρα καὶ ΒΓ : βΓ = ΑΓ - ΔΓ : αΓ - δΓ = ΑΔ : αδ. Καὶ παρὰ ταῦτα ΑΓ : αΓ = ΑΕ : αε = ΕΓ : εΓ. Περὶ δὲ τῶν συνεφαπτομένων καὶ συνδιατέμνεσων, ταῦτό δῆλον ἀτεῦθα, ὅτι ἐφαπτόμενα αἱ αὐτὰ εἰσὶ καὶ τέμνεσαι τῆς παραπληρώματος τῆς αὐτῆς γωνίας, Γ, τῆς δεδομένης.