ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 778. Ὅτι δὲ ὁ κύκλος ἴσος ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τοῦ κύκλου ἡμιπεριφέρεια, ὕψος δὲ ἡ τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἡμιδιάμετρος (§. 469.), ἔςαι ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον (§. 473.), ἢ ὡς ἡ ὅλη περιφέρεια πρὸς τὴν ὅλην διάμετρον· τοιγαροῦν καὶ ὁ εὑρεθεὶς λόγος 3, 141592 : 1, τῷ λόγῳ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ὅτι ἐγγυτάτω ἐςίν. Ἐγγυτέρω δ᾽ ἔτι τῷ λόγῳ ἐκείνῳ γενήσεται ὅδε : 3, 14159265358979323846 : 1. Καὶ δύνανται δὲ ἔτι καὶ τούτου λόγοι ἀκριβέςεροι εὑρεθῆναι, τοῦ διαπλώματος ἐφ᾽ ἡλικιοῦν βραχύτητα καταςελλομένου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 779. Τὰ μέτρα, ἃ κατὰ τοὺς κύκλους, καὶ τὰς τῶν κυλίνδρων ἐπιφανείας, καὶ τῶν κώνων τῶν ὀρθῶν, καὶ δὴ καὶ τὰς τῶν σφαιρῶν, ἐκ τοῦ λόγου τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου πρὸς τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν ἐξήπλαι, ἀποδιδόναι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 780. Ἔςω λόγος τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὃν ἀπεδώκαμεν, ἢ ἄλλος ὅσον ἄλις τῷ ἀληθεῖ προσπελάζων, d : p. διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου δοθεῖσα ἡ δ, καὶ ἔςαι τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, $= \frac{p}{d} \cdot \delta$, (§. 431.).

§. 781. Ἐντεῦθεν τοι καὶ μέρος τῆς περιφερείας πηλικονοῦν δι᾽ ἀριθμῶν δηλωθήσεται, οὗ ὁ λόγος πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν δεδομένος ἂν εἴη. Ἔςω γὰρ ὁ λόγος ὅδε τοῦ τόξου πρὸς τὴν περιφέρειαν 1 : A,

τοῦ

τȣ̃ A, ἀριθμὸν ἐνταῦθα δηλȣ̃ντος ὁποσονȣ̃ν, εἴθ' ὁλοχερῆ, εἴτε καὶ κλασματίαν. Ἔςαι δὲ ἄρα τὸ τόξον $= \frac{p}{Ad} \cdot \delta$.

§. 782. Δοθείσης δὲ τῆς περιφερείας κύκλȣ παντὸς $= \pi$, ἔςαι τȣ̃ αὐτȣ̃ κύκλȣ διάμετρος $= \frac{d}{p} \cdot \pi$.

§. 783. Ἀλλ' ὁ κύκλος αὐτὸς διὰ τῆς δοθείσης διαμέτρȣ ὑποσυναφθήσεται τῷδε τῷ τύπῳ $\frac{p}{d} \cdot \delta \times \frac{\delta}{4} = \frac{p\delta\delta}{4d}$ (§. 469.) ὃς τȣ̃ τὸν κύκλον ἐκ τῆς διαμέτρȣ αὐτȣ̃ ὑπολογίζεσθαι διαφόρȣς μεθόδȣς περιενήνοχεν.

§. 784. Τῆς δὲ δὴ περιφερείας δοθείσης, αὐτὸς ὁ κύκλος ἐξευρεθήσεται, πολλαπλασιαζομένης τῆς περιφερείας π, διὰ τȣ̃ τεταρτημορίȣ τῆς διαμέτρȣ, τῆς ἐξ ἐκείνης ἐπαχθείσης $\frac{d}{4p} \cdot \pi$· τὸ γὰρ παραγόμενον $\frac{d}{4p} \cdot \pi\pi$, ἀποδώσει τὸν κύκλον.

§. 785. Ὁ δέτοι τομεὺς, ȣ̃ τὸ τόξον ἐςὶ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ὡς $1 : A$, καὶ ȣ̃τινος καὶ ἡ ἀκτὶς δεδομένη ἐςὶν $\alpha = \frac{1}{2}\delta$, ἔςαι $\frac{p}{Ad} \cdot \frac{\delta\delta}{4} = \frac{p}{Ad} \cdot \alpha\alpha$· ὅτι $\frac{\delta\delta}{4} = \alpha\alpha$.

§. 786. Ἐὰν ᾖ τὸ τȣ̃ κύκλȣ μέγεθος διδόμενον διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ ε, ἔςι $\frac{p}{4d} \cdot \delta\delta = \varepsilon$ (§. 782.),

 ὅθεν

αὔθεντοι $\delta\delta = \frac{4de}{p}$. Εὑρίσκεται δὲ τὸ δ, τῆς ἐκ $\frac{4de}{p}$ τετραγωνικῆς ῥίζης ὑπεξενεχθείσης, $\delta = \sqrt{\frac{4de}{p}}$.

§. 787. Ἐὰν ᾖ δ τοῦ κυλίνδρου διάμετρος, καὶ υ ὕψος αὐτοῦ, ἔσται ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια $= \frac{p}{d} \cdot \delta\upsilon$. (§. 585.).

§. 788. Ἐὰν δὲ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ἀμέσως δοθῇ, ᾖ δὲ $= \pi$, ἔσται ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια $= \pi\upsilon$.

§. 789. Τοῦ δὲ ὀρθοῦ κώνου, ἐὰν ᾖ δ μὲν ἡ τῆς βάσεως διάμετρος, λ δὲ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ, ἔσται ἡ ἐπιφάνεια, $= \frac{p}{2d} \cdot \delta\lambda$ (§. 587.).

§. 790. Ἀλλ' ἐὰν ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ἀμέσως ᾖ δεδομένη π, ἔσται ἡ ἐπιφάνεια $\frac{\pi\lambda}{2}$.

§. 791. Ἐν γένει δὲ, ἐὰν τοῦ ὀρθοῦ κώνου, εἴτε ὁλόκληρος οὗτος εἴη, εἴτε δὴ καὶ κόλοβος, ἡ πλευρὰ λ δίχα τμηθῇ, διὰ δὲ τοῦ σημείου τῆς τομῆς, ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας περιφέρεια νοῆται καταγεγραμμένη, ἧς τὸ ἐπίπεδον τῇ βάσει τοῦ κώνου παράλληλον ᾖ, τεθῇ δὲ τῆσδε τῆς περιφερείας εἶναι διάμετρος ἡ δ. Ἔσται ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια $= \frac{p}{d} \cdot \delta\lambda$. (§. 588.).

§. 792. Ἐντεῦθεν τὰ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν μέρη τὰ ἐν δυσὶ πλευραῖς ἐναπολαμβανόμενα, καὶ τὰ τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, τὰ ἐν δυσὶν ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἀναγεγραμμέναις εὐθείαις, παραλλήλοις τῷ ἄξονι, ῥᾷστα εὑρεθήσεται, τοῦ τῶν τόξων

τόξων οἷς περατοῦνται λόγου δοθέντος, πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν.

§. 793. Τῆς δὲ σφαίρας ἧς ἡ διάμετρος δ, ἡ ἐπιφάνεια ἔσται $\frac{p}{d} \cdot \delta\delta$ (§. 594.).

§. 794. Ἐὰν δὲ τῆς σφαίρας τμῆμα ἀποτμηθῇ, οὗ τὸ ὕψος ᾖ υ, ὑποσημαίνοντος κἀνταῦθα τοῦ δ τὴν τῆς σφαίρας διάμετρον, ἔσται ἡ κυρτὴ τοῦ τμήματος ἐπιφάνεια $= \frac{p}{d} \cdot \delta\upsilon$. Ὁ δ' αὐτὸς τύπος καὶ μέρος παρίστησι σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ μεταξὺ δυοῖν κύκλων παραλλήλων ἐναπειλημμένον, ὧν τὰ κέντρα διέχει διαστήματι τῷ υ (§. 593.).

§. 795. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ τὰ μέρη τῶνδε τῶν ἐπιφανειῶν, ὧν ὁ πρὸς τὴν ὁλοσχερῆ ἐπιφάνειαν δίδοται λόγος, οὐ χαλεπῶς δι' ὑπολογισμοῦ θηράσιμα γίνεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 796. Ἅπαν στερεὸν, ὅπερ ἂν ἐκ τοῦ Σχ. 164.
γένους εἴη τῶν ὑπὸ σκέψιν τῇ Γεωμετρίᾳ γεγεννημένων, καταμετρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

§. 797. Ἐπειδὴ τοῦ στερεοῦ μέτρον, ἅπαν στερεὸν ἄλλο δύναται εἶναι, ἅτε δὴ ἐκ τούτου καταμετρεῖσθαι ἔχοντος, ἐὰν ὁπωσοῦν ὁ τοῦ στερεοῦ λόγος πρὸς τὸ μέτρον ἀνακαλυφθῇ, ληφθήτω κύβος ΕΔ οὗ ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ, ἴση ᾖ γραμμικῷ τινι μέτρῳ, ὧν ἡ χρῆσις ἐν τῇ συνηθείᾳ ἐστί· τῆς οὖν πλευρᾶς ΑΒ εἰς δέκα μέρη ἀλλήλοις ἴσα διαιρεθείσης, ὧν ἂν τὸ πρῶτον εἴη ΑΕ, ἐὰν διὰ τοῦ Ζ ἐπίπεδον τεθῇ, τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ παράλληλον, ἀποτμηθήσεται ἀπὸ τοῦ κύβου, τὸ ΓΖΔ, δεκατημόριον ὑπάρχον αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ καὶ ἡ ΑΓ πλευρά, εἰς δέκα ἴσα ὡσαύτως διαιρεθῇ, ὧν ἂν τὸ πρῶτον ᾖ ΑΗ, διατμηθῇ δὲ τὸ στερεὸν ΓΖΔ κατὰ τὸ σημεῖον Η, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΔΒ, ἀποτμηθήσεται τὸ πρίσμα ΗΖΔ, ὃ δεκατημόριον ἐστὶ τοῦ ΓΖΔ, τοῦ δὲ κύβου ἑκατοστημόριον τὸ αὐτό. Τέως δὲ ἐὰν ἡ ΑΔ πλευρά, εἰς δέκα ἴσα καὶ αὐτὴ διαιρεθῇ, ὧν ἂν τὸ πρῶτον ᾖ ΑΘ, τεθῇ δὲ καὶ διὰ τοῦ Θ σημείου ἐπίπεδον, παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΓΒ, ἀποτμηθήσεται ὁ κύβος ΗΖΘ, ὃς τὸ δεκατημόριον ἐστὶ τοῦ στερεοῦ ΗΖΕ, τοῦ δὲ ΓΖΔ τὸ ἑκατοστημόριον, τοῦ δὲ κύβου ΕΔ τὸ χιλιοστημόριον τὸ αὐτό. Καὶ τοίνυν καὶ τοῦ κύβου ΗΖΘ τὸν αὐτὸν τρόπον διαμερισθέντος, καὶ τὸ ἐπ' αὐτῷ ὁμοίως δέκατον, ἑκατοστόν, χιλιοστόν, προσενεχθήσεται, ὧν τὸ μὲν τοῦ κύβου ΕΔ μυριοστόν, ἤτοι δεκάκις χιλιοστὸν ἔσται· τὸ δέ, δεκάκις μυριοστόν, ἤτοι ἑκατοντάκις χιλιοστόν· τὸ δὲ χιλιάκις χιλιοστόν. Ἀλλὰ καὶ τὸ ἔσχατον τῶνδε τῶν μορίων τελευταῖον ὡσαύτως ἔχοι ἂν διαμερισθῆναι, καὶ οὕτως ἑξῆς, ἐπέκεινα τέρματος.

§. 798. Ἔνθεν τοι ἐὰν ἐπὶ ἀριθμοῦ οὑτινοσοῦν, ἐξ ὁλοχερῶν τε, καὶ κλασμάτων δεκαδικῶν συγκειμένου, ὡς ἐπὶ τοῦ 27, 5324, οἱ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων χαρακτῆρες, τοὺς κύβους ὑποσημαίνωσι, τοὺς ἀντὶ μονάδος ληφθέντας, οἷον τὸν ΕΔ, πηλίκα δὴ τὰ μέρη, τὰ ὑπὸ τῶν μετὰ τὴν διαστολὴν ἀριθμῶν δηλούμενα συνιδεῖν εὐπετές. Ἐὰν γὰρ οἱ ἀπὸ τῆς διαστολῆς εὐθὺς ληφθῶσιν ἑπόμενοι χαρακτῆρες, οἷον 532, ὁ μὲν 5, προβαλεῖται σώματα πέντε, ἡλίκον τὸ ΓΖΔ· ὁ δὲ 3, πρίσματα τρία, ἡλίκον τὸ ΗΖΔ· ὁ δὲ 2, κύβους δύο, ἡλίκος ὁ ΗΖΘ. Διερμηνευθείη δ' ἂν ἡ δύναμις τῶνδε τῶν τριῶν χαρακτήρων 532 καὶ οὕτως, ὥστε σημαίνειν τοσούτους κύβους ΗΖΘ, ἤτοι τοσαῦτα χιλιο-

στὰ

στὰ τοῦ κύβου ΕΔ τοῦ ἀντὶ μονάδος ληφθέντος. Παραπλησίως δὲ, καὶ οἱ τρεῖς ἐφεξῆς ἑπόμενοι χαρακτῆρες, πληρουμένων ὅπη παρείκοι τῶν κενῶν τόπων τῇ παρενθέσει τῶν μηδενικῶν, ὡς ἐνταῦθα 400, δυνήσονται τοὺς κύβους ὑποδηλοῦν, ὧν ἕκαστος τὸ χιλιοστημόριον ἐστὶ τοῦ ΗΖΘ κυβίσκου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὁ δ᾽ ἔσχατος ὅδε τοῦ τῶν μορίων ὑπολογισμοῦ τρόπος, καὶ συνηθέστερος, ὡς προχειρότερος.

§. 799. Κατὰ ταῦτα γοῦν τοῦ κοίλου μέτρου τῶν στερεῶν κατασκευασθέντος, ἅπαν στερεὸν οἱουδήποτε σχήματος, τῷδε τῷ τρόπῳ καταμετρηθήσεται. Ἐντιθέσθω δὴ τὸ στερεὸν ἐν ὁποιῳδήποτε σκεύει· ἐπικεχείσθω δὲ αὐτῷ ὑγροῦ τοσοῦτον, ὡς ἅπαν ὑποβρύχιον καταδῦναι. Σημειούσθω δ᾽ ἔνθα τῆς ἐπιφανείας ἐξαίρεται τοῦ στερεοῦ τὸ ἀνώτατον. Ἐξενεχθήτω δ᾽ ἔπειτα τὸ στερεὸν τοῦ ὑγροῦ μένοντος, ἐπὶ δὲ τούτῳ, ἐξ ὑγροῦ τοῦ πρότερον ἤδη μεμετρημένου, τοσοῦτον ἐπιχυθὲν, ὡς ἐπ᾽ ἐκεῖνο τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ νάματος ἀρθῆναι, ἐφ᾽ ὃ τοῦ στερεοῦ ὑποβρυχίου τὸ πρὶν καταδύντος ἦρτο, ἔσται δὴ ἡ τοῦ στερεοῦ ἔκτασις, ἴση τῇ τοῦ ὑγροῦ ἐκτάσει, τοῦ, μετὰ τὸ ἐξενεχθῆναι αὐτὸ, τῷ προσιόντι ὑγρῷ ἐπικεχυμένου· τούτου δὲ τὸ μέτρον ἤδη δεδομένον ἐστί.

§. 800. Διὰ δὲ τῶν μέτρων εὐθειῶν τινῶν, ἃς παρὰ τοῖς στερεοῖς, ἃ δέοι καταμετρῆσαι, λαβεῖν ἐστὶ, καὶ δὴ καὶ τῶν κατὰ τὰς ἐπιφανείας μέτρων, ἅπερ ἐντεῦθεν συνάγεται, καὶ τὰ τῶν στερεῶν μέτρα ἐπαχθήσεται τὸν ἐφεξῆς τρόπον.

§. 801. Προκείσθω δὴ πρίσματος τὸ μέτρον λαβεῖν, οὗ ἡ μὲν βάσις, ἐν τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γραμμικοῦ μέτρου, δι᾽ ἀριθμοῦ παριστάνοιτο τοῦ β, τὸ δ᾽ ὕψος ἐκ τοῦ αὐτοῦ γραμμικοῦ μέτρου, υ. Ἔσται δὲ β : 1, ὡς ἡ τοῦ πρίσματος βάσις, πρὸς τὴν τοῦ κύβου τοῦ ἀντὶ μέτρου ληφθέντος· καὶ υ : 1, ὡς τὸ τοῦ πρίσματος ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ αὐτοῦ κύβου. Ἄρα

 (§. 544.)

(§. 544.) υβ : 1, ὡς τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύβον. Τοιγαροῦν καὶ πᾶν πρίσμα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ υβ ἐκδηλωθήσεται.

§. 802. Ἡ δέ τοι βάσις διὰ τῶν γραμμικῶν μέτρων, ἑνί τῳ τῶν ποικίλων ὑποσυναφθήσεται τρόπων, τῶν ἀνωτέρω ὑποτεθέντων· οὐδεμία γὰρ ἐν τούτοις λείπεται περαιτέρω δυσχέρεια. Ἐὰν ἡ βάσις κύκλος ᾖ ὁ περὶ τὴν διάμετρον δ, τὸ δὲ στερεὸν κύλινδρος, ἔσται δὴ $\beta = \frac{p}{4d} \cdot \delta\delta$. Ἔνθεν τοι ἐὰν ᾖ κἀνταῦθα ὕψος τὸ υ, ὁ κύλινδρος ἡμῖν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{p}{4d} \cdot \delta\delta\upsilon$ προκείσεται.

§. 803. Καὶ τῆς πυραμίδος δὲ, ἐὰν ἡ μὲν βάσις ᾖ β, τὸ δ' ὕψος υ, τὸ στερεὸν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\upsilon\beta}{3}$ δηλωθήσεται (§. 567.).

§. 804. Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου ἐὰν ᾖ τὸ ὕψος υ, ἡ δὲ τῆς βάσεως διάμετρος δ, ἔσται ἡ βάσις $\frac{p}{4d} \cdot \delta\delta$, κἀντεῦθεν ὁ κῶνος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{p}{4d} \cdot \delta\delta \cdot \frac{\upsilon}{3}$, ἤτοι $\frac{p\delta\delta\upsilon}{12d}$, τυπωθήσεται.

§. 805. Ἐὰν τὸ τοῦ κώνου ὕψος, τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως ἴσον ᾖ· τουτέστιν ἐὰν ᾖ $\upsilon = \delta$, ἔσται ὁ κῶνος $= \frac{p}{12d} \cdot \delta\delta\delta$. Ἐπεὶ δὲ τούτου τὸ διπλοῦν τῇ σφαίρᾳ τῇ ἀπὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου συνεξισοῦται (§. 582.). Ἔσται ἡ σφαίρα $\frac{p}{6d} \cdot \delta\delta\delta$.

§. 806.

806. Τὸ δ' ἡμισφαίριον οὗ διάμετρος ἡ αὐτή, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\frac{p}{12d} \cdot \delta\delta\delta$ ἐκκείσεται, δι' οὗ καὶ ὁ κῶνος ὁ αὐτῷ ἴσος.

§. 807. Ἐπεὶ δὲ ὁ τομεὺς ὁ κυλίνδρου, ἢ κώνου, ἢ ἡμισφαιρίου, ἢ σφαίρας, ἐστὶ πρὸς τὸ αὐτοῦ ὅλον, κατὰ λόγον 1 : Α, καὶ τοῦ τομέως τὸ μέτρον δοθήσεται, τοῦ τὸ ὅλον στερεὸν παριστῶντος ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ Α διαιρουμένου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 808. Ἐντεῦθεν καὶ ἡ τοῦ κύβου εὑρεθήσεται πλευρά, τοῦ τῷ δοθέντι στερεῷ γ, ἢ πλείοσι στερεοῖς τοῖς ἅμα συναποτελοῦσι τὸ γ, ἴσου. Ἔστω γὰρ δὴ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ α, καὶ ἔσται $\alpha\alpha\alpha = \gamma$· ὅθεν $\alpha = \sqrt[3]{\gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 809. Ἡ δέ τοι σφαῖρα, ἡ τῷ στερεῷ γ, ἢ πλείοσιν ἅμα στερεοῖς τοῖς συναποτελοῦσι τὸ γ, ἴση ἐξευρεθήσεται, ἐὰν αὐτῆς διάμετρος ὑποτεθῇ $= \delta$. Ἔσται γὰρ ἡ σφαῖρα $= \frac{p}{6d} \cdot \delta\delta\delta$· κἀντεῦθεν $\frac{p}{6d} \cdot \delta\delta\delta = \gamma$, καὶ $\delta\delta\delta = \frac{6d\gamma}{p}$, καὶ $\delta = \sqrt[3]{\frac{6d\gamma}{p}}$. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὰ παραπλησίως περὶ κυλίνδρων καὶ κώνων ζητούμενα ἐπιλυθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 810. Ἐὰν ἡ τοῦ πρίσματος βάσις, ὅπερ ἴσον τῷ στερεῷ γ, ᾖ β, ἔσται τὸ τοῦ πρίσματος

 ὕψος

ὕψος $= \frac{\gamma}{\beta}$. Καὶ τοῦ ὕψους δοθέντος τοῦ πρίσματος, τοῦ τῷ στερεῷ γ ἴσου, οἷον δὴ τοῦ υ, ἡ βάσις ἔσται $\beta = \frac{\gamma}{\upsilon}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

811. Ὁ δὲ κύλινδρος, οὗ ὕψος τὸ υ, ἐὰν ᾖ τῷ στερεῷ γ ἴσος, ἔσται $\frac{p}{4d} . \delta\delta\upsilon = \gamma$. Ἔνθεν τοι $\delta\delta = \frac{4d\gamma}{p\upsilon}$. καὶ $\delta = \sqrt{\frac{4d\gamma}{p\upsilon}}$. Καὶ περὶ τοῦ κώνου δὲ τὸ ζήτημα τῆς αὐτῆς ἐπιλύσεως τυχὸν, δώσει $\delta = \sqrt{\frac{12d\gamma}{p\upsilon}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 812. Τὴν γωνίαν καταμετρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ γωνίας μέτρον γωνία ἐστὶν ἡ ὀρθὴ, ταύτης εἰς μέρη ὁσαδηποτοῦν ἰσάλληλα διαιρεθείσης, ἡ ὑποκειμένη γωνία δι᾽ ὀρθῆς, καὶ τῶν τηλικούτων μορίων τῆς ὀρθῆς καταμετρεῖσθαι δυνήσεται. Διαιρεῖται δὲ ἡ γωνία, διαιρουμένου τοῦ κατ᾽ αὐτὴν τόξου· τουτέστι, τῆς ἐν ταῖς πλευραῖς αὐτῆς ἐναπειλημμένης περιφερείας τοῦ κύκλου, τοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὡς ἀπὸ κέντρου, ἐν ὁσῳδήποτε διαστήματι καταγραφομένου. (§. 358.).

Κοινῇ δ᾽ ἐν χρήσει ἁπανταχοῦ, ἡ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ τῆς ὀρθῆς γωνίας διαίρεσις, εἰς μέρη 90. ἐξ ὧν ἡ μὲν ἡμιπεριφέρεια 180 περιέξει, ἡ δὲ ὅλη 360.

360. τὰ δὲ τηλικαῦτα τῆς περιφερείας μόρια **Μοῖραι** καλοῦνται. Εἴωθε δὲ ἡ μοῖρα εἰς 60 **λεπτὰ πρῶτα** ὑποδιαιρεῖσθαι· καὶ τούτων ἕκαστον αὖ εἰς 60 **δεύτερα**· καὶ τὸ δεύτερον εἰς 60 **τρίτα**· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Δοθέντος δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν, καὶ τῶν λεπτῶν, καὶ τῶν δευτέρων, τῶν ἐν τῷ τόξῳ τῆς γωνίας, δοθήσεται καὶ ὁ ταύτης πρὸς τὴν ὀρθὴν λόγος, καὶ ὁ πρὸς δύο, ἢ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ ἑπομένως καὶ αὐτὴ ἡ γωνία. (§. 455.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 813. Ἀπαιτεῖ ἄρα ἡ τῆς γωνίας καταμέτρησις, τὴν τοῦ τόξου διαίρεσιν, εἰς τὰς μοίρας τὰς ἐπ' αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξηκοστημόρια. Καὶ εἰ δοθέντος τοῦ τῆς γωνίας μέτρου, ταύτην ἀποδοῦναι δέοι, τῆς αὐτῆς τοῦ τόξου διαιρέσεως χρεία. Τήν γε μὴν ἐπίπονον ἐργασίαν ταύτην παρελθεῖν δυνήσεται, ὅτῳ ἂν ἐν χερσὶ παρείη περιφέρεια, ἢ μέρος περιφερείας, ἐπὶ προσφυοῦς ὕλης καταγεγραμμένης, καὶ εἰς μοίρας, καὶ τὰ τῶν μοιρῶν μόρια κατατετμημένης, ἧς ἅμα τὸ κέντρον εἴη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου ἐπισημειωθέν. Τοῦ γὰρ κέντρου τοῦδε ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας οὕτως ἐπιτιθεμένου, ὥστε τὸ τὰς καταδιαιρέσεις φέρον τόξον, ἐντὸς τῶν τῆς γωνίας σκελῶν ἀναπολαμβάνεσθαι, αὐτίκα δή, τὰ οἷσπερ ἡ γωνία καταμετρεῖται, τοῦ τόξου μόρια καταφαίνεται ὅσα. Ὡς ἂν δὲ, οἱ κατασημειοῦντες ἀριθμοὶ τὰς μοίρας, καὶ τῶν λεπτῶν τὰ πρῶτα, καὶ τὰ δεύτερα, καὶ τὰ τρίτα, μηδαμῶς συγχέοιντο, οὕτως εἰώθασι καταγράφεσθαι $57^{\circ}, 03', 21'', 34'''$, τοῦ μὲν $^{\circ}$, τὰς μοίρας ὑποδηλοῦντος· τοῦ δὲ δὲ ′, τῶν λεπτῶν τὰ πρῶτα· τοῦ δὲ ″, τὰ δεύτερα· κ.ξ.

§. 814. Τοῦ δὲ τῆς γωνίας μέτρου δοθέντος, καὶ τὸ τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ἐλλείψεως πρὸς τὴν ὀρθὴν συγάμμα δοθήσεται. Ἡ γὰρ τοῦ τῆς γωνίας μέτρου ἀπὸ μοιρῶν 90, ἢ ἀνάπαλιν τῶν 90 μοιρῶν ἢ ἀπὸ τοῦ μέτρου ἀφαίρεσις, ἥπερ ἂν ὀξεῖα τύχοι ἡ γωνία, ἢ ἀμβλεῖα, τὴν διαφορὰν ἐλέγξει, ἣν καὶ **Παραπλήρωμα** τῆς γωνίας καλεῖν εἰώθασι.

§. 815. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ ἡ τῆς γωνίας διαφορὰ πρὸς ὀρθὰς δύο ἀποδοθήσεται, ἀντὶ 90, μοιρῶν 180 εἰλημμένων. Ἀντιδιαστέλλοντες δὲ τῆς ἀνωτέρω τήνδε τὴν διαφορὰν **Ἀναπλήρωμα** καλοῦσιν.

ΤΜΗΜΑ