ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ
ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΕΩΣ
ΤΩΝ
ΕΚΤΑΣΙΝ ΕΧΟΝΤΩΝ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 753.

Σχῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον καταμετρῆσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 153. §. 754. Ἐπειδὴ μέτρον τοῦ ἐπιπέδου σχήματος, οἱονδηποτοῦν ἄλλο σχῆμα ἐπίπεδον δύναται εἶναι, ληφθήτω τετράγωνον τὸ ΑΒ, οὗ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἓν ἀντὶ τῶν μέτρων εἴη, ὧν ἐπὶ τῇ καταμετρήσει τῶν γραμμῶν προσεκύρωσε τῇ συνηθείᾳ ἡ χρῆσις. Καὶ τῆσδε δὴ τῆς πλευρᾶς εἰς δέκα ἴσα διαμεριθείσης, ἐὰν ᾖ ἓν τῶν μορίων ἡ ΑΔ, ἔσται ΑΕ τὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒ δεκατημόριον· τόδε τοι τετράγωνον ΑΖ τοῦ δεκατημορίου δεκατημόριον· τουτέστι, τοῦ ΑΒ τετραγώνου τὸ ἑκατοστημόριον. Ἀλλὰ καὶ τῆς ΑΔ πλευρᾶς, εἰς δέκα ὡσαύτως διαμεριθείσης ἴσα, παραπλησίως καὶ τοῦ ΑΖ τετραγώνου τὸ μέρος τὸ δέκατον, καὶ τοῦ δεκάτου τὸ δέκατον, ἤτοι τὸ ἑκατοστὸν παραχθήσεται· ἔσται δὲ δὴ τὸ τοῦ ΑΖ δεκατημόριον τοῦ ΑΒ χιλιοστημόριον. Καὶ οὕτως οὖν κατὰ τὸν αὐτὸν χωροῦσι τρόπον, καὶ τὸ μυριοστὸν, ἤτοι δεκάκις χιλιοστὸν, καὶ τὸ ἑκατοντάκις, ἢ χιλιάκις χιλιοστὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒ παραχθήσονται.

755. Ἔνθεν δ' οἱ ἐν ἀριθμῷ τῷ κειμένῳ 75, 3279· ἐὰν ἡ μονὰς τὸ τετράγωνον τὸ ἀντὶ μέτρου ληφθέν, οἱ πρὸ τῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων ὑποδιαστολῆς χαρακτῆρες, τῶν τηλίκων τετραγώνων 75 ὑποδηλώσουσιν· ὁ δὲ μετὰ τὴν διαστολὴν εὐθὺς ἑπόμενος χαρακτήρ, 3 ὀρθογώνια ΑΕ δείξει, ἢ 30 τετράγωνα ΑΖ· ὁ δ' ἐφεξῆς χαρακτήρ, 2 ἔτι τῶν αὐτῶν τετραγώνων ἐπισυνάψει, ὥστε εἶναι ἄχρι τοῦδε τὰ πάντα τετράγωνα ΑΖ, τὸν ἀριθμὸν 32. Οἱ δὲ τέως μετὰ τούτους ἐγκείμενοι χαρακτῆρες, μόρια ὑποσημαίνουσι τὰ ἀπὸ τοῦ ΑΖ τετραγώνου ὡσαύτως ἀποτεμνόμενα, ὃν τρόπον καὶ τὰ ΑΕ, καὶ ΑΖ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ἀποτέτμηται.

§. 756. Ἤδη μὲν οὖν ἐὰν τὸ οὕτω διαιρεθὲν τετράγωνον, καὶ ἀντὶ μέτρου ὑποτεθέν, ἀμέσως ἔχῃ τῷ καταμετρητέῳ σχήματι ἐφαρμόζεσθαι, ῥᾷστα ὁ τοῦ τετραγώνου πρὸς αὐτὸ τὸ σχῆμα ἀνακαλυφθήσεται λόγος, καὶ κατ' ἀκρίβειαν ἀποχρῶσαν, κἂν τὸ σχῆμα ᾖ καμπυλόγραμμον. Οἷον κείσθω δὴ σχῆμα τὸ Ζ, ὃ διὰ τοῦ τετραγώνου ΜΝ δέοι καταμετρῆσαι. Σχ. 154.
Συλλαβὼν οὖν τις ἀριθμῷ τὰ τετράγωνα μόρια τοῦ μέτρου ΜΝ, τὰ δὲ λοιπὰ συντιθείς, ὡς καὶ αὐτὰ συστῆσαι τετράγωνα, δῆλον ὡς εὑρήσει τὸ σχῆμα, ἐκ 35 τοῦ τετραγώνου ΜΝ ἑκατοστημορίων, ὡς ἔγγιστα συγκροτούμενον.

§. 757. Ἀλλὰ γὰρ τὰ πολλὰ μακρῷ εὐπετέστερον ἐστί, τὸν τοῦ καταμετρητέου σχήματος λόγον πρὸς τὸ ἀντὶ μέτρου διδόμενον τετράγωνον, ἢ τὸν ἀριθμὸν δι' οὗ τὸ σχῆμα δηλοῦται, ἐκ τοῦ τετραγώνου ἐκείνου τοῦ ἀντὶ μονάδος ληφθέντος, διὰ τῶν λόγων τῶν τοῦ σχήματος πλευρῶν, ἐν ἀριθμοῖς παρισταμένων, ὑποσυνάπτειν· ὃ κατὰ τοὺς τρόπους γίνεται τοὺς ἑξῆς ὑποτιθεμένους.

§. 758. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον, οὗ τὸ μέτρον Σχ. 155.
πρόκειται λαβεῖν. Καὶ ἔστω ἀριθμὸς υ, δι' οὗ δηλοῦ-

ται ἡ πλευρὰ ΑΒ ἐκ μονάδος τῆς κατὰ τὸ ΜΛ· καὶ β ἀριθμὸς, δι' οὗ δηλοῦται ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἐκ μονάδος τῆς αὐτῆς. Ἔσται δὲ ὁ λόγος $ΑΓ : ΜΝ = \upsilon\beta : 1$ (§. 476.), τὸ δὲ ΑΓ, ἐκ τῆς τετραγωνικῆς μονάδος ΜΝ, ὑποκείσεται διὰ τοῦ γινομένου $\upsilon\beta$.

§ 759. Μᾶλλον δὲ καθόλου, ἐὰν ᾖ β, παραλληλογράμμου τινὸς ἡ βάσις, οὗ ὕψος τὸ υ. τὸ παραλληλόγραμμον προκείσεται διὰ τοῦ $\upsilon\beta$ §. 459.)

§ 760. Τοῦ δὲ τριγώνου ἐὰν ὡσαύτως ἡ μὲν βάσις ᾖ β, τὸ δὲ ὕψος υ, αὐτὸ δὴ τὸ τρίγωνον ὑποδηλωθήσεται διὰ $\frac{1}{2}\upsilon\beta = \frac{1}{2}\upsilon \times \beta = \frac{1}{2}\beta \times \upsilon$ (§. 459).

Σχ. 156. §. 761. Τετραπλεύρου δὲ ὁτινοσοῦν ΑΒΓΔ, τῇ διαγωνίῳ εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ διαιρεθέντος, ἐὰν ἡ ΑΓ ἀντὶ κοινῆς τῶν τριγώνων βάσεως β τεθῇ, ὕψος δὲ τοῦ μὲν ᾖ υ, τοῦ δὲ η, ἔσται $ΑΒΓΔ = \frac{1}{2}\upsilon\beta + \frac{1}{2}\eta\beta = \beta(\frac{1}{2}\upsilon + \frac{1}{2}\eta) = \frac{1}{2}\beta(\upsilon + \eta)$.

Σχ. 157. §. 762. Ἐὰν δὲ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ ὦσι παράλληλοι, ληφθεισῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὡς βάσεων, ἔσται τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΓΒΔ, ὕψωμα τὸ αὐτό· ὅπερ αὖθις υ ῥηθὲν, καὶ τῆς μὲν ΑΒ, τεθείσης b, τῆς δὲ ΓΔ, β· ἔσται $ΑΒΓΔ = \frac{1}{2}\upsilon(\beta + b) = \upsilon(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}b)$.

§. 763. Ἔνθεντοι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἐπιπέδων εὐθυγράμμων σχήματα δι' ἀριθμῶν ἐκτεθείσεται, εἰς τρίγωνα ἀναλυόμενα, ἢ τετράπλευρα, καὶ τοῦ κεφαλαίου ληφθέντος τῶν ἀριθμῶν, οἷς τὰ τρίγωνα ταῦτα, ἢ τετράπλευρα παρίσαται.

§. 764. Σχήματος δὲ παντὸς κανονικοῦ τῆς περιμέτρου π ὑποτεθείσης, καὶ τῆς ἀποστάσεως ἣν ἡ πλευρὰ ἀπέχει τοῦ κατὰ τὸν κύκλον κέντρου, ἐν ᾧ ἔχει ἐγγράφεσθαι, δ· ἔσται ὁ ἀριθμὸς ὁ τὸ σχῆμα παρισὰς $\frac{1}{2}\pi\delta$. (§. 467.).

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 765. Κἀντεῦθεν ἐὰν τὸ ν παραλληλόγραμμον παριστᾷ, ὗ βάσις β, ἔσαι τὸ ἐκείνȣ ὕψος $υ = \frac{ν}{β}$. ὗ δὲ τὸ ὕψος υ, ἔσαι ἡ αὐτȣ̃ βάσις $β = \frac{ν}{υ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 766. Τὸ δὲ τρίγωνον ὗ βάσις μὲν β, ὕψος δὲ υ, παριςάμενον διὰ τȣ̃ ν, ἔσαι $\frac{1}{2}υ = \frac{ν}{β}$, καὶ $\frac{1}{2}β = \frac{ν}{υ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 767. Καὶ ὁποῖον δ᾽ ἂν ᾖ τὸ διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ ν προκείμενον σχῆμα, ἔσαι ἡ τȣ̃ τετραγώνȣ πλευρά, ᾧ τὸ σχῆμα ἐξισȣ̃ται, $\sqrt{ν}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 768. Παντὸς ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ τῶν δύο πλευρῶν ἐν ἀριθμοῖς ἐκδηλȣμένων, τὸν ἀριθμὸν προσευρεῖν τὸν τὴν τρίτην τῶν πλευρῶν ἐκδηλώσοντα.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπὶ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΑΒΓ, τῆς μὲν ΑΒ πλευρᾶς διʼ ἀριθμȣ̃ τȣ̃ υ παριςαμένης, τῆς δὲ ΓΒ διὰ τȣ̃ β, τῆς δὲ μεγίςης ΑΓ διὰ τȣ̃ ϑ, ἔσαι $ϑϑ = υυ + ββ$. Ἔνθεντοι $υυ = ϑϑ - ββ$. Καὶ $ββ = ϑϑ - υυ$. Ἄρα $ϑ = \sqrt{(υυ + ββ)}$· καὶ $υ = \sqrt{(ϑϑ - ββ)}$· καὶ $β = \sqrt{(ϑϑ - υυ)}$· (§. 483.). Σχ. 158.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 159. §. 769. Ἔνθα τοι δοθείσης τῆς κατὰ τὸν κύκλον ἡμιδιαμέτρου ΑΓ, καὶ ὑποτεινούσης ὁποιασοῦν τῆς ΑΒ, εὑρεθήσεται ἡ ὑποτείνουσα ΑΔ τοῦ τόξου, ὃ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας ΑΔΒ ἐστὶν, ἣν ὑποτείνει ἡ ΑΒ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΓΔ, ἐπειδὴ τὰ ΑΕΓ, ΑΕΔ τρίγωνα ἐστὶν ὀρθογώνια, ἐὰν ᾖ $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$, καὶ $\Gamma\mathrm{E} = \gamma$, καὶ ΑΕ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης $= \eta$, καὶ $\Delta\mathrm{E} = \pi$, ἔσται $\gamma = \sqrt{(\alpha\alpha - \eta\eta)}$. Δίδοται δὲ ἡ γ, ὅτι καὶ αἱ α καὶ η εἰσὶ διδόμεναι. Κἀντεῦθεν δίδοται καὶ π, ἅτε δὴ $= \alpha - \gamma$. Κἀντεῦθεν τέως καὶ $\mathrm{A}\Delta = \sqrt{(\pi\pi + \eta\eta)}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 770. Ἐὰν ᾖ ΑΒ πλευράτινος κανονικοῦ σχήματος, ἔσται ΑΔ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ, τοῦ δὶς τοσαύτας τὰς πλευρὰς ἔχοντος, ὃ ἂν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφείη. Ἡ δὲ πλευρὰ αὕτη τῇ τοιᾶδε ἂν εὑρεθείη μεθόδῳ, ἢ καὶ μικρῷ ἐπιτομωτέρᾳ, ἐὰν γένηται $\mathrm{A}\Delta = \sqrt{2\alpha\pi}$. Ἡ γὰρ ΑΔ μέση ἀνάλογος ἐστὶ, μεταξὺ $\Delta\mathrm{E} = \pi$, καὶ τῆς διαμέτρου $\Delta\mathrm{Z} = 2\alpha$. (§. 452.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 771. Ἐὰν πανταχοῦ τεθῇ $\alpha = 1$, εὑρεθήσεται

Εἰς μὲν καταγραφὴν Ἑξαγώνου.

$\eta = 0,\ 5$, καὶ $\pi = 0,\ 1339745962$.

Εἰς καταγραφὴν Δωδεκαγώνου.

$\eta = 0,\ 2588190451$, καὶ $\pi = 0,\ 0340741737$.

Εἰς καταγραφὴν ΚΔ^γώνου.

$\eta = 0,\ 1305261922$, καὶ $\pi = 0,\ 0085551386$.

Εἰς καταγραφὴν ΜΗ^γώνου.

$\eta = 0,\ 0654031292$, καὶ $\pi = 0,\ 0021410768$.

Εἰς

Εἰς καταγραφὴν ϟϛ^γώνου.

η = 0, 0327190828, καὶ π = 0, 0005354125.

Ἐξέσται δὲ τῷ βουλομένῳ καὶ περαιτέρω τὸ ἔργον προαγαγεῖν.

ΛΗΜΜΑ.

§. 772. Ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, τοῦ Σχ. 160.
μήκει ΒΓ, ὑπὲρ τὸ πλάτος ΑΒ, πολὺ διαφέροντος, κέντρῳ τῷ μεσαιτάτῳ τῆς ΒΓ πλευρᾶς σημείῳ Ζ, τόξα γεγράφθω τὰ ΗΓ, ΘΒ. Ἀχθείσης τε εὐθείας τῆς ΗΙ παραλλήλου τῇ πλευρᾷ ΔΓ, καὶ συστάντος ἐπὶ τοῦδε τοῦ ὀρθογωνίου, παραλληλεπιπέδου ἐν γωνίαις ὀρθαῖς κατὰ βάθος τὸ τυχὸν ΔΕ, διήχθω διὰ τῆς ΗΙ ἐπίπεδον, τέμνον αὐτὸ τομῇ παραλλήλῳ τῇ πλευρᾷ ΓΕ. Διήχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ τόξου ΗΓ, ἐπιφάνεια κυλίνδρου ὀρθοῦ, οὗ ἡ βάσις ἐπὶ ΘΒΓΗ, τὸ κέντρον ἔχουσα κατὰ τὸ Ζ. Λέγω δή, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἀποτεμνόμενον στερεὸν ΚΗΓΕ, ἧττον ἔσται ἢ τριτημόριον τοῦ παραλληλεπιπέδου ΙΕ. Καὶ εἰ τὸ εἰρημένον στερεὸν ΚΗΓΕ, τριτημορίῳ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΙΕ ἴσον τεθείη, φημὶ δὴ τὸ διάπτωμα τοσοῦτον ἔλαττον ἔσεσθαι, ὅσῳ, τῶν λοιπῶν ὡσαύτως ἐχόντων, ἐλάσσων ἡ ΓΔ· οὕτω δήπου, ὡς τῇ ΓΔ ἀποιχομένῃ, καὶ τὸ διάπτωμα συναποίχεσθαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τοῦ ΑΕ ἐπιπέδου προεκβληθέντος, συνεστάθω ὀρθογώνιον τὸ ΛΜ, τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΕ ὅμοιόν τε καὶ ἴσον. Συνεστὼς δέ, βάσις τῇ πυραμίδι ΛΜΝ

γινέ-

γινέσθω, ὕψος ἐχέτω τὸ $ΜΝ = ΔΓ$. Τετμήσθω δὲ τό, τε παραλληλεπίπεδον ΒΕ, καὶ ἡ πυραμὶς ΛΜΝ, διʼ ἐπιπέδε τῶ ΟΠΦ, ΡΣΤ, παραλλήλε τῷ ἐφʼ ᾧ αἱ βάσεις ΑΕ, ΛΜ· ὡς τὴν μὲν ΥΦ, τὴν τομὴν εἶναι τῶ ςερεῶ ΚΗΓΕ, τὴν δὲ ΡΤ, τῆς πυραμίδος. Καὶ ἔςαι ἔν $ΓΔ^τ = ΔΘ \times ΔΗ$. Καὶ $ΓΠ^τ = ΠΧ \times ΠΥ$ (§. 441.). Ἔνθεντοι $ΓΔ^τ : ΓΠ^τ = ΔΘ \times ΔΗ : ΠΧ \times ΠΥ$. Ἐπειδὴ δὲ $ΔΕ = ΠΦ$, κἀντεῦθεν $ΔΗ : ΠΥ$, ὡς ὀρθογώνιον ΗΕ, πρὸς ὀρθογώνιον ΥΦ· ἔςαι ὁμοίως $ΓΔ^τ : ΓΠ^τ = ΔΘ \times ΗΕ : ΠΧ \times ΥΦ$. Ὅθεν διὰ τὸ τὴν $ΓΔ = ΝΜ$, καὶ τὴν $ΓΠ = ΝΤ$, καὶ τὸ $ΗΕ = ΛΜ$, ἔςαι $ΝΜ^τ : ΝΤ^τ = ΔΘ \times ΛΜ : ΠΧ \times ΥΦ$. Κατὰ φύσιν δὲ τὴν τῆς πυραμίδος ἐςὶ $ΝΜ^τ : ΝΤ^τ = ΛΜ : ΡΤ$ (§. 562.). Ἔςιν ἄρα $ΛΜ : ΡΤ = ΔΘ \times ΛΜ : ΠΧ \times ΥΦ$. Καὶ εἴπερ ἄρα ὁ δεύτερος λόγος τῷ προτέρῳ ἀνάπαλιν ληφθέντι συντεθείη, ἔςαι $1 : 1 = ΡΤ \times ΔΘ \times ΛΜ : ΠΧ \times ΥΦ \times ΛΜ$ (§. 180.) $= ΡΤ \times ΔΘ : ΠΧ \times ΥΦ$ (§. 181.)· τυτέςι $ΡΤ \times ΔΘ = ΠΧ \times ΥΦ$. Ἐξ ὧ δὴ ἕπεται $ΔΘ : ΠΧ = ΥΦ : ΡΤ$ (§. 187). Ἐπειδὴ τοίνυν ΔΘ ἐλάσσων τῆς ΠΧ, ἔςαι καὶ ἡ τομὴ ΥΦ, ἐλάσσων τῆς τομῆς ΡΤ. Διαφορᾷ γεμὴν τοσῦτον ἐλάσσονι, ὅσῳ ἐλάσσων, πρὸς διάμετρον τὴν αὐτὴν ΒΓ, γίνεται ἡ ΓΔ· ταύτης γὰρ ἐπισήμως ἀπομειωθείσης, ἅπασαι αἱ ΔΘ, ΠΧ, ὅσον ἔχι καὶ ἴσαι τέως τῇ διαμέτρῳ ΒΓ ἀποκαθίςανται. Κἀντεῦθεν ἔν ἕπεται καὶ τὸ ςερεὸν ΚΗΓΕ τῷ αὐτῷ λόγῳ τῆς πυραμίδος ΛΜΝ ἔλαττον ἔσεσθαι (§. 523.). Ἀλλαμὴν ἡ ΛΜΝ πυραμὶς τριτημόριον ἐςὶ τῶ πρίσματος ΙΕ (§. 567.). Ἆρʼ ἔν καὶ τὸ ςερεὸν ΚΗΓΕ, τριτημορίε ἔςαι τῶ ςερεῶ ΙΕ, κατὰ τὰ ἐκτεθέντα, ἐλαττονέμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 773. Τὸ τοῦ κύκλου τμῆμα αγηα, Σχ. 161.
μεῖζον ἐςὶ δυοῖν τριτημορίων τοῦ ὀρθογωνίου αβδη, οὗ ἡ μὲν βάσις αη, ἡ τοῦ τμήματός ἐςιν ὑποτείνουσα, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῷ μέρει ιγ τῆς ἡμιδιαμέτρου, τῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καθέτου· ὑπεροχῇ γε μὴν τοσούτον ἐλάσσονι, ὅσῳ ἔλαττον τοῦ ἰδίου κύκλου ἐςὶ τὸ ἀπότμημα· καὶ τέως γε δὴ καὶ ἀποιχομένη, ἀποιχομένου πρὸς τὸν κύκλον τοῦ τμήματος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςω τὸ μέρος τοῦ σχήματος γδηι, ταυτὸ τῷ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω Λήμματος ΓΔΗΙ. Ἐπειδὴ τοίνυν, ἐὰν ΗΓΔ καὶ ΙΔ ἀντὶ βάσεων ληφθῶσι, τὰ ςερεὰ ΚΗΓΕ, καὶ ΙΕ, τοῦ πρισματικοῦ καθίςαται γένους, καὶ κοινὸν ἔχει ὕψος τὸ ΔΕ, ἔςαι τὸ ςερεὸν ΚΗΓΕ πρὸς τὸ ςερεὸν ΙΕ, ὡς ἡ βάσις ΗΓΔ, πρὸς τὴν βάσιν ΙΔ (§. 543.). Ἐπεὶ δὲ τὸ ΚΗΓΕ, μικρῷ ἔλαττον ἢ τριτημόριον ἐςὶ τοῦ ςερεοῦ ΙΕ, ἔςαι καὶ τὸ ΗΓΔ μικρῷ ἔλαττον, ἢ τὸ τριτημόριον τοῦ ὀρθογωνίου ΙΔ. Ἐκ δὲ τοῦ ἀκολούθου τὸ ΗΙΓ, δυοῖν τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριτημορίων μικρῷ μεῖζόν ἐςι. Καὶ τὸ ἐκείνου ἄρα διπλοῦν, τουτέςι τὸ τμῆμα αγηα, τὰ δύο τριτημόρια τοῦ ὀρθογωνίου αβδη, τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπερέξει· καὶ τὰ λοιπά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 774. Ἐντεῦθεν καὶ ἡ τῆς τῶν τμημάτων καταμετρήσεως ὑποσυνάγεται μέθοδος, οὐ μάλ᾽ ἀκριβὴς αὐτή, τῷ δ᾽ ἀληθεῖ προσεγγίζουσα. Ἐὰν γὰρ Σχ. 162.
μείζοντι μέρος τοῦ ἰδίου κύκλου τὸ τμῆμα ᾖ, οἷον τὸ ΑΒΓΔ, ἀποληφθέντων ἀπ᾽ αὐτοῦ τμημάτων ἐλασσόνων

σόνων τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τούτων ἐν μέρει ὑπολογισθέντων, καὶ τῷ εὐθυγράμμῳ ΑΒΓΔ προστεθέντων, τὸ ΑΒΓΔ τμῆμα, ἄνευ ἐπισήμου διαπτώματος, ὅσον ἀποδοθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 163. §. 775. Ἔστω ΑΒΓ τομεὺς τοῦ κύκλου, ἐν γωνίᾳ ὅσον ἅλις βραχείᾳ ληφθεὶς, καὶ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν κατ' αὐτὸν περιφέρειαν· ἐπὶ δὲ τῆς ὑποτεινούσης ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἔστω ἐπὶ τὴν περιφέρειαν προεκβαλλομένη, ἡ ΓΕ. Λεγέσθω δὲ ἡ ΔΒ = ΔΑ, η. Καὶ ΓΔ ἔστω γ, καὶ ΔΕ, π· ἡ δὲ ἀκτὶς ΑΓ ἔστω = α. Ἔσται τοίνυν τὸ ὀρθογώνιον, οὗ πλευραὶ ΑΒ, ΔΕ = $2 \eta \pi$. Κἀντεῦθεν τοῦ μικροῦ διαπτώματος ἀλογουμένου, τὸ ΑΕΒ τμῆμα $= \frac{2}{3} \cdot 2 \eta \pi = \frac{4 \eta \pi}{3}$· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΒ $= \eta \gamma$. Ὁ ἄρα τομεὺς $= \frac{4 \eta \pi}{3} + \eta \gamma = \eta \left(\frac{4}{3} \pi + \gamma\right)$. Ἀλλὰ μὴν $\frac{4}{3} \pi + \gamma$· ἤτοι $\frac{1}{3} \pi + \pi + \gamma = \frac{1}{3} \pi + \alpha$, καὶ γὰρ $\pi + \gamma = \alpha$· ὁ ἄρα τομεὺς ὅτι ἔγγιστα ἔσται $= \eta \left(\frac{1}{3} \pi + \alpha\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 776. Διὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμιδιαμέτρου τὸν κύκλον καταμετρῆσαι· τουτέστι τὸν τοῦ κύκλου λόγον πρὸς τὸ ῥηθὲν τετράγωνον, δι' ἀριθμῶν ὡς ἔγγιστα ἀληθευόντων προθέσθαι.

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ κύκλου εἰς ἐνενήκοντα ἓξ τομεῖς ἀλλήλοις ἴσους διαιρεθέντος, ἐξ ὧν εἷς ἔστω ὁ ΑΓΒ, ἔσται ἡ ΑΒ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ σχήματος, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ ἐγγράφοιτο, πλευρὰς ἔχον δηλονότι ἓξ ἐπὶ ἐνενήκοντα.

κοντα. Ἐνθαῦτοι τῆς ἡμιδιαμέτρου α = 1 τεθείσης, ἔσται, η = 0, 0327190828, καὶ π = 0, 00053541 (§. 771.). Τοιγαροῦν $\frac{1}{3}$π = 0, 00017847. Καὶ $\frac{1}{3}$π + α = 1, 00017847. Τὸ ἄρα η ($\frac{1}{3}$π + α) ὃ τὸν τομέα ἡμῖν παραστήσει, εὑρεθήσεται ὑπολογισμῷ τοιῷδε·

0, 0327190828	
1, 00017847	
22	90335796
130	8763312
2617	526624
22903	35796
32719	0828
327190828	000
τὸ παραγόμενον, 0, 0327249221	5 . . . ἔσται

ἴσον τῷ τομεῖ.

Καὶ τούτου ἄρα τοῦ ἀριθμοῦ ἐνενηκοντάκις ἑξάκις ληφθέντος (ὃ προχείρως τελεῖται ἀπὸ τοῦ ἑκατονταπλοῦ: 3, 27249221, ἀφαιρεθέντος τοῦ τετραπλοῦ: 0, 13089968.) παράγεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 3, 141592, ὃς ἐστὶ πρὸς τὴν 1, ὡς ὁ κύκλος πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος. Ὁ δὲ λόγος οὗτος ἰσχνότερον μὲν ἀποδοθήσεται, ὅσῳ ἂν εἰς τομεῖς ὁ κύκλος διατέμνοιτο πλείονας· ὁλοσχερέστερον δέ, ὅσῳ ἂν εἰς ἐλάσσονας.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α.

§. 777. Ὅτι τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐστὶ τετραπλάσιον, ἔσται ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, ὡς 3, 141592 : 4, ἤτοι ὡς 0, 785398 : 1.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 778. Ὅτι δὲ ὁ κύκλος ἴσος ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τοῦ κύκλου ἡμιπεριφέρεια, ὕψος δὲ ἡ τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἡμιδιάμετρος (§. 469.), ἔςαι ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον (§. 473.), ἢ ὡς ἡ ὅλη περιφέρεια πρὸς τὴν ὅλην διάμετρον· τοιγαροῦν καὶ ὁ εὑρεθεὶς λόγος 3, 141592 : 1, τῷ λόγῳ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ὅτι ἐγγυτάτω ἐςίν. Ἐγγυτέρω δ᾽ ἔτι τῷ λόγῳ ἐκείνῳ γενήσεται ὅδε : 3, 14159265358979323846 : 1. Καὶ δύνανται δὲ ἔτι καὶ τούτου λόγοι ἀκριβέςεροι εὑρεθῆναι, τοῦ διαπλώματος ἐφ᾽ ἡλικιοῦν βραχύτητα καταςελλομένου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 779. Τὰ μέτρα, ἃ κατὰ τοὺς κύκλους, καὶ τὰς τῶν κυλίνδρων ἐπιφανείας, καὶ τῶν κώνων τῶν ὀρθῶν, καὶ δὴ καὶ τὰς τῶν σφαιρῶν, ἐκ τοῦ λόγου τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου πρὸς τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν ἐξῆπλαι, ἀποδιδόναι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 780. Ἔςω λόγος τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὃν ἀπεδώκαμεν, ἢ ἄλλος ὅσον ἄλις τῷ ἀληθεῖ προσπελάζων, d : p. διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου δοθεῖσα ἡ δ, καὶ ἔςαι τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, $= \frac{p}{d} \cdot \delta$, (§. 431.).

§. 781. Ἔνθεν τοι καὶ μέρος τῆς περιφερείας πηλικονοῦν δι᾽ ἀριθμῶν δηλωθήσεται, οὗ ὁ λόγος πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν δεδομένος ἂν εἴη. Ἔςω γὰρ ὁ λόγος ὅδε τοῦ τόξου πρὸς τὴν περιφέρειαν 1 : A,

τοῦ