Ἀλλ' ἐὰν $\sqrt{-\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ, ἢ διελεῖν διὰ $\sqrt{\beta}$, ληφθὲν (§ 729.) ἀντ' ἐκείνου $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{-1}$, ἔσται δὴ τὸ μὲν παραγόμενον $\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{-\alpha\beta}$, τὸ δὲ πηλίκον $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$.

Καὶ ἐὰν $\sqrt{-\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\sqrt{-\beta}$, ληφθέντων ἀντὶ τούτων, τῶν $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{-1}$ καὶ $\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{-1}$, ἔσται παραγόμενον $\sqrt{\alpha\beta}\times -1=-\sqrt{\alpha\beta}$. Καὶ γὰρ $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(-1)^{2:2}=-1$. Δέον δὲ διελεῖν τὸ πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου, πηλίκον προελεύσεται τὸ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\times+1=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$· ὅτι $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=+1$.

Καὶ ἐὰν $\alpha\sqrt{-\gamma}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\beta\sqrt{-\varepsilon}$ ἀντὶ τούτων ληφθέντων $\alpha\sqrt{\gamma}\sqrt{-1}$ καὶ $\beta\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-1}$, γινόμενον προκύψει $\alpha\beta\sqrt{\gamma\varepsilon}\times -1=-\alpha\beta\sqrt{\gamma\varepsilon}$. Δέον δὲ τῶνδε τῶν ῥιζικῶν τὸ πρῶτον διελεῖν διὰ τοῦ δευτέρου, ἔσται πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$. Καὶ γὰρ κἀνταῦθα $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1$.

Ἐν γένει δὲ ἐὰν δέῃ πολλαπλασιάσαι $\alpha\sqrt[\sigma]{-\gamma}$ διὰ $\beta\sqrt[\sigma]{-\varepsilon}$, ληφθέντων ἀντὶ τῶνδε τῶν $\alpha\sqrt[\sigma]{\gamma}\sqrt[\sigma]{-1}$ καὶ $\beta\sqrt[\sigma]{\varepsilon}\sqrt[\sigma]{-1}$, γινόμενον παραχθήσεται $\alpha\beta\sqrt[\sigma]{\gamma\varepsilon}\sqrt[\sigma]{(-1)^2}$. Ἐὰν δὲ τὸ πρῶτον διελεῖν δέῃ διὰ τοῦ δευτέρου τὸ πηλίκον ἔσται $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 738. Τούτων κατανοουμένων, οἱ ἐκ διαφόρων ὅρων συγκείμενοι τύποι, τῶν μὲν ῥιζικῶν, τῶν δὲ ἀῤῥίζων, δι' ὁποιωνοῦν ἄλλων πολλαπλασιασθήσονται, ἢ διαιρεθήσονται κατὰ τὰ ἐν γένει περὶ πολλαπλασιασσιασμοῦ τε καὶ διαιρέσεως ὁροθετηθέντα. Ὅτι δὲ τὰ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιαστέα, ἢ διαιρετέα ῥιζικὰ μᾶλλον εὐεπιχείρητα ἀπαντᾷ, εἰ πρότερον ἀλλήλοις ὁμοταγῆ καθιστῶτο, μὴ καὶ περιττὸν ᾖ παραινεῖν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 739. Ἐὰν $\alpha + \beta\sqrt{\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\beta - \sqrt{\alpha}$, ἔσαι δὴ τὸ τοῦ ὑπολογισμοῦ σχῆμα τοιόνδε·

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta\sqrt{\alpha} \\ \beta - \sqrt{\alpha} \\ \hline \alpha\beta + \beta\beta\sqrt{\alpha} \\ \quad - \alpha\sqrt{\alpha} - \alpha\beta \\ \hline \end{array}$$

τὸ ἄρα γινόμενον $(\beta\beta - \alpha)\sqrt{\alpha}$

Ἐὰν $\alpha + \beta\sqrt{-\alpha}$, πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\beta - \sqrt{-\alpha}$ ἔσαι τὸ σχῆμα τοιοῦτον·

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta\sqrt{-\alpha} \\ \beta - \sqrt{-\alpha} \\ \hline \alpha\beta + \beta\beta\sqrt{-\alpha} \\ \quad - \alpha\sqrt{-\alpha} + \alpha\beta \\ \hline \end{array}$$

τὸ δὲ παραγόμενον $2\alpha\beta + (\beta\beta - \alpha)\sqrt{-\alpha}$.

Εἰ δὲ προκέοιτο πολλαπλασιάσαι $\alpha + \beta\sqrt{\alpha}$ διὰ $\alpha - \beta\sqrt{-\alpha}$, τὸ σχῆμα ἔσαι·

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta\sqrt{\alpha} \\ \alpha - \beta\sqrt{-\alpha} \\ \hline \alpha\alpha + \alpha\beta\sqrt{\alpha} \\ \quad - \alpha\beta\sqrt{-\alpha} - \beta\beta\sqrt{-\alpha\alpha} \\ \hline \end{array}$$

ὅθεν γίνεται $\alpha\alpha + \alpha\beta\sqrt{\alpha} - \alpha\beta\sqrt{-\alpha} - \beta\beta\sqrt{-\alpha\alpha}$
Ἔσι δὲ ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου γράφειν $- \alpha\beta^2\sqrt{-1}$.

Εἰ δὲ τὸ $\alpha + \sqrt{-\beta\beta}$, διὰ τῦ $\alpha - \sqrt{-\beta\beta}$, ὧδε τὸ σχῆμα ἕξει·

$$\begin{array}{l} \alpha + \sqrt{-\beta\beta} \\ \alpha - \sqrt{-\beta\beta} \\ \hline \alpha\alpha + \alpha\sqrt{-\beta\beta} \\ \qquad - \alpha\sqrt{-\beta\beta} + \beta\beta \\ \hline \end{array}$$

ὅθεν τὸ γινόμενον $\alpha\alpha + \beta\beta$. Δῆλον δὲ ὅτι τὸ σημεῖον τῦ ἑκάτυ τῶν ὅρων εὐλόγως κεῖται ὕτω τεθέν. Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τῦ $\sqrt{-\beta\beta}$ γράφηται $1 \times \sqrt{-\beta\beta}$ τὸ $+1 \times \sqrt{-\beta\beta}$ διὰ τῦ $-1 \times \sqrt{-\beta\beta}$ πολλαπλασιαθὲν δώσει $-1 \times -\beta\beta = \beta\beta$.

Ἀλλ᾽ ἐὰν δέῃ διελεῖν $\alpha\alpha + \beta\beta$ διὰ $\alpha + \sqrt{-\beta\beta}$ τὸ σχῆμα τοιῦτον ἔςαι.

$$\alpha + \sqrt{-\beta\beta} \left| \begin{array}{l} \alpha\alpha + \beta\beta \\ -\alpha\alpha - \alpha\sqrt{-\beta\beta} \\ +\alpha\sqrt{-\beta\beta} - \beta\beta \end{array} \right| \alpha - \sqrt{-\beta\beta}$$

Καὶ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὰ τύτοις παραπλήσια πραγματευτέον, ἅπερ ὐδεμίαν οἴσει δυσχέρειαν, τοῖς τὰς ἐκλεχθείσας ἀρχὰς καλῶς κατέχυσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 740. Ἐὰν ὁ τῦ ἐφεξῆς τύπυ

$$\tfrac{1}{2}\alpha \times (-1 + \sqrt{-3})$$

Κύβος ζητύμενος ᾖ, ἐπειδὴ ὁ τῦ πρώτυ παράγοντος κύβος ἐςὶν $\tfrac{1}{8}\alpha^3$, ὁ τῦ ἑτέρυ ὧδε γενήσεται.

$$-1+\sqrt{-3}$$
$$-1+\sqrt{-3}\quad \textit{πολλαπλασίασον}$$

$$+1-\sqrt{-3}$$
$$-\sqrt{-3}-3$$

Καὶ ἔσται τετράγωνον $-2-2\sqrt{-3}$
$$-1+\sqrt{-3}\ \textit{πολλαπλασίασον}$$

$$+2+2\sqrt{-3}$$
$$-2\sqrt{-3}+6$$

Ὁ δὲ Κύβος $+8$

Οὗ διὰ τοῦ $\frac{1}{8}\alpha^3$ πολλαπλασιασθέντος, προκύψει ὁ ζητούμενος $=\alpha^3$. Ὁ δ' αὐτὸς γίνεται καὶ ἀπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{2}\alpha\times(-1-\sqrt{-3})$ παραπλησίῳ τῷ ὑπολογισμῷ, ὃν καὶ ἐκ τοῦ προκειμένου ῥᾴδιον συντελέσαι τὰ τῶν ῥιζῶν σημεῖα εἰς τἀναντία ἀμείψαντας.

§. 741. Δῆλον οὖν ὅτι παρὰ τὴν πρωτεύουσαν κυβικὴν ῥίζαν ποσότητος οἱασοῦν α^3, ἥτις ἐστὶν α, καὶ δύο ἄλλαι τῆς αὐτῆς ῥίζαι κυβικαὶ δευτερεύουσαι εἰσὶν, ἡ μὲν $\frac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{-3})$, ἡ δὲ $\frac{1}{2}\alpha(-1-\sqrt{-3})$ ἀφ' ὧν καὶ ἀδυνάτως ἐχουσῶν, (εἴτις κατὰ τὸ δέον αὐτὰς μετίοι), ὁ κύβος α^3, οὐδὲν ἧττον ἢ ἀπὸ τῆς α προελεύσεται. Παραπλησίως δὲ ὑπολογιζομένοις ἀποδείκνυται, καὶ τοῦ αὐτοῦ κύβου ἀποφατικῶς ληφθέντος, τρεῖς εἶναι τὰς ῥίζας τὰς κυβικὰς τάσδε $-\alpha$, καὶ $\frac{1}{2}\alpha(1+\sqrt{-3})$ καὶ $\frac{1}{2}\alpha(1-\sqrt{-3})$. Ἔνθεν τοι ἐὰν τεθῇ $\alpha=1$, ἔσονται τῆς καταφατικῆς μονάδος ἐπιφερόμεναι ῥίζαι κυβικαὶ, 1, καὶ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, καὶ $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$· ὧν ἐὰν τὰ σημεῖα διαμειφθῇ κατὰ τὸ ἀντίστροφον, γενήσονται τῆς ἀποφατικῆς μονάδος ῥίζαι κυβικαὶ αὗται, -1, καὶ

καὶ $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, καὶ $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$· ὅθεν δὴ καὶ τὰ ἀνωτέρω (§. 711.)· ῥηθέντα κάλλιστα ἀναπλύσσονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ.

§. 742. Τῶν ἐνταῦθα ἐκτεθέντων ἡ χρῆσις, ἡ πρὸς τὴν ἀναγωγὴν τῶν πρωτευουσῶν ῥιζῶν προὐργιαιτάτη ἐστὶ, καθ᾽ ἣν, εἴτινες τούτων παρῶσιν, ἐν δεκαδικοῖς ἀριθμοῖς ἐκκείμεναι, ὡς οἷόντε ἀκριβέστατα, πλεῖσται ἔπειτα ἄλλαι προσευρίσκεσθαι μετρίῳ τῷ πόνῳ δυνήσονται. Οὕτως ἐὰν ἐν ἀριθμοῖς δεκαδικοῖς ἡ δοθεῖσα $\sqrt{2}$, προχειρότατα εὑρεθήσεται καὶ ἡ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$· καὶ ἡ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$· καὶ ἡ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ἐὰν δὲ οὕτω δεδομέναι ὦσιν ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}$, πρόχειρος ἔσται καὶ ἡ $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$· καὶ ἡ $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Τοὐναντίον δὲ τῶν $\sqrt{6}$ καὶ $\sqrt{2}$ δεδομένων, δοθήσεται καὶ ἡ $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$. Καὶ ἐπὶ τῶν παραπλησίων ὡσαύτως.

§. 743. Λοιπὸν οὖν ἐστὶ τὴν μέθοδον ἤδη ἀποδεῖξαι ὅπως ἀπὸ τοῦ δυωνύμου $\alpha + \beta$ τοῦ εἰς δύναμιν ἡλικηνοῦν προηγμένου, τὴν ῥίζαν ὡς οἷόντ᾽ ἀκριβέστατα ἔστιν ἀνευρίσκειν τὴν, καθ᾽ ὃν ἄντις βαθμὸν ἡμῖν ἐπιτάξειε. Τοῦτο τοιγαροῦν, καίπερ λίαν ἄλλως δυσχερὲς δοκοῦν, τελεσθήσεται μέντοι, καθὰ καὶ τὰ λοιπὰ ὅσα τοιαῦτα, διὰ τοῦ στίχου (§. 688.) τοῦ εἰς ἔξαρσιν τῶν τοιῶνδε δυωνύμων ὑπουργοῦντος καθ᾽ ὁποιανοῦν δύναμιν, τὴν εἴτε καταφατικὸν, εἴτ᾽ οὖν καὶ ἀποφατικὸν τοὐπίσημον ἐχουσαν. Ἦν δὲ ἄρα ὁ στίχος, ὃν τῇ $(\alpha + \beta)^{\sigma}$ δυνάμει τῇ ὁλοσχερῶς τε καὶ καταφατικῶς διὰ τοῦ σ ἐπισημαινομένῃ ἴσον εἶναι κατείδομεν, ὁ ἑξῆς·

$$\alpha^{\sigma} + \frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^{\sigma-3}\beta^{3} + \kappa\xi.$$

ὃς καὶ ὧδε γράφεσθαι δύναται (§. 659.).

$$\alpha^{\sigma} + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\alpha^{\sigma}\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\alpha^{\sigma}\beta^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\alpha^{\sigma}\beta^{3}}{\alpha^{3}} + \kappa\xi.$$

οὗ γενομένου ὁ παράγων α^{σ} πᾶσι τοῖς ἐν τῷ στίχῳ ὅροις κοινός ἐστι. Δυνατὸν οὖν καὶ τοῦδε τοῦ παράγοντος α^{σ} ἐν μέρει ἀποτεθέντος, τὸν αὐτὸν στίχον καὶ οὕτω παρίστασθαι·

$$\alpha^{\sigma}\left(1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta^{3}}{\alpha^{3}} + \kappa\xi.\right)$$

Ἔνθεν τοι ἐὰν συντόμως ῥηθῇ,

$$\Sigma = \left(1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta^{3}}{\alpha^{3}} + \kappa\xi.\right)$$

τουτέστιν ἐὰν τὸ Σ, ἅπαντας τοὺς ἐν τῷ στίχῳ ὅρους, οἷς συνημμένως ἴσον τίθεται, σημαίνειν ὑποτεθῇ, ὁ κανὼν τοῦ τὸ διώνυμον $\alpha + \beta$, ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ σ δύναμιν ἐξαίρεσθαι, οὕτω κατ᾽ ἐπιτομὴν διασημανθήσεται·

$$(\alpha + \beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}\Sigma$$

Ὁ τοίνυν κανὼν, πάντῃ πάντως ἐπὶ τοῦ σ ὁλοχερῶς τε καὶ καταφατικῶς ὑποκειμένου ἀληθεύων, ἀληθὴς οὐδὲν ἧττον ἔσται καὶ ὁλόχερῆ μὲν ἀριθμὸν, ἀπο-

ἀποφατικὸν δὲ ὅμως τοῦ σ ὑποσημαίνοντος. Καὶ μὴν δὴ καὶ κλασματώδη ὁποιονοῦν καταφάσκοντα, ἢ ἀποφάσκοντα, κατ᾽ ἐννοιάνγεμένην τινὰ ὑπότισι προσδιοριστμένην σμιεξαλμαίνην· οἱ δήπου εἰ καὶ μὴ μετ᾽ ἀκριβείας ἁπάσης τὸ $(\alpha + \beta)^{\sigma}$ παρίσασθαι ἐνδιδοῦσι, τὸ μέντοι ὅτι ἔγγιστα τοῦ πράγματος γίνεσθαι ξυγχωροῦσι, καὶ τοσῶδε δὴ τοῦ ἀκριβοῦς ἐγγυτέρω, ὅσω ἄντις μᾶλλον διαπονεῖν ἐθελήσειε. Σημειωτέον δὲ ὅτι τὸ διώνυμον $(\alpha + \beta)$ εἰς δύναμιν ἧς τὸ ἐπίσημον κλασματῶδες $\frac{\tau}{\varrho}$ ἐξᾶραι, οὐδὲν ἄλλ᾽ ἔστιν ἢ τοῦτου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ τ δύναμιν ἐξαρθέντος, τὴν κατὰ τὸ ϱ ῥίζαν ὑπεξελέσθαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 744. Τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρω τεθείσης σημασίας τοῖς γράμμασι σωζομένης, ἔσαι $(\alpha + \beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}\Sigma$, κἂν ὁ ἀριθμὸς σ ὁλοχερὴς ἐν ἀποφάσει ᾖ, κἂν ἐν καταφάσει, ἢ ἀποφάσει, ἀλλὰ κεκλασμένος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω (§. 688.) ἕπεται, ὅτι τοῦ στίχου ὃν τὸ $\alpha^{\sigma}\Sigma$ ὑποσημαίνει, διὰ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασθέντος, στίχος τις καινὸς ἀναφύεται, μηδὲν τοῦ πρώτου διαφέρων, ἢ ὅσον τοῦ $\mu = \sigma + 1$ ὑποτιθεμένου, ἀντὶ τοῦ σ ἐπὶ τούτου πανταχοῦ τὸ μ παρεισάγεται. Καὶ δυνατὸν ἄρα ἅπαντα τὸν οὕτως ἔχοντα στίχον $\alpha^{\mu}\Sigma$, ὡς γεγονόστι ἐπιθεωρεῖν ὑπότε $(\alpha + \beta)$ καὶ τοῦ στίχου $\alpha^{\sigma}\Sigma$, ἐν ᾧ $\sigma = \mu - 1$· ὅθεν ἕπεται, ὁποῖον ποτ᾽ ἂν ἀριθμὸν σημαίνοι τὸ μ ἢ τὸ σ, εἰ μόνον εἴη $\sigma = \mu - 1$, ἢ $\mu = \sigma + 1$, τὸ δεῖν ἔσεσθαι.

$$\frac{\alpha^{\mu}\Sigma}{\alpha + \beta} = \alpha^{\sigma}\Sigma$$

Ἐπει-

Ἐπειδὴ τοίνυν (ἀριθμὸν τοῦ μ ὁλοχερῆ ἐν καταφάσει ὑποσημαίνοντος) ἐστιν $(\alpha+\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu}\Sigma$ (§. 688.) ἔσται δὴ καὶ ἑκατέρου διὰ $\alpha+\beta$ διαιρεθέντος,

$$\frac{(\alpha+\beta)^{\mu}}{(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha^{\mu}\Sigma}{\alpha+\beta}$$

ἢ $$\frac{(\alpha+\beta)^{\mu}}{(\alpha+\beta)} = \alpha^{\sigma}\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - 1$$

ὅθεν, $$\frac{(\alpha+\beta)^{\mu}}{(\alpha+\beta)^{2}} = \alpha^{\sigma}\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - 2$$

καὶ $$\frac{(\alpha+\beta)^{\mu}}{(\alpha+\beta)^{3}} = \alpha^{\sigma}\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - 3$$

Καὶ ἐν γένει. $$\frac{(\alpha+\beta)^{\mu}}{(\alpha+\beta)^{s}} = \alpha^{\sigma}\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - s$$

ὁποῖον ποτ' ἂν ἀριθμὸν σημαίνοι τὸ s. Ἔστι δὲ,

$$\frac{(\alpha+\beta)^{\mu}}{(\alpha+\beta)^{s}} = (\alpha+\beta)^{\mu-s}.$$

Ἄρ' οὖν καὶ πρὸς $\sigma = \mu - s$, ἔσται $(\alpha+\beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}\Sigma$· καὶ δυνήσεται ὧδε τὸ σ, καὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν ὁλοχερῆτε καὶ ἐν ἀποφάσει διασημαίνειν· ἡλίκον γὰρ ἂν καὶ εἴη τὸ μ, διάγε τοῦ s ἀριθμὸς δηλοῦται τῶν ὁλοχερῶν ἕκαστος. Καὶ δῆλον ἄρα τὸ Πρῶτον.

Ἤδη μὲν οὖν, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀποφατικοῦ τοῦδε σ, γραφῇ $-\upsilon$, ὥστε γενέσθαι $(\alpha+\beta)^{\sigma} = (\alpha+\beta)^{-\upsilon}$, φανερὸν ὡς τὸ $(\alpha+\beta)^{\sigma}$, καὶ διὰ τοῦ $\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^{\upsilon}}$ παρασήσεται, ἔνθα τὸ ἐπίσημον υ θετικόν ἐστι. Νοείσθω δῆτα τὸ υ διαφέρον εἶναι μεγέθει· καὶ ἔσται $\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^{\upsilon}}$ τοσούτῳ μᾶλλον ἐλαττούμενον, ὅσῳ τὸ υ μεῖζον ὑποτίθεται ὄν· ὥστε καὶ τοῦδε δηλωτικῶς τοῦ

ἀριθ-

ἀριθμοῦ προσεπαυξομένου, τὸ $\frac{1}{(\alpha+\beta)^{\upsilon}}$ εἰς τὸ μηδὲν τέως ἀποίχεσθαι. Ἐπείτε ἄρα ἐν γένει, ἐὰν ἀριθμῷ μεγέθει διαφέροντι, οἷον τῷ υ, προστεθῇ κλασματικὸς ἀληθὴς ἐστισοῦν, οἷον ὁ $\frac{\tau}{\rho}$, τὸ ὑπὸ τοῦ προσαυξηθέντος οὕτως ἀριθμοῦ συνισάμενον, μόλις ἄν, πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν ὡς πρὶν ἀναυξῆ τελοῦντα, διαφοράν τινα τιθοῖτο ἀπενεγκάμενον. (Αὐτὸ δὲ τοῦτο ἀληθὲς καὶ ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{\tau}{\rho}$ ἀπὸ τοῦ τηλικούτου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ)· διὰ δὴ τοῦτο, εἴτε $\upsilon+\frac{\tau}{\rho}$ τεθείη, εἴτ' οὖν καὶ $\upsilon-\frac{\tau}{\rho}$ ἀντὶ τοῦ υ, τοσῷδε ἧττον τὸ $\frac{1}{(\alpha+\beta)}$ τραπήσεται, ὅσωπερ ἂν τοῦτο ἔλαττον ᾖ. Καὶ ἔσται ἄρα $(\alpha+\beta)^{\sigma}=\alpha^{\sigma}\Sigma$ κἀν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει, καθ' ἣν τὸ $\sigma=-\upsilon+\frac{\tau}{\rho}$, ἢ $=-\upsilon-\frac{\tau}{\rho}$ τίθεται· εἰ τοῦτο μόνον μεγέθει διαφέρων ὡς εἴρηται ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς υ νοοῖτο. Ἀλλ' ὅτι γὰρ ἐὰν ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)^{\sigma}=\alpha^{\sigma}\Sigma$ ἀληθεύῃ, καὶ καθ' ἡλικηνοῦν σημασίαν τοῦ σ γράμματος ἀληθεύσει, καὶ μονάδι ταύτην προσαυξηθεῖσαν (§. 688.)· ἀληθὴς ὡσαύτως ἔσεται, καὶ ἐὰν τεθῇ $\sigma=-\upsilon+1+\frac{\tau}{\rho}$, ἢ $\sigma=-\upsilon+1-\frac{\tau}{\rho}$· ἐκ τοῦ ἀκολούθου δὲ καὶ ἐὰν τεθῇ $\sigma=-\upsilon+2+\frac{\tau}{\rho}$, ἢ $\sigma=-\upsilon+2-\frac{\tau}{\rho}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς κατὰ τὸ διηνεκές· τουτέστι, καὶ ἣν καθόλου τεθῇ

σ =

$\sigma = -\upsilon + s + \frac{\tau}{\varrho}$, ἢ $\sigma = -\upsilon + s - \frac{\tau}{\varrho}$, ἡλίκον ἂν ἀριθμὸν σημαίνοι τὸ s. Ἀλλαμὴν s — υ πάντα ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑφ' ἑαυτὸ ποιεῖται καταφάσκοντα, ἢ ἀποφάσκοντα, καὶ προσέτι δὴ καὶ αὐτὸ τὸ μηδενικὸν o. Οἷόν τε δ' ἑπομένως καὶ $-\upsilon + s + \frac{\tau}{\varrho}$, ἢ $-\upsilon + s - \frac{\tau}{\varrho}$, πάντα ἀριθμὸν σημαίνειν κλασματώδη, ἀληθῆ ἢ νόθον, καταφάσκοντα ἢ ἀποφάσκοντα. Ἔσαι ἄρα $(\alpha + \beta)^\sigma = \alpha^\sigma\Sigma$, καὶ ἐν ᾧ τὸ σ ἀριθμὸν ἡλικονῦν κεκλασμένον δηλῦν ὑποτίθεται. Ὅπερ ἰῶ τὸ Δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 745. Γινωσκομένης ἄρα τῆς ἀπὸ ῥίζης α, δυνάμεως α^σ, τῆς κατὰ πᾶν τὸ δοθὲν ἐπίσημον σ, εἴπερ εὑρεθῆναι δυνατὸν τὸ Σ πρὸς τὸ αὐτὸ σ, διὰ πολλαπλασιασμῦ ἐντεῦθεν συςήσεται ὁ $\alpha^\sigma\Sigma$ τύπος, ὁ τῇ κατὰ τὸ αὐτὸ ἐπίσημον σ δυνάμει ἴσος, τῇ ἀπὸ τῦ διωνύμυ α + β, ὅπερ συγκροτεῖται τῆς α ῥίζης δι' ἡλικησῦν ποσότητο β ἐπαυξομένη, ἢ μειυμένης. Τεθείη γὰρ ἂν τὸ β καὶ ἀποφατικῶς· ὗ γενομένυ ἀντὶ α + β κείσεται α — β. Ἀλλὰ γὰρ τὸ Σ διὰ τῦ ςίχυ

$$1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta^3}{\alpha^3} + \text{κξ.}$$

ᾧπερ ἴσον τίθεται, ἐντελῶς ἐκ ἂν παραςαίη, ἀποφατικῦ, ἢ κλασματώδυς τῦ σ συγχάνοντος· ἑκατέρως γὰρ ὁ ςίχος ἀπέραντος. ςήσεται δὲ ὐδαμῦ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τελευτὴ τῶ ςίχω, ἐκ τῦ τινὰ τῶν παραγόντων τῶν ἐν ἑνίτινι τῶν ἐπ' αὐτῷ ὅρων, ἀποιχεσθαι εἰς τὸ μηδὲν (ὁ γὰρ τοιόσδε παράγων, ὡς

 ἄρα

ἄρα πᾶσι τοῖς ἑξῆς ἐφεπομένοις ὅροις τοῦ στίχου ἐνεπιχωρῶν, ἐξ ἀνάγκης καὶ τούτων ἕκαστον εἰς τὸ μηδὲν μεταποιήσει) ἵνα δὴ ὁ στίχος περανθείη ἀνάγκη πᾶσα τὸν παράγοντα εἶναι, ἤτοι $\sigma - 1 = 0$, ἢ $\sigma - 2 = 0$, ἢ $\sigma - 3 = 0$, ἤτι παραπλήσιον. Οὐκ ἔσται δὲ εἰμὴ τύχοι ἢ $\sigma = 1$, ἢ $\sigma = 2$, ἢ $\sigma = 3$· καὶ συνελόντα εἰμὴ σ ἀριθμὸς εἴη καταφάσκων καὶ ὁλοχερής.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 746. Λοιπὸν οὖν, ἔνθα σ ἀριθμός ἐστιν ἀποφάσκων, ἢ κλασματώδης, τὸ Σ κατὰ τὸ ὡς ἔγγιστα πειρᾶσθαι θηρᾶν, ἔστιν οὓς τῶν ἐπὶ τοῦ στίχου τῷ πρώτῳ ἐφεπομένων ὅρων, εἰς ἓν συγκεφαλαιοῦντας· τούτων δὴ ὅσῳ μείζων ὁ λαμβανόμενος ἀριθμὸς, τοσούτῳ καὶ τὸ Σ δοθήσεται ἀκριβέστερον, ἐπειδὰν οἱ παραλειφθέντες ὅροι τῶν ἐν τῷ στίχῳ τῇ πρὸς τοὺς προσληφθέντας παραθέσει βραχεῖς τινες ὅσον ἄλις εἰσίν. Ἄλλως καὶ γὰρ τοσῶδε μεῖζον τὸ διάπτωμα ἔσται, ὅσῳ τῶν παραλειφθέντων ὅρων τὸ κεφάλαιον, μεγεθύνεται· προϊὸν δὲ, ὡς καὶ ὑπὲρ τὸ ἐκ τῶν προσληφθέντων γίνεσθαι, καὶ ἀνύποιστον. Ἤρτηται δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστου τῶν ἐπὶ τοῦ στίχου ὅρων πρῶτον μὲν ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ ἐπισήμου σ, ὃ δοθὲν ἤδη, τροπιὼ οὐδεμίαν πείσεται τὸ παράπαν· ἔπειτα δὲ καὶ ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ λόγου $\alpha : \beta$· ὅσῳ γὰρ μείζων ὅδε, τοσούτῳ ἔλαττον ἔσται τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ἔλαττον ἔτι τὸ $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, καὶ πολλῷ ἔτι ἔλαττον τὸ $\frac{\beta^3}{\alpha^3}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὥστε τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ βραχέος πάνυ τυγχάνοντος, τοὺς ἐν τῷ στίχῳ ὅρους ὅτι τάχιστα ἐξ ἀνάγκης διὰ τῶν παραγόντων $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, $\frac{\beta^3}{\alpha^3}$, ὑπομειοῦσθαι καὶ διαφθείνεσθαι.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 747. Καὶ εἰ τοίνυν παρ' ἡμῖν ἐςὶ, τὸν α : β λόγον, ληπτέον ὡς μέγιςον. Ἐπιτρέπεται δὲ ἡ μεταξὺ πλείςων λόγων τοῦ δοκοῦντος αἵρεσις ἐπὶ πολλῶν προβλημάτων, ἃ ὑπὸ τὸ καθόλου τόδε θεώρημα περιείληπται· ἐξ ὧν τὸ συνεχέςατα ἁπάντων ἐπιλυθὲν, ἀποχρήσει, ὥςε καὶ τῆς τῶν λοιπῶν ἐπιλύσεως κανόνα οἷον τοῦτον προκεῖσθαι καὶ γνώμονα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 748. Ἀριθμοῦ δοθέντος παντὸς, τὴν καθ' ἡλικίαν οὖν τάξιν ῥίζαν, διὰ τοῦ δυωνυμικοῦ τύπου παραςῆσαι, ἐν, ὅσῳ ἄν τις βούλοιτο, ἐλαχίςῳ τῷ διαπλώματι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 749. Λυθήτω δὴ ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς Α, οὗπερ ἡ κατὰ τὴν τάξιν σ ῥίζα ζητεῖται, εἰς μέρη δύο· ὧν τὸ μὲν πρῶτον α, ἔςω ἡ κατὰ τὴν σ τάξιν δύναμις ἀριθμοῦ τινος ὃς ἂν, ἐν ὑπεροχῇ καίτοι τινὶ, ἢ ἐλλείψει, ὅτι ἔγγιςα ὅμως τοῦ Α γίγνοιτο· τὸ δὲ δεύτερον β ἔςω = Α − α, ὃ καὶ ἀποφατικὸν ἔςαι, τοῦ α μεγέθει τὸ Α ὑπερβάλλοντος. Ταῖς οὖν δυνάμεις τῶνδε τῶν γραμμάτων, ἀντὶ τοῦ α῾Σ, ἀνεπτυγμένως τεθέντος (§. 743.) ἀντικατάςησον ἐπὶ τὴν τῶν ὅρων συγκρότησιν χωρῶν, εἰς ὃ πολλοςὸς ὁ ἔσχατος προκύψειε τῇ βραχύτητι, ὡς ἔχειν καὶ ἀδεῶς ἀλογεῖσθαι διὰ σμικρότητα· οἱ γὰρ δὴ πρὸ τοῦδε τεταγμένοι ὅροι εἰς ἓν ἀθροισθέντες δώσουσι τὸ ζητούμενον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 750. Ἐπὶ ῥίζῃ τῇ τετραγωνικῇ ἐςὶ σ = ½. Ἐὰν ἄρα ἡ κατὰ τήνδε τὴν τάξιν ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 50 ᾖ ζητουμένη, ἐκείνου εἰς μέρη δύο διαλυθέντος, ὧν ἂν τὸ πρῶτον τετράγωνον ᾖ, τοῦ προτεθέντος 50 βραχύτι διαλλάσσοντος, ἔσαι $50 = 49 + 1$· τεθέντων οὖν τοῦ μὲν $\alpha = 49$, τοῦ δὲ $\beta = 1$, ἔσαι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{49}$· καὶ $\alpha^{1:2} = \sqrt{49} = 7$. Ὡς εἴγε καὶ αἱ τῶν γραμμάτων σ καὶ $\frac{\beta}{\alpha}$ σημασίαι εἰς τὸν στίχον

$$1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \text{κ.ξ.}$$

εἰσενεχθεῖεν, εὑρεθήσεται τὸ Σ, ἐκ τῶν προτερευόντων ἐπὶ τοῦ στίχου ὅρων, κατ' ἀριθμὸν τὸν προσήκοντα παραληφθέντων, τοῦ ἀκριβοῦς ὅσον ἄλις γινόμενον $\doteq 1,01015254$· τούτου γὰρ διὰ 7 πολλαπλασιασθέντος προκύψει $\sqrt{50} = 7,0710678$, ὡ. ἔγγιστα.

Ζητουμένης δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 90, ἐξέσται λαβεῖν τὸ $\alpha = 100$, ὡς εἶναι τὸ $\beta = -10$, τὸ δὲ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-10}{100} = -\frac{1}{10}$, ὃ δήπου κλάσμα καίτοι μὴ πάνυ βραχὺ τυγχάνον, τάγε μὴν τὸν ὑπολογισμὸν ἐπὶ τὸ ῥᾷστον ἀνακαλεῖ, καθ' ὃν ἐὰν εὑρεθῇ Σ, γενήσεται $\sqrt{90} = 10\Sigma$. Ἔστι γὰρ ἐνταῦθα $\alpha^{1:2} = 10$.

Ζητουμένης δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 2, οὐκ ἂν ἀριθμὸς ἄλλος ληφθείη ἀντὶ τοῦ α μείζων ἢ 1, ὥστε γένοιτ' ἂν καὶ $\beta = 1$, καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, ἀφ' οὗ καὶ τὸν γινόμενον στίχον, ὅτι βράδιστα τοὺς ὅρους ἀπομειωθησόμενον ῥᾴδιον προϊδεῖν· ληφθήσεται τοίνυν $\alpha = 1,96$. ὅδε γὰρ ὁ ἀριθμὸς τῆς 1, 4 ῥίζης ὁ τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἔσται $\beta = 2 - \alpha = 0,04$· καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{0,04}{1,96} = \frac{0,01}{0,49} = 0,020408$, ἔγγιστα· ὃς γὰρ ἂν τούσδε τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὸ δέον μετιὼν εὕροι τὸ Σ, ἕξει $\sqrt{2} = 1,4 \times \Sigma$.

§. 751.

§. 751. Ὑπὲρ δὲ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐστὶ $\sigma = \frac{1}{3}$. Ἐὰν οὖν ἡ κυβικὴ ῥίζα ἡ ζητουμένη τοῦ ἀριθμοῦ 500, ληφθήσεται $\alpha = 512$, ὁ κύβος ὁ ἀπὸ ῥίζης 8, ὥστε γενέσθαι $\beta = -12$, καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-12}{512} = \frac{-3}{128}$, ὃ δὴ κλάσμα, ἅλις ἔχει βραχύτητος. Καὶ κατὰ ταῦτα δή τις λήψεται $\sigma = \frac{1}{3}$, καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-3}{128}$, καὶ εὑρὼν τὸ Σ, ἕξει $\sqrt[3]{500} = 8\Sigma$.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΚΑΘΟΛΟΥ.

§. 752. Τῆς **Καθόλου** τῆς δὲ **Λογιστικῆς**, ἣν καὶ **Γραμματικὸν Ὑπολογισμὸν**, καὶ **Ἀλγόριθμον Εἰδικὸν**, ἢ **Συμβολικὸν** εἰώθασιν ἀποκαλεῖν, ἥ,τε μονονουχὶ τὰ Στοιχεῖα πάντα ἐν τοῖς εἰς τόδε ἡμῖν ἐκτεθεῖσιν ἐμπεριείληπται, οὐκ ἂν ἔχοι τις εἰπεῖν ὅση ἡ συντέλεια ἐστὶ καὶ ἡ χρῆσις· οὐ μόνον δὲ ἐν ταῖς τῶν προβλημάτων **Ἀναλύσεσιν**, ἀλλὰ καὶ κατ' αὐτὰς οὐδὲν ἧττον τὰς **Συνθέσεις**, ἔνθα τίποτε ἄρα τὸ ἐκ δοθέντων τινῶν, ὧδε ἢ ὧδε συνημμένων, ζητούμενον ἐπιφερόμενον. Ἀμέλει τοι γὰρ ἐὰν $\alpha + \beta$ ἐπὶ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασθῇ, οἷον ποτὲ τὸ ἐντεῦθεν ἔσται τετράγωνον, $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta$, ὁποῖα δ' ἄττα τὰ μέρη ἐξ ὧν αὐτὸ συγκροτεῖται, αὐτίκα μάλα πάρεστι συνορᾶν. Ἐὰν δὲ $\alpha - \beta$ διὰ $\alpha - \beta$, ὡς οὕτως ἂν ἔχον προκύψειεν $\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta$. Ἐὰν δὲ $\alpha + \beta$ διὰ $\alpha - \beta$, ὅτι $\alpha\alpha - \beta\beta$ ἔσται τὸ γινόμενον· ὅπερ οὐδὲν ἀλλ' ἢ τῶν ἀπὸ α καὶ β τετραγώνων ἐστὶν ἡ διαφορά. Καὶ ἄλλα δ' ἐπὶ τούτοις Θεωρήματα συχνὰ ἀπαντᾷ, ἃ προχείρως οὕτω, κἂν διὰ ψιλοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διασαφοῖτο καὶ ἀναπτύσσοιτο. Ἐν οἷς καὶ τὰ πλεῖστα φέρεται τῶν ἐν τῷ Β'. τῶν παρ' ΕΥΚΛΕΙΔΗ Στοιχείων, καθὰ δήπου τοῖς τὰ Ἀλγεβραϊκὰ μετιοῦσιν ἐστὶ κατάδηλον.