λίκον προελεύσεται τὸ $\gamma = \Gamma$. Καὶ ἔσαι $(2\alpha - 3\beta + \gamma)^3 = \Delta$· ὥστε ἡ ῥίζα ἡ κυβικὴ ἤδη εὕρηται ἡ ζητουμένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 704. Οὕτω μὲν δὴ αἱ ῥίζαι ὑπεξάγονται, ἐξ ὁποσωνοῦν ἂν ὦσιν ὀνομάτων συγκείμεναι, ἀπὸ τῶν δυνάμεων τῶν τελείων. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ἐπισήμου τῆς δυνάμεως ἀρτιαρίθμου τυχάνοντος, ἀεὶ δυνατὸν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔχειν διττὴν (§. 691.) παρὰ τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν, καὶ ἡ ἑτέρα τῇ αὐτῇ ἂν μεθόδῳ ληφθείη, ἀποφατικῆς μεταληφθείσης τῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου τῆς κατὰ τὸ Δ δυνάμεως. (οἷον ἐπὶ τοῦ Β΄. τῶν προτεθέντων παραδειγμάτων τεθείσης τῆς $A = -\gamma$)· κἀντεῦθεν ἐφεξῆς τῆς πράξεως περανθείσης κατὰ τὴν ταχθεῖσαν μέθοδον. Ἀλλὰ γὰρ πολλῷ ἂν εὐπετέστερον εἴη, τὰ σημεῖα πάντα τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ἀμείβειν, οὕτω γὰρ ἐπὶ τοῦ εἰρημένου παραδείγματος γένοιτ᾽ ἂν ἡ ἑτέρα τῶν ῥιζῶν $-\gamma + \beta - 2\alpha$· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

Ῥάδιον δὲ συνιδεῖν, ὡς οὐκ ἐπὶ πάσης, ὅπως ἂν ἔτυχε δηλουμένης ποσότητος, τὴν καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν ἡμῖν ἐπιταχθεῖσαν ῥίζαν, κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον οἷόντε λαβεῖν. Αὐτίκα καὶ γὰρ τὴν ἀπὸ $\alpha^2 + \beta^2$ τετραγωνικὴν εὐκρινῶς τε καὶ ἄνευ τῆς τῶν ῥιζικῶν καλουμένων σημείων παρεμπλώσεως, ἀποδοῦναι ἀμήχανον. Καὶ εἰσὶ δὲ κατὰ ταύτην καὶ ἄλλαι ἀριθμοῦ ἐπέκεινα παντὸς, οὕτως ἀναπόδοτοι.

§. 706. Οὐμὴν ἀλλ᾽ ὅπως ἂν καὶ προκέοιτο δηλουμένη τις ποσότης οἷον ἡ Α, ἐὰν μονὰς ληφθῇ αὐτῇ τῇ Α ὁμογενὴς, ἀεί τις μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τῆς εἰρημένης ποσότητος Α ἐμφιλοχωρήσειεν ἂν μέση ἀνάλογον. Ἀμέλει τοι ἐὰν ὦσιν 1 καὶ Α ἐν γραμμαῖς διδόμεναι, ῥᾷστα ἡ μέση (§. 452.) ἐξευρεθήσεται. Εὑρεθεῖεν δ᾽ ἂν καὶ μέσαι δύο ἀνάλογον μεταξὺ ξὺ τῶν αὐτῶν 1 καὶ Α, (εἰ καὶ μὴ διὰ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας τοῦτο ἐνδέχεται)· καὶ τρεῖς δὲ, καὶ ὁποσουοῦν. Εἰ γὰρ ληφθείη α ὁποίατισοῦν, συσταίη δέ τις πρόοδος γεωμετρικὴ, οἷον

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6,\ \text{κξ.}$$

τεθείη δὲ $Α = \alpha^2$, γένοιτ᾽ ἂν μεταξὺ τῶν 1 καὶ Α μέση ἀνάλογος ἡ α· τεθείσης δὲ $Α = \alpha^3$, ἔσται α ἡ πρώτη τῶν δύο μέσων ἀναλόγων α καὶ α^2 μεταξὺ 1 καὶ Α. Ἐὰν δὲ τεθῇ $Α = \alpha^4$, ἔσται α ἡ πρώτη τῶν τριῶν μέσων ἀνάλογον α, α^2, α^3 μεταξὺ 1 καὶ Α· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Δῆλον δὲ, ὡς ἥτις ποτ᾽ ἂν ᾖ ἡ Α, ἀεὶ τῇ κατὰ τὸ μέγεθος προσαυξήσει, ἢ ἀπομειώσει τῆς προσληφθείσης α, εἰς ἐκεῖνο τέως πάρεστιν ἐφικέσθαι, ὥστε γενέσθαι $Α = \alpha^2$, ἢ $Α = \alpha^3$, ἢ $Α = \alpha^4$, ἢ $Α = \alpha^5$, καὶ ἐν γένει $Α = \alpha^\sigma$.

§. 707. Ἐξ ὧν οὖν εἴδομεν, ἐὰν $Α = \alpha^\sigma$, ἐν οἷς ἂν σημαίνοι $\sqrt[\sigma]{Α}$, ἀεὶ ἔσται α (§. 654.). Οὐκοῦν $\sqrt[\sigma]{Α}$ ἀείτινα ποσότητα ἀληθῆ καὶ πραγματιώδη ἡμῖν διασημανεῖ, εἴτι ποσὸν ἁπλῶς ληφθὲν, ἢ ἐν καταφάσει διὰ τοῦ Α παριστάνοιτο, ἡλίκος δ᾽ ἂν ὁ ἀριθμὸς σ τεθείη τὴν δύναμιν.

§. 708. Τοῦ δέ τοι Α καταφατικὴν ὑποδηλοῦντος ποσότητα, καὶ τοῦ σ ἀριθμοῦντινα τῶν ἀρτίων ὑποσημαίνοντος ἡ τοῦ τύπου $\sqrt[\sigma]{Α}$ σημασία, οὐχ ὅπως διὰ τοῦ καταφατικοῦ α, ἀλλὰ καὶ δι᾽ αὐτοῦ τούτου ἀποφατικῶς ἐκληφθέντος $-\alpha$, ἀείποτε ἕξει παρίστασθαι. Τοῦτο δὲ αὐτόθεν φανερὸν, ὅτι ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἐφ᾽ ἧς ὁ μὲν πρῶτος τῶν ὅρων 1, ὁ δὲ μετὰ τοῦτον $-\alpha$, ἅπασαι αἱ κατὰ τὰ ἀρτιάριθμα ἐπίσημα δυνάμεις, καταφατικαὶ οὐδὲν ἧττον προκύπτουσι. Γίνεται γὰρ ἡ πρόοδος,

$$1,\ -\alpha,\ \alpha^2,\ -\alpha^3,\ \alpha^4,\ -\alpha^5,\ \alpha^6,\ -\alpha^7,\ \alpha^8,\ \text{κξ.}$$

ταύτητοι καὶ ὁ τύπος $\sqrt[\sigma]{A}$ ἥπερ ὑπετέθη, ἀδιαφορήσει δήπου, εἰς τὸ εἴτε καταφατικῶς διὰ + α, εἴτε καὶ ἀποφατικῶς διὰ − α παρίςαθαι.

§. 709. Ἀλλ᾽ ἐὰν τὸ ἐπίσημον σ περιττάριθμον ᾖ, ὁ τύπος $\sqrt[\sigma]{A}$ οὔτ᾽ ἂν ἀποφατικὴν ποσότητα παραςήσειε τοῦ Α καταφάσκοντος, οὔτε δὴ καταφατικήν ποτε τοῦ Α ἀποφάσκοντος· τοῦ γὰρ α ἐν μὲν καταφάσει τεθέντος, ἅπασαι αἱ τὰ ἐπίσημα περιττάριθμοι δυνάμεις καταφήσουσιν· ἐν ἀποφάσει δὲ, ἀποφήσουσιν, ἧπου σαφῶς ἐκ τῶν προτεθεισῶν προόδων πάρεςι συνορᾶν. Καίτοι καὶ οὕτω διὰ τοῦ $\sqrt[\sigma]{A}$ ποσότης οὐδὲν ἧκιςα δηλωθήσεται ἀληθὴς καὶ πραγματιώδης, κἂν ἀποφάσκον τὸ Α ᾖ.

§. 710. Ἀλλὰ γὰρ τοῦ μὲν Α ἀποφατικόν τι σημαίνοντος, τοῦ δὲ σ ἀρτιαρίθμου ὄντος, οἷον 2, 4, 6, κτξ. οὐκ ἄντις δοθείη ποσότης, ἡ τῇ δηλώσει $\sqrt[\sigma]{A}$ συμφώνως βαίνουσα. Εἴτε γὰρ ἐκείνη καταφάσκουσα εἴη, εἴτ᾽ οὖν ἀποφάσκουσα, ἀείποτε τῶν ἐν ἀρτιαρίθμοις τοῖς ἐπισήμοις δυνάμεων αἱ σημασίαι, ὧν μία τις εἶναι ὑπετίθετο καὶ ἡ τοῦ Α, εἰσὶ θετικαί. Ταύτητοι ἐὰν $\sqrt[\sigma]{-A}$ ὑποδηλοῦν τὸ α τεθῇ, τουτὶ τὸ α οὔτε θετικὸν ἔςαι, οὔτ᾽ ἆρ᾽ ἀποφατικὸν, πάντῃ δὲ πάντως ἀδύνατον.

§. 711. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ῥίζης $\sqrt[\sigma]{A}$ τεθῇ σ = 4, καὶ Α = α^4, ἔςαι δὴ τῆς α^4 ποσότητος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα διττή· ἀμέλειτοι ἡ μὲν + αα, ἡ δὲ − αα· ὧν ἀφ᾽ ἑκατέρας, ἐὰν ἡ τετραγωνικὴ αὖθις ῥίζα ὑφαιρεθῇ, προκύψει τὸ ἐν γένει ὑπὸ $\sqrt[4]{\alpha^4}$ δηλούμενον. Καὶ εἰσὶ μὲν οὖν τοῦ τετραγώνου + αα, αἱ δισσαὶ ῥίζαι αὗται + α, καὶ − α· τοῦ δ᾽ ἀποφατικοῦ − αα, ἀληθεῖς μὲν καὶ πραγματιώδεις ῥίζαι τὸ παρά-

παράπαν οὐκ εἰσὶν, αἱ δὲ ἀδυνάτως ἔχουσαι οὕτως ἂν ἐπισημανθεῖεν· ἡ μὲν $+\sqrt{-\alpha\alpha}$, ἡ δὲ $-\sqrt{-\alpha\alpha}$.

Τὰς τοίνυν τέτταρας τάσδε ποσότητας, ἡ $\sqrt[4]{A}$ ἐξίσου δυνήσεται παραδηλοῦν· τῶν τε τεττάρων τούτων $+\alpha$, $-\alpha$, $+\sqrt{-\alpha\alpha}$, $-\sqrt{-\alpha\alpha}$ ἑκάστη τῆς α^4 ποσότητος ῥίζα ἂν τετάρτη ῥηθείη, καθ' ἣν δήπου σημασίαν καὶ α τὸ θετικὸν καὶ πραγματιῶδες, αὐτῆς ἐκείνης ῥίζα ἡ τετάρτη καλεῖται. Εὔδηλον γὰρ ὡς κἀκείνων ἑκάστη, ἐπὶ τὴν τετάρτην ἀρθεῖσα δύναμιν, α^4 ἀποδώσει, ἤτοι Α. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον χωροῦντας, καὶ πρὸς σ = 8, ὀκταπλῶς ἐστὶ συναγαγεῖν ἐκτιμωμένην τὴν $\sqrt[8]{A}$· ὡς μηδὲν ἄτοπον εἶναι ἐντεῦθεν ὑπολαβεῖν, καὶ διὰ τῆς $\sqrt[3]{A}$, καὶ τῆς $\sqrt[5]{A}$, καὶ τῶν ἄλλων ὅσαι τοιαῦται πλείους τὰς ῥίζας τῆς ποσότητος Α ὑποσημαίνεσθαι, τὰς μὲν δυνατῶς ἐχούσας, τὰς δὲ καὶ ἀδυνάτως· καταφατικὰς, ἢ ἀποφατικάς· κἂν ἄλλως ταύτας ἀνακαλύψαι οὐχ οὕτω ῥᾴδιον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 712. Λογικὴ ποσότης Ἀλγεβραϊκῶς εἰρήσεται, ἡ κατά γε τὰς προσληφθείσας ἐπωνυμίας, τῶν ῥιζικῶν ἄνευ σημείων, ἢ δυνάμεων οἷς τὰ ἐπίσημα κλασματικὰ, παρίστασθαι ἔχουσα. Ἄλογος δὲ ἡ κατ' αὐτὰς τὰς ἐπωνυμίας, ἄλλως προβάλλεσθαι μὴ δυναμένη, εἰ μὴ δι' ἐπισήμων κλασματωδῶν, ἤ τινων σημείων ἄλλων ἰσοδυναμούντων τοῖς ἐπισήμοις τοῖς κλασματώδεσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 713. Αἱ τοίνυν λογικαὶ ποσότητες οὕτως ἔχουσι τύπου· $\alpha^2 + 2\alpha\beta$· ἢ $\alpha^3 - \frac{2}{3}\alpha^2\beta + \frac{1}{4}\beta^3$· ἢ $\alpha^\mu - 2\alpha^\mu\beta^\sigma - 8\alpha^\mu\beta^\sigma\gamma^\tau$, τῶν μ, σ, τ ἀριθμοὺς οὑστινασοῦν ὁλοχερεῖς καταφατικοὺς, ἢ ἀποφατικὲς ὑποσημαινόντων. Ἀποκρουστέον γὰρ ἀπὸ τῶν ἐπισήμων τὰ κλάσματα· αἱ γὰρ ταῦτα φέρουσαι δυνάμεις ταῖς ῥιζικαῖς ποσότησιν ἴσα δύνανται· οἷον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$. Καὶ μὲν οὖν ἡ $\sqrt{\alpha^2}$ λογικὴ ποσότης ἐστὶν, ὡς ταὐτὸ σημαίνουσα τῷ α. Καθὰ δὴ καὶ $\sqrt{(\alpha\beta - 2\alpha\beta + \beta\beta)}$, καὶ $\sqrt[3]{\beta^6}$, καὶ ὅσαι τοιαῦται. Ἀλλ' ἡ $\sqrt{\alpha^2\beta}$, $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$, καὶ αἱ παραπλήσιαι εἰσὶν ἄλογοι. Οὐ μὴν ἀλλ' ἐὰν τὸ ἐπὶ τῆς $\sqrt{\alpha\alpha\beta}$ διὰ τοῦ β δηλούμενον, ἐπονομασθῇ γγ, ἔσται $\sqrt{\alpha\alpha\beta} = \sqrt{\alpha\alpha\gamma\gamma}$, ἧς μία τῶν τιμῶν καὶ ἡ αγ· καὶ τότε δὴ λογικὴ ὑπάρξει ἡ δήλωσις. Τοὐναντίον δὲ ἐὰν ἐπὶ τοῦ λογικῶς ἐκκειμένου τύπου $\alpha\alpha + 2\alpha\beta$, μετονομασθῇ $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$, ἡ αὐτὴ ποσότης οὕτως $\alpha\alpha + 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}$ δηλουμένη, ἄλογος ῥηθήσεται· ὥστε ἡ ἀλογία ἐκ τῶν προσληφθεισῶν ἐπωνυμιῶν ὅλως ἤρτηται.

§. 714. Οὐ κατὰ τὴν αὐτὴν δὲ ἔννοιαν ἐκδεκτέον ἡμῖν τὰς φωνὰς ἐνταῦθα, ᾗ καὶ τοῖς παλαιοτέροις ἐξείληπται. Ἐκεῖνοι μὲν γὰρ ποσότητας δύο **συμμέτρους** ἀλλήλαις ἐκάλουν, ὧν ἔστι κοινόν τι μέτρον λαβεῖν, ὥντε κατὰ τὸ ἀκόλουθον ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν ἑτέραν, ὡς ἀριθμὸς ἂν ἔχοι ὡρισμένος ὁλοχερὴς, πρὸς ἀριθμὸν ὡρισμένον ὁλοχερῆ. **Ἀσυμμέτρους** δ' ἔφασαν, ὧν μέτρον κοινὸν οὐδὲν ἐστὶ προσευρεῖν· ὧντε ὁ λόγος ἐν ἀριθμοῖς ὡρισμένοις ὁλοχερέσιν οὐκ ἂν παρασταίη. Οὕτω γραμμὰς συμμέτρους ἄντις εἴποι, καὶ τετράγωνα σύμμετρα, καὶ ποσότητας ὅσας ἄλλας. Ἄλογον δὲ οἱ παλαιοὶ γραμμὴν προσεῖπον τὴν μὴ μόνον γραμμῇ ἑτέρᾳ τῇ ἀντὶ μονάδος ληφθείσῃ ἀσύμμετρον, ἀλλ' ἀφ' ἧς καὶ τὸ τετράγωνον ἀσυμμέτρως ἔχει, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀντὶ μονάδος ληφθείσης τετράγωνον. Ἀλλ' ἐπειδὴ γὰρ οὐκ αὐτὰ ἡμῖν ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰ ποσὰ θεωρεῖται,

ρεῖται, ἀλλὰ τῶν ποσῶν μόνα τὰ εἴδη, ταύτῃ καὶ τῶν τοιῶνδε σημασιῶν ἀποκλίνειν θέμις. Οὐδὲ γὰρ τὰ ἀλγεβραϊκῶς ἄλογα, καθόλου τε καὶ ἁπλῶς θεωρούμενα, ποσὰ ἄττα ὑποδηλοῦν πεφύκασιν ἐν οἱαδήποτε ὑποθέσει γεωμετρικῶς, ἢ ἀριθμητικῶς τῇ μονάδι ὄντα ἀσύμμετρα· οὐδὲ μὲν οὖν ταύτῃγε σύμμετρα τοὐναντίον τὰ λογικά. Καὶ γὰρ $\sqrt{a}$ καθόλου μὲν ἄλογον ἐστὶν, ἐὰν δὲ τὸ α σημαίνῃ 1, ἢ 4, ἢ 9, ἢ ὁντινοῦν ἕτερον ἀριθμὸν τετράγωνον, δῆλον ὡς τὸ $\sqrt{a}$ τηνικαῦτα 1, ἢ 2, ἢ 3, καὶ συνελόντι φάναι ἀριθμόν τινα τῇ μονάδι σύμμετρον σημανεῖ. Τοὐναντίον δὲ τὸ α ἀλγεβραϊκῶς ἐστὶ λογικόν. Ἀλλ᾽ ἐὰν εἰς δήλωσιν ἥκῃ $\sqrt{2}$, ἢ $\sqrt{3}$, ἢ $\sqrt[3]{9}$, ἔσται δὴ τὸ α τῇ μονάδι ἀσύμμετρον.

§. 715. Τὸ ἰδίως ἄλογον, ἀεί τι ποσὸν ἐστὶ κυρίως καὶ ἀληθῶς, καὶ τῶν ἥκιστα ἀδυνάτων. Διὸ τὸ ἀδύνατον, κἂν εἰ καθ᾽ ὁμοιότητα τοῦ ἀλόγου προβάλλοιτο, οἷον τὸ $\sqrt{-a}$ οὐκ ἂν ἄλογον κυρίως ἐπονομάζοιτο. Ὑπὸ δὲ τῷ ἐπωνύμῳ τῶν Ῥιζικῶν, καὶ ταῦτα πιπτέτω τὰ οὕτως ἀδύνατα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 716. Οἱασδηποτοῦν ποσότητος Α, δυνατῶς τε ἅμα καὶ καταφατικῶς ἔχειν ὑποτιθεμένης, ἡ τετετραγωνικὴ, ἢ κυβικὴ, ἢ τάξεως ἑτέρας ἡστινοσοῦν ἡ ῥίζα, τῆς διὰ τοῦ ἐπισήμου σ γνωριζομένης, Πρωτεύουσα μὲν εἰρήσεται ἡ δυνατῶς ὡσαύτως καὶ καταφατικῶς ἔχουσα, εἴτε λογικὴ εἴη, εἴτ᾽ ἄλογος. Δευτερεύουσα δὲ τῶν τῆς αὐτῆς ποσότητος Α ῥιζῶν ἡ τυχοῦσα ἄλλη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 717. Πρωτεύουσα τοιγαροῦν τοῦ ἀριθμοῦ 64, τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ + 8· δευτερεύουσα δὲ − 8·

ἑκα-

ἑκατέρα δὲ δυνατή. Τοῦ δ' αὐτοῦ ἀριθμοῦ κυβικὴ μὲν ῥίζα πρωτεύουσα ἐστὶ + 4· τῶν δέ τοι δευτερευουσῶν οὐδεμία τυγχάνει ἔχουσα δυνατῶς. Ὡσαύτως ἡ τοῦ αὐτοῦ ἐκείνου ἕκτη ῥίζα πρωτεύουσα ἐστὶ + 2, τῶν δὲ ἐν ταῖς ἑκτοταγέσι δευτερευουσῶν μία καὶ ἡ − 2· τοῦγε μὴν ἀριθμοῦ 16, ῥίζης τεταρτοταγοῦς πρωτευούσης τῆς + 2, εἴη μὲν ἂν καὶ δευτερεύουσα δυνατὴ ἡ − 2· εἴη δ' ἂν καὶ τῶν ἥκιστα δυνατῶν παρὰ ταύτην, καταφατικὴ μὲν $+\sqrt{-4}$, ἀποφατικὴ δὲ ἡ $-\sqrt{-4}$. Οὕτω δὲ δὴ καὶ τῆς ἐν καταφάσει μονάδος + 1 ῥίζα τυγχάνει πρωτεύουσα παντοταγὴς ἡ + 1.

Ἀριθμοῦ δὲ ἀποφατικοῦ, οἷον τοῦ − 64, ῥίζα πρωτεύουσα οὐδεμία, κἂν ἄρτιον εἴη, κἂν περιττὸν τῆς κατὰ τὴν ῥίζαν τάξεως τὸ ἐπίσημον. Ἀλλ' εἰ γὰρ περιττὸν, ἡ δευτερεύουσα − 4 οὐκ ἀδυνάτος· μόνῳ τῷ σημείῳ διενηνοχεῖα τῆς + 4 ῥίζης τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 64, ληφθέντος καταφατικῶς. Ὥστε ἐπιδήλου οὔσης τῆς τοῦ 64 ἀριθμοῦ κυβικῆς ῥίζης, μηδὲ τὴν ὁμοταγῆ λανθάνειν τοῦ αὐτοῦ ἐν ἀποφάσει δυνατῶς ἔχουσαν. Κρατεῖ δὲ κἀπὶ τῶν λοιπῶν τῶν παραπλησίων ὁ αὐτὸς λόγος.

§. 718. Ἀτενῶς δ' ἐνταῦθα τὸν νοῦν ἐπιστητέον, ὡς ἡ $\sqrt[a]{A}$ κατ' ἔννοιαν γράφεσθαι ἔχει διττήν· τῇ μὲν, εἰς δήλωσιν μόνης ἰδίως τῆς πρωτευούσης ῥίζης, τῆς ἐν τῇ δυνάμει ἧς α τοὐπίσημον· τῇ δὲ, εἰς δήλωσιν γενικωτέραν καὶ ἀοριστάνουσαν, ὥστε οἱανδήποτε διὰ τοῦ $\sqrt[a]{A}$ καθόλου ῥίζαν ὑποσημαίνεσθαι τῶν κατὰ τὴν ἐπισημανθεῖσαν τάξιν, εἴτε τὴν πρωτεύουσαν αὐτὴν, εἴτε καὶ τῶν δευτερευουσῶν τινὰ τυχοῦσαν. Τὸ δὲ διττὸν τῆς κατὰ τὸν εἰρημένον τύπον δηλώσεως οὐχ οἷόντε διακρίνειν, εἰμήποθεν ἄλλοθεν εἰδέναι παρείη, πότερον ἐπὶ παντὸς τοῦ προκειμένου ἐκδεκτέον ἐστίν.

§. 719. Ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ παρόντος παρὰ τὰς πρωτευούσας τῶν ῥιζῶν, περὶ μόνων τῶν δευτερευουσῶν ἔσαι λόγος, ὅσαι οὕτως ὑπὸ τῶ $\overset{\circ}{V}A$ περιέχονται, ὡς ἐπὶ τὸ πρωτεύειν μεθίςασθαι τῶν κατὰ τὴν Α ποσότητα σημείων ἀμειβομένων, καθ᾽ ὁποίανδήποτ᾽ ἂν τοῦτο ὑπόθεσιν γίγνοιτο. Αἱ γὰρ λοιπαὶ οὔτ᾽ ἂν διὰ τῶν εἰς τόδε παραδοθέντων σαφῶς ἀναπτυχθεῖεν, καὶ οὐδεμιᾶς, ὅ, τι μὴ κατὰ τὴν λεπτοτέραν ἀνάλυσιν, γένοιντο χρήσεως. Τῶν δὲ δὴ ὑποθέσεων καθ᾽ ἃς τὰ τῆς ποσότητος Α σημεῖα ἀμείβεται, πρόχειρος αὕτη· ἐὰν ἀμέλειτοι ᾖ $A = (-\alpha)^3$, ἢ $A = (-\alpha)^5$, ἤτι τοιοῦτον· τουτέστιν ἐὰν Α ὁποιαδήποτε τύχῃ δύναμις, περιτταρίθμου μὲν ἐπισήμου, ποσότητος δὲ ἀποφατικῆς τίθεται $-\alpha = \gamma$. Ἐντεῦθεν γὰρ δῆλον ὅτι ἀπὸ $A = (-\alpha)^3$, γίνεται $A = \gamma^3$. κτ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 720. Ἐκ δὲ δὴ τῶν εἰρημένων ἐπιφέρεται, ὅτι τῆς σημασίας ἐπὶ μόνας ἰδίως τὰς πρωτευούσας τῶν ῥιζῶν προσδιωρισμένης, ἐὰν ᾖ $\alpha = \beta$, ἔσαι καὶ $\overset{\circ}{V}\alpha = \overset{\circ}{V}\beta$· καὶ $\overset{\sigma}{V}\alpha^{\mu} = \overset{\sigma\tau}{V}\alpha^{\mu\tau}$· εἴτ᾽ οὖν $\alpha^{\mu:\sigma} = \alpha^{\mu\tau:\sigma\tau}$ κἀντεῦθεν καὶ $\overset{\circ}{V}\alpha^{\mu\circ} = \alpha^{\mu}$. Ἄτα δὴ πρὸς σημασίαν τῆς ἀορίστου δηλώσεως, τῆς παρὰ τὴν πρωτεύουσαν καὶ τὰς δευτερευούσας ἁπάσας ῥίζας περιλαμβανούσης, πῇ μὲν εὐλαβῶς προσαρμοστέον, πῇ δὲ καὶ οὐδὲ τοῦ ἀληθοῦς ἐχόμενα ἡγητέον. Οὕτω γὰρ καίτοι $4 = 4$, οὐ μὴν ἀλλ᾽ οὐκ ἀδιαφόρως ᾗπερ ἔτυχε θετέον $V4 = V4$. Ἐὰν γὰρ ἐκ τῆς ἐπὶ $V4$ διττῆς σημασίας, ἐπὶ μὲν θατέρου τῶν τεθέντων ληφθῇ $+2$, ἐπὶ δὲ θατέρου -2, ἕψεται δὴ εἶναι $+2 = -2$: ὅπερ ἄτοπον. Καὶ ἐὰν κατὰ τὴν αὐτὴν καθόλου σημασίαν τεθῇ $\overset{2}{V}\alpha^2 = \alpha$, μία μόνη τετραγωνικὴ παρασημανθήσεται ῥίζα τοῦ α.α. τετραγώνου, ὁπότε τε $+\alpha$, καὶ $-\alpha$ δύο εἰσίν. Ὡσαύτως καὶ ἐὰν $\sqrt[4]{\alpha^2}$, τῇ τῶν ἐπισήμων διὰ 2 διαιρέσει, ἀντὶ $\sqrt{\alpha}$ ἐκληφθῇ, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν τῷ $\sqrt[4]{\alpha^2}$ ῥιζῶν $+\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$, $+\sqrt{-\alpha}$, $-\sqrt{-\alpha}$, αἱ δύο ἔσχατοι ἐκπεσοῦνται, ὡς ἅτε μὴ τῇ κατὰ γένος δηλώσει τῆς $\sqrt{\alpha}$ περιεχόμεναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 721. Ἐὰν ἐπὶ τῶν $\sqrt[\varepsilon]{\alpha} = \sqrt[\varepsilon]{\beta}$, ἀντὶ μὲν τοῦ α τεθῇ $-\gamma$, ἀντὶ δὲ τοῦ β τεθῇ $-\varepsilon$, ἡ αὐτὴ ἰσότης ἐκκείσεται καὶ διὰ τῶν $\sqrt[\varepsilon]{-\gamma} = \sqrt[\varepsilon]{-\varepsilon}$, ἐκ τῆς $-\gamma = -\varepsilon$ παραπλησίως ἑπομένη, καθάπερ οὖν καὶ ἡ $\sqrt[\varepsilon]{\alpha} = \sqrt[\varepsilon]{\beta}$ ἐκ τῆς $\alpha = \beta$ ἕπεται. Οὕτω δέτοι καὶ $\sqrt[\varepsilon]{(-\gamma)^{\mu}} = \sqrt[\varepsilon\tau]{(-\gamma)^{\mu\tau}}$, καὶ $\sqrt[\varepsilon]{(-\gamma)^{\mu\varepsilon}} = (-\gamma)^{\mu}$. Αἱ μὲν οὖν ῥίζαι ἃς ἐνταῦθα τιθέαμεν πρωτεύουσαι γίνονται, τῶν κατὰ τὰς ποσότητας $-\gamma$ καὶ $-\varepsilon$ σημείων ἀμειβομένων· ἤ, ὃ ταυτόν ἐστιν, ἐὰν ἀντὶ μὲν $-\gamma$, ἀντικαταστῇ α, ἀντὶ δὲ $-\varepsilon$, ἀντικαταστῇ β. Ἃ τοίνυν περὶ τῶν πρωτευουσῶν ῥιζῶν ἡμῖν τεθεώρηται, καὶ περὶ τῶν δευτερευουσῶν, ἃς μόνας ἐνταῦθα ἐπιθεωροῦμεν, αὐτὰ δὴ ταῦτα παραπλησίως ἀληθεύσει, εἰ μόνον αἱ τοιαίδε ῥίζαι οὕτω διασημαίνοιντο, ὡς ἐνταῦθα διασεσήμανται· μηδ' ἀντὶ $(-\gamma)^{\mu}$ τὸ προκύπτον τιθοῖτο· τὸ ἀπὸ τῆς ἀποφατικῆς $(-\gamma)$ ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ μ ἐπίσημον δύναμιν πράγματι ἐξαρθείσης. Τουτὶ γὰρ ἂν καὶ εἰς ἀπάτην ἡμᾶς παρακρούσειε τοῦ κατὰ τὸ μ ἀριθμοῦ ἀρτίου τυγχάνοντος· τηνικαῦτα γὰρ ἡ δύναμις καταφάσκουσα, ἔσται ἡ αὐτὴ τῇ $(+\gamma)^{\mu}$ (§. 691.). Καὶ εἴπερ ἄρα τεθείη $(-\gamma)^{\mu} = (+\gamma)^{\mu}$, τῇ τῶν ῥιζῶν ὑπεξαγωγῇ ἔσται $-\gamma = +\gamma$· ὅπερ ἄτοπον.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 722. Ὡσαύτως καὶ τοῦ μὲν ἀπὸ τῆς ῥίζης $\sqrt[\epsilon]{\alpha}$ τετραγώνου ὄντος $\sqrt[\epsilon]{\alpha^2}$, τοῦ δὲ κύβου $\sqrt[\epsilon]{\alpha^3}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἔσται δὴ καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς $\sqrt[\epsilon]{(-\gamma)}$ τετράγωνον $\sqrt[\epsilon]{(-\gamma)^2}$· ὁ δέ τοι κύβος $\sqrt[\epsilon]{(-\gamma)^3}$· καὶ ἐν γένει ἡ κατὰ τὸ μ ἐπίσημον δύναμις, αὕτη $\sqrt[\epsilon]{(-\gamma)^\mu}$. Τὰ δ' αὐτὰ καὶ οὕτως ἂν γράφοιτο, ὡς ἀντὶ μὲν $\sqrt[\epsilon]{(-\gamma)}$, κεῖσθαι $(-\gamma)^{1:\epsilon}$· ἀντὶ δὲ $\sqrt[3]{(-\gamma)^2}$ τίθεσθαι ἐν ἰσότητι $(-\gamma)^{2:3}$· καὶ ἐν γένει $\sqrt[\epsilon]{(-\gamma)^\mu} = (-\gamma)^{\mu:\epsilon}$ (§. 662.). Καὶ τόνδε ἄρα τὸν τρόπον τῶν ῥιζῶν διατυπουμένων, ὅσαδήποτε περὶ τοῦ τύπου $\alpha^{\mu:\epsilon}$ προαπεδείχθη, ταῦτα δὴ καὶ τῷ $(-\gamma)^{\mu:\epsilon}$ προσαποδοθήσεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 723. Οὕτω δὴ τετράγωνον ἐξευρίσκεται ἀπὸ ῥίζης $\sqrt{-\gamma}$, τόδε $\sqrt{(-\gamma)^2} = (-\gamma)^{2:2} = (-\gamma)^1 = -\gamma$. Καὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς δὲ $\sqrt{-\gamma}$ καὶ κύβος ὅδε $\sqrt{(-\gamma)^3} = (-\gamma)^{3:2}$· ἡ δὲ τετάρτη δύναμις $\sqrt{(-\gamma)^4} = (-\gamma)^{4:2} = (-\gamma)^2$. Ἡ δὲ δύναμις αὕτη $(-\gamma)^2 = \gamma^2$. Ἀφικομένους δὲ πρὸς τὸ ζητούμενον, ὡς οἷόν τε ἁπλούστατα αὐτὸ παριστάνειν, οὐδὲν τὸ ἀπαγορεῦον. Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δὲ τὸ πρᾶγμα ἐπίσης ῥᾴδιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 724. Ῥίζαν τὴν πρωτεύουσαν, ὁποίαποτ' ἂν ᾖ, ἁπλουστέραν, εἴπερ οἷόν τε, ἀποδιδόναι, τῆς ἀλογίας ἐν μέρει γοῦν ἀποσκυβαλιζομένης.

ΠΡΟΔΙΑΣΚΕΥΗ.

§. 725. Ὡς ἀνωτέρω δεδήλωται (§. 663.)

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^{\rho}\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}} = \frac{\sqrt[\sigma]{\beta^{\rho}} \times \sqrt[\sigma]{\delta^{\tau}}}{\sqrt[\sigma]{\gamma^{\nu}}}$$

Ἐὰν ἄρα τύχῃ ὂν $\rho = \sigma$, ᾖ δὲ καὶ ἡ β ποσότης καταφατικὴ, ἔσαι $\sqrt[\sigma]{\beta^{\rho}} = \sqrt[\sigma]{\beta^{\sigma}} = \beta$ (§. 720.): καὶ $\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^{\rho}\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}} = \beta\sqrt[\sigma]{\frac{\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}}$

Ἐὰν δὲ ᾖ $\nu = \sigma$, ᾖ δὲ καὶ γ^{ν} ποσότης καταφατικὴ, ἔσαι $\sqrt[\sigma]{\gamma^{\nu}} = \sqrt[\sigma]{\gamma^{\sigma}} = \gamma$· κἀντεῦθεν $\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^{\rho}\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}} =$

$$\frac{\sqrt[\sigma]{\beta^{\rho}\delta^{\tau}}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\sqrt[\sigma]{\beta^{\rho}\delta^{\tau}}.$$

Καὶ ἐν γένει ἄρα ὁ πρὸ τȣ̃ ῥιζικȣ̃ σημείȣ πολλαπλασιαςὴς, ὁ αὐτὸ δηλονότι τὸ ῥιζικὸν πολλαπλασιάζων, ἰσοδυναμεῖ τῇ καθ' ἑαυτὸν δυνάμει, τῇ τῷ μὲν ῥιζικῷ ἐπισήμῳ σ ὁμοβαθμίῳ, τὴν δὲ ὑπ' αὐτὸ τελȣ̃σαν ποσότητα ἐπιπολλαπλασιαζȣ́σῃ· ταὐτὸ δὲ καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως ῥητέον. Εἰ μήτις ἕλοιτο τὴν διὰ γ^{ν} διαίρεσιν πολλαπλασιασμὸν ἀποκαλεῖν τὸν διὰ τȣ̃ $\frac{1}{\gamma^{\nu}}$ κλάσματος.

ΛΥΣΙΣ.

§. 726. Ἔνθεντοι ἐὰν ἀπὸ τȣ̃ ἀριθμȣ̃, ἢ τῆς ὁπωσδήποτε ἐκφερομένης ἄλλως ποσότητος, καὶ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τελȣ́σης, ἀντὶ τῶν παραγόντων, εἴτε ὁλοχερὲς, εἴτε δὴ καὶ κλασματῶδες, ἐν μέρει ἀποληφθῇ, ὁμοβαθμίȣ τυγχάνον τῇ ῥίζῃ δυνάμεως, ἡ ὁμοταγὴς ῥίζα τȣ̃ τηλικȣ́τȣ παράγοντος, ὀρθῶς ἀεὶ-ἀείποτε καὶ κατὰ σκοπὸν, πρόγε τοῦ ῥιζικοῦ σημείου, οἷατις παράγων ταχθήσεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 727. Οὕτως $\sqrt{\alpha\alpha\beta\gamma}$, γίνεται $\alpha\sqrt{\beta\gamma}$· καὶ $\sqrt{48} = \sqrt{4 \cdot 12} = 2\sqrt{12}$. Εἰ μὴ ὅτι ἐπεὶ παρὰ ταῦτα $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3}$, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ εἰς τόνδε $4\sqrt{3}$ μεθαρμοσθήσεται.

Ἀλλὰ καὶ $\sqrt{48\alpha\alpha\beta\gamma}$ ἁπλούστερον οὕτω γραφήσεται $4\alpha\sqrt{3\beta\gamma}$, ἐκ τοῦ $16\alpha\alpha$ παράγοντος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ὑπεξαγομένης· ἢ γοῦν καὶ $2\alpha\sqrt{12\beta\gamma}$, ἐκ τοῦ $4\alpha\alpha$ ὁμοίως ὑπεξαχθείσης ἐνταῦθα τῆς ῥίζης τῆς τετραγωνικῆς.

Καὶ τὸ $\sqrt{27\alpha^3\beta^2\gamma}$ ἰσοδυνάμον τῷ $3\alpha\beta\sqrt{3\alpha\gamma}$· ἔστι γὰρ $9\alpha^2\beta^2$ τῆς ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τελέσης ποσότητος παράγων τετραγωνικός.

Καὶ μὲν δὴ καὶ $\sqrt{\frac{7}{25}}$, ἄμεινον ἂν οὕτως $\frac{1}{5}\sqrt{7}$ ἐξενεχθείη. Καὶ $\sqrt{\frac{28}{45}}$ οὕτως $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{5}}$· ὅτι $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45}$.

Ὡσαύτως καὶ $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$· καὶ γὰρ 8 ἐστὶν ὁ κύβος ὁ ἀπὸ ῥίζης 2. Ὁμοίως δὲ καὶ $\sqrt[3]{\frac{5}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{5}$· καὶ $\alpha\sqrt[3]{\beta^3\gamma} = \alpha\beta\sqrt[3]{\gamma}$.

Τὸ δ' αὐτὸ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν μᾶλλον συνθέτων· ἔστι γὰρ $\sqrt{\frac{\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3}{\gamma\gamma}} = \frac{\alpha - 2\beta}{\gamma}\sqrt{\alpha\beta}$· ὅτι $\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha - 2\beta)^2$.

Παραπλησίως δὲ $\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2\mu^2 + 4\alpha^2\gamma\mu^3}{\pi^2\zeta^2}} = \frac{\alpha\mu}{\pi\zeta}\sqrt{(\beta^2 + 4\gamma\mu)}$.

Οὐκ ἄλλως δὲ καὶ ἐκ $\sqrt[4]{\frac{\alpha^3}{\chi}} = \sqrt[4]{\frac{\alpha^4}{\alpha\chi}}$, γίνεται $\alpha\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha\chi}}$· ἢ γοῦν ἐκ $\sqrt[4]{\alpha^3\chi} = \sqrt[4]{\frac{\alpha^4\chi}{\alpha}}$, γίνεται $\alpha\sqrt[4]{\frac{\chi}{\alpha}}$.

Καὶ ἐκ $\sqrt[6]{\alpha^7\chi^5}$ γίνεται $\alpha\sqrt[6]{\alpha\chi^5}$· ἢ ὅτι $\sqrt[6]{\alpha^7\chi^5} = \sqrt[6]{\frac{\alpha^7\chi^6}{\chi}}$, τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν καὶ ὧδε $\alpha\chi\sqrt[6]{\frac{\alpha}{\chi}}$ προτεθείσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 728. Ἐὰν ᾖ $\delta^{\tau} = -\varepsilon$, ἔσαι, εἴπερ ἐπὶ τῶν εὑρεθέντων τύπων $-\varepsilon$ ἀντὶ δ^{τ} γράφοιτο, $\sqrt[\sigma]{-\frac{\beta^{\sigma}\varepsilon}{\gamma^{\nu}}} = \beta\sqrt[\sigma]{-\frac{\varepsilon}{\gamma^{\nu}}}$ καὶ $\sqrt[\sigma]{-\frac{\beta^{\varrho}\varepsilon}{\gamma^{\sigma}}} = \frac{1}{\gamma}\sqrt[\sigma]{-\beta^{\varrho}\varepsilon}$. Ὅθεν φανερὸν τὸν αὐτὸν κανόνα κρατεῖν κἀπὶ τῶν παρὰ τὰς πρωτευούσας ῥιζῶν ἐκείνων, ἃς ἐνταῦθα διασκεπτόμεθα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 729. Οὕτως $\sqrt{-\alpha^3\beta^2\gamma} = \alpha\beta\sqrt{-\alpha\gamma}$· Καὶ $\sqrt{-\frac{\alpha^2\beta}{\gamma^2}} = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{-\beta}$. Καὶ ἐν γένει $\sqrt{-\alpha} = \sqrt{\alpha}\times\sqrt{-1}$ τὸ γὰρ $-\alpha$, ἀναλύοιτ' ἂν εἰς $+\alpha$ καὶ -1 ὡς εἰς παράγοντας. Ὑποτίθεται δὲ τὸ $\sqrt{\alpha}$ μόνην τὴν πρωτεύουσαν ῥίζαν ὑποδηλοῦν.

Παραπλησίως δὲ καὶ ἐκ $-\sqrt{-\alpha}$, γενήσεται $\sqrt{\alpha}\times-\sqrt{-1} = -\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{-1}$.

Ὡσαύτως καὶ $\sqrt[3]{-\alpha^3} = \alpha\sqrt[3]{-1} = \alpha\times-1 = -\alpha$· καὶ $\sqrt[4]{-\alpha^4} = \alpha\sqrt[4]{-1}$, καὶ ὅσα τοιουτότροπα.

Τὸ

Τὸ δέτοι ῥιζικὸν $\sqrt{(-1)^3}$, τοῦ κύβου $(-1)^3$ εἰς τοὺς δύο παράγοντας $(-1)^2$ καὶ -1 ἀναλυθέντος, οὕτως ἐκδηλωθήσεται $\sqrt{(-1)^2 . -1}$· ἢ καὶ οὕτως $\sqrt{(-1)^2}\sqrt{-1}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{(-1)^2} = -1$, ἔςαι καὶ $\sqrt{(-1)^3} = -1 . \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$· κἀντεῦθεν $\alpha\sqrt{(-1)^3} = -\alpha\sqrt{-1}$· καὶ $-\alpha\sqrt{(-1)^3} = \alpha\sqrt{-1}$· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον μετιτέον, καὶ ὅσα τούτοις ἐοίκασιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. 730. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἀντιςρέφως γένοιτ' ἄν, ὥςε ἀντὶ $\alpha\sqrt{\beta}$ γράφεσθαι $\sqrt{\alpha^2\beta}$· ἢ ἀντὶ $\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\beta}$ τίθεσθαι $\sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\gamma\gamma}}$. Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 731. Καὶ ἄλλα δὲ πρὸς τούτοις ἐκ τοῦ τεθέντος συνάγεται θεωρήματος· οἷον ὅτι $\sqrt[4]{\alpha^3\beta} = \sqrt{\alpha} \times \sqrt[4]{\alpha\beta}$· διὰ τὸ εἶναι $\sqrt[4]{\alpha\alpha} = \sqrt{\alpha}$· καὶ τὰ παραπλήσια. Ἀλλὰ γὰρ τούτων τῆς εἰδικωτέρας διασκέψεως οὐ προσδεήσεται, ὁ τὸ θεώρημα συνιεὶς ἐξ οὗ αὐτὰ ἐπιφέρεται.

§. 732. Τῇ δὲ δὴ τοιαύτῃ τῶν ῥιζικῶν ἀναγωγῇ, πολλάκις καὶ τῶν ἄλλως δοξάντων ἂν διαφέρειν ἀναφαίνεται ἡ ταυτότης, δι' ἣν ῥιζικὰ δύο ὧν τὸ ἄθροισμα ζητεῖται, ἢ γοῦν ἡ διαφορὰ, κατὰ τὰ εἰρημένα (§. 628.) εἰς ἓν συνελθεῖν δυνήσεται· οἷον δὴ ταῦτα $\sqrt{48}$ καὶ $\sqrt{75}$ ἀναχθέντα γίνεται $4\sqrt{3}$ καὶ $5\sqrt{3}$· διὸ $\sqrt{48} + \sqrt{75} = 9\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt{75} - \sqrt{48} = \sqrt{3}$. Οὕτως ἐπειδὴ τοῦ $\sqrt{\frac{16}{27}}$, ἑκατέρων τῶν ἐπὶ τοῦ κλάσματος ὅρων διὰ τριῶν πολλαπλασιασθέντων γίνεται $\sqrt{\frac{16 \cdot 3}{81}}$, ἔςαι $\sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$· κἀντεῦθεν $\sqrt{75} + \sqrt{\frac{16}{27}} = (5 + \frac{4}{9})\sqrt{3} = \frac{49}{9}\sqrt{3}$·

καὶ δὴ καὶ $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}} = (4 - \frac{4}{9})\sqrt{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$. Ἤδη δὲ ἐπεὶ καὶ $4\sqrt{-18}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $12\sqrt{-2}$· καὶ $\sqrt{-2\alpha^2}$ ἐστὶν $= \alpha\sqrt{-2}$· ἔσται δὴ καὶ τὸ ἐκ τούτων ἄθροισμα $(12 + \alpha)\sqrt{-2}$, ὅ,τι δ' ἂν καὶ σημαίνοι τὸ α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 733. Ῥιζικὰ δύο τῶν ἐνταῦθα ὑπὸ σκέψιν ἡμῖν γινομένων, ἑτεροταγῆ, ἐπὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀνάγειν.

ΛΥΣΙΣ.

§. 734. Ἐὰν ὦσι διδόμεναι ῥίζαι πρωτεύουσαι ἑτεροταγεῖς αἵδε $\sqrt[\sigma]{\alpha^\mu}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta^\tau}$, πολλαπλασιασθέντων ἀμφοτέρων τῶν ἐπισήμων σ καὶ μ, διὰ τοῦ κατὰ τὴν ἑτέραν ῥίζαν ἐπισήμου ν· καὶ ταύτης ὁμοίως ἀμφοτέρων ν καὶ τ διὰ τοῦ κατὰ τὴν πρώτην ἐπισήμου σ, ὁμοταγεῖς αἱ ῥίζαι προκύψουσι $\sqrt[\sigma\nu]{\alpha^{\mu\nu}}$ καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{\beta^{\sigma\tau}}$, ὡς τὸ αὐτὸ σν ἐπίσημον ἔχουσαι· τὸ δ' αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐὰν τεθέντος $-\gamma$ ἀντὶ α καὶ $-\varepsilon$ ἀντὶ β, εἶτα ἐκ τῶν ῥιζῶν $\sqrt[\sigma]{(-\gamma^\mu)}$ καὶ $\sqrt[\nu]{(-\varepsilon)^\tau}$ γένωνται αὗται $\sqrt[\sigma\nu]{(-\gamma)^{\mu\nu}}$ καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{(-\varepsilon)^{\sigma\tau}}$. Φημὶ οὖν τὰς οὕτως ἀναφυομένας ῥίζας, τὴν μὲν πρώτην τῇ πρώτῃ, τὴν δὲ δευτέραν τῇ δευτέρᾳ, ἴσας εἶναι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γὰρ δὴ $\sqrt[\sigma\nu]{\alpha^{\mu\nu}} = \sqrt[\sigma]{\alpha^\mu}$· καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{\beta^{\sigma\tau}} = \sqrt[\nu]{\beta^\tau}$ (§. 720.)· καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{(-\gamma)^{\mu\nu}} = \sqrt[\sigma]{(-\gamma)^\mu}$· παραπλησίως δὲ καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{(-\varepsilon)^{\sigma\tau}} = \sqrt[\nu]{(-\varepsilon)^\tau}$ (§. 721.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 735. Εἴτις διαιρέτης τοῖς οὕτως εὑρεθεῖσι τρισὶν ἐπισήμοις σν, μν., στ, κοινὸς ἐγχωρεῖ, πάντες οἵδε οἱ ἀριθμοὶ ἀπομειωθήσονται δι᾽ ἐκείνου διαιρεθέντες, τῆς τῶν τάξεων οὐδέντι ἧττον διασωζομένης ἰσότητος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 736. Οὕτως οὖν ἐπὶ τὴν αὐτὴν τάξιν τῶν ῥιζῶν ἀναγομένων, ἡ ἑτέρα διὰ τῆς ἑτέρας πολλαπλασιασθήσεται, ἢ διαιρεθήσεται, κατὰ τὸν ἐν §. 725. ἐπαναληφθέντα κανόνα. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ ῥίζαι ὦσι πρωτεύουσαι, οὐδεμιᾶς προδιασκευῆς δεήσει· ἢν δὲ μὴ, ῥᾷστα διανυσθήσεται τὸ προκείμενον, ἐὰν ἀντὶ $\sqrt[\sigma]{(-\gamma)^\mu}$ γράφηται $\sqrt[\sigma]{\gamma^\mu} \times \sqrt[\sigma]{(-1)^\mu}$. Ἐπειδὴ γὰρ $-\gamma = +\gamma \times -1$, ἔσται καὶ $(-\gamma)^\mu = \gamma^\mu \times (-1)^\mu$· καὶ $\sqrt[\sigma]{(-\gamma)^\mu} = \sqrt[\sigma]{\gamma^\mu} . \sqrt[\sigma]{(-1)^\mu}$· κατὰ τὸν κανόνα τὸν αὐτόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 737. Οἷον $\sqrt{\alpha\chi} \times \sqrt[3]{\alpha^2\chi} = \sqrt[6]{\alpha^3\chi^3} \times \sqrt[6]{\alpha^4\chi^2} = \sqrt[6]{\alpha^7\chi^5}$. Καὶ ἐὰν τὸ (:) διαίρεσιν ὑποσημαίνῃ $\sqrt{\alpha\chi} : \sqrt[3]{\alpha^2\chi}, = \sqrt[6]{\frac{\chi}{\alpha}}$.

Ὡσαύτως δὲ $\sqrt{\alpha} \times \sqrt[4]{\alpha\chi} = \sqrt[4]{\alpha^2} \times \sqrt[4]{\alpha\chi} = \sqrt[4]{\alpha^3\chi}$· καὶ $\sqrt{\alpha} : \sqrt[4]{\alpha\chi} = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\chi}}$.

Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ συσταλήσεται εἰς τὰ $\sqrt[4]{36} \times \sqrt[4]{\frac{5}{6}} = \sqrt[4]{30}$.

Ἀλλ' ἐὰν $\sqrt{-\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ, ἢ διελεῖν διὰ $\sqrt{\beta}$, ληφθὲν (§ 729.) ἀντ' ἐκείνου $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{-1}$, ἔσαι δὴ τὸ μὲν παραγόμενον $\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{-\alpha\beta}$, τὸ δὲ πηλίκον $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$.

Καὶ ἐὰν $\sqrt{-\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\sqrt{-\beta}$, ληφθέντων ἀντὶ τούτων, τῶν $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{-1}$ καὶ $\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{-1}$, ἔσαι παραγόμενον $\sqrt{\alpha\beta}\times-1=-\sqrt{\alpha\beta}$. Καὶ γὰρ $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(-1)^{2:2}=-1$. Δέον δὲ διελεῖν τὸ πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου, πηλίκον προελεύσεται τὸ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\times+1=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$· ὅτι $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=+1$.

Καὶ ἐὰν $\alpha\sqrt{-\gamma}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\beta\sqrt{-\varepsilon}$ ἀντὶ τούτων ληφθέντων $\alpha\sqrt{\gamma}\sqrt{-1}$ καὶ $\beta\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-1}$, γινόμενον προκύψει $\alpha\beta\sqrt{\gamma\varepsilon}\times-1=-\alpha\beta\sqrt{\gamma\varepsilon}$. Δέον δὲ τῶνδε τῶν ῥιζικῶν τὸ πρῶτον διελεῖν διὰ τοῦ δευτέρου, ἔσαι πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$. Καὶ γὰρ κἀνταῦθα $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1$.

Ἐν γένει δὲ ἐὰν δέῃ πολλαπλασιάσαι $\alpha\sqrt[\sigma]{-\gamma}$ διὰ $\beta\sqrt[\sigma]{-\varepsilon}$, ληφθέντων ἀντὶ τῶνδε τῶν $\alpha\sqrt[\sigma]{\gamma}\sqrt[\sigma]{-1}$ καὶ $\beta\sqrt[\sigma]{\varepsilon}\sqrt[\sigma]{-1}$, γινόμενον παραχθήσεται $\alpha\beta\sqrt[\sigma]{\gamma\varepsilon}\sqrt[\sigma]{(-1)^2}$. Ἐὰν δὲ τὸ πρῶτον διελεῖν δέῃ διὰ τοῦ δευτέρου τὸ πηλίκον ἔσαι $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 738. Τούτων κατανοουμένων, οἱ ἐκ διαφόρων ὅρων συγκείμενοι τύποι, τῶν μὲν ῥιζικῶν, τῶν δὲ ἀῤῥίζων, δι' ὁποιωνοῦν ἄλλων πολλαπλασιασθήσονται, ἢ διαιρεθήσονται κατὰ τὰ ἐν γένει περὶ πολλαπλασιασ-