τῆς διαιρέσεως τοῦ προτέρου διὰ τοῦ δευτέρου πηλίκον ἔσται, $\frac{\alpha^{\mu}+\beta^{\nu+1}}{\gamma^{\nu+2}\varepsilon^{\nu+2}}$.

Καὶ τὸ $\frac{\alpha^2\beta+\beta^3}{\alpha-\gamma}$ πολλαπλασιασθὲν διὰ $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha\beta}$ δώσει παραγόμενον $\frac{(\alpha^2\beta+\beta^3)\times(\alpha^2-\gamma^2)}{(\alpha-\gamma)\,\alpha\beta}$. ὃ δήπου κλάσμα ἀναχθήσεται τῶν παραγόντων, τοῦ μὲν $\alpha^2\beta+\beta^3$, καὶ $\alpha\beta$, διὰ τοῦ β διαιρεθέντος, τοῦ δὲ $\alpha^2-\gamma^2$, καὶ $\alpha-\gamma$, δι᾽ αὐτοῦ τούτου τοῦ $\alpha-\gamma$· ὅθεν πηλίκον τὸ $\alpha+\gamma$. Καὶ ἔσται ἄρα ἀναχθὲν $\frac{(\alpha^2+\beta^2)\times(\alpha+\gamma)}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma}{\alpha}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 680. Ἡ μὲν οὖν τοιάδε τοῦ κλάσματος εἰς τὸ ἁπλέστατον ἀναγωγή, τοὺς τῶν ὁπωσοῦν ἐκκειμένων ποσοτήτων διαιρέτας δήλους προϋποτίθησιν· ἢ γοῦν τὸν τρόπον τοῦ αὐτοὺς ἀνακαλύπτειν· ὧν ἐν χερσὶν ὄντων, οἱ τὸν ἀριθμητὴν κοινῇ καὶ τὸν παρονομαστὴν διαιροῦντες προχείρως ἐκλέγονται. Καὶ ἔστι μὲν αὐτομάτοις πολλαχοῦ ἀπαντῶσιν ἐντυγχάνειν τοῖς τοιοῖσδε διαιρέταις· ἁπλοῖς δὲ οὖσι καὶ μοναδικοῖς οὐκ ἔσθ᾽ ὅπου οὐ πάρεστιν. Οὕτως αὐτόθεν φανερὸν τοῦ $\alpha\alpha+\alpha\beta$ μοναδικὸν ὑπάρχειν διαιρέτην τὸν α. Οὐ πολλῷ δὲ δυσχερέστερον καὶ τοῦ $\alpha\alpha+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$, τοὺς $\alpha+\beta$, καὶ $\alpha-\gamma$ διαιρέτας ὄντας συνιδεῖν. Ἀλλὰ γὰρ τοὺς τῶν μᾶλλον συνθέτων ἀνακαλύπτειν μακρῷ ἐργωδέστερον καὶ εὐκρινῶν ὄντων, καὶ ἀρρίζων· καὶ οὐδὲ τοῦ παρόντος ἐστὶ τόπου τοὺς κανόνας παραθέσθαι, οἷς πρὸς θήραν τὴν ἐκείνων ποδηγετούμεθα.

Διὸ καὶ εἰς τὴν ἀπόπειραν τὸ περὶ τούτου παραθετέον· καθ᾽ ἣν ἀνυσιμώτατα ἐπιχειρήσομεν τῇ εὑρέσει, τοὺς ἐξ ὧν τὸ παραγόμενον, οὓς διαιρέτας ζητοῦμεν, συνέστηκεν ὅρους, κατὰ τὴν τῶν δυνάμεων πρόοδον τινὸς τῶν ἐπ' αὐτῷ γραμμάτων, ἐκτάσσοντες. Τούτου γὰρ γινομένου τὰ πολλὰ καταφανὴς καθίσταται, ἡ τῶν ὅρων τοὺς πλείστους διαιροῦσα ποσότης, ὅθεν καὶ ἀποπειρᾶσθαι πάρεστιν, εἰ ἄρα καὶ ἅπαντας. Τοῦ δὲ τὸν κοινὸν δυεῖν ποσοτήτων διαιρέτην, εἴτις ἐστὶ, καὶ τὸν μάλιστα, εἰ τύχοι, συμπεπλεγμένον ἀνακαλύπτειν ἡ μέθοδος, οὐδὲν τῆς κοινοτέρας ἐκείνης διενήνοχε, δι' ἧς ἀριθμῶν δυοῖν δεδομένων ὁ μέγιστος διαιρέτης εὑρίσκεται (§. 114.). Ἀλλὰ ταύτην γὰρ ἅτε σπανιώτατα γινομένην ἐν χρήσει ἑκόντες ὑπερβησόμεθα.

§. 681. Οἷόν τε δὲ τὸ παραγόμενον, εἰς δύο ἀναλύεσθαι παράγοντας, δυσὶ διαφέρουσι τρόποις· ὅτι πάντων τῶν ἐφ' ἑκατέρῳ τῷ παράγοντι ἀναστραφέντων σημείων, οὐδὲν ὅ,τι καὶ διαφέρον εἴη προκύψει. Οὕτωτοι τὸ $\alpha\beta$, εἴς τε τοὺς $+\alpha$ καὶ $+\beta$ ἀναλυθείη, καὶ εἰς τοὺς $-\alpha$ καὶ $-\beta$. Καὶ τὸ $-\alpha\beta$, καὶ τοὺς $-\alpha$ καὶ $+\beta$, καὶ τοὺς $+\alpha$ καὶ $-\beta$, ἐπίσης ἂν σχοίη παράγοντας. Καὶ ἐπὶ τῶν συγκειμένων δὲ ὡσαύτως. Καὶ γὰρ $\underline{\alpha\alpha-\beta\beta}=(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)=(-\alpha-\beta).(-\alpha+\beta)$. Καὶ τὸ $\underline{\alpha\alpha-\alpha\gamma-\beta\beta+\beta\gamma}$ ἀνακύπτει παραπλησίως ἔκ τε τῶν $\underline{\alpha+\beta-\gamma}\times\underline{\alpha-\beta}$, καὶ ἐκ τῶν $\underline{-\alpha-\beta+\gamma}\times\underline{-\alpha+\beta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 682. Τετραγώνου, Κύβου, Διτετραγώνου, καὶ οἱασδηποτοῦν ἔτι καθυπερτέρας δυνάμεως τὸν ἀπὸ διωνύμου ῥίζης τύπον ἐξευρεῖν.

ΠΡΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

§. 683. Ἐπειδὴ ὀνόματα ταῖς ποσότησιν ἐστὶ τὰ σημεῖα, ἢ τὰ γράμματα, οἷς αὐταὶ διασημαίνον-

ται

ται, ῥίζα διώνυμος ἐκ ἂν ἀπεικότως ῥηθείη, ἥτις ἂν ἐκ δυεῖν τοιέτων ὀνομάτων συγκέοιτο· οἷον $\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$, ἢ $\alpha - \beta$, ἢ $-\alpha + \beta$· παρὰ ταῦτα διωνύμε ῥίζης εἶδος ἕτερον θέσθαι ἀμήχανον.

ΛΥΣΙΣ.

§. 684 Ἐὰν ἐν ἡ ῥίζα $\alpha + \beta$, ἐφ᾽ ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ, καὶ τὸ γινόμενον αὖθις διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ ἕτως ἐφεξῆς, ὑπ᾽ ὄψιν παραςήσονται αἱ δυνάμεις ἡ δευτέρα, ἡ τρίτη, ἡ τετάρτη, ἡ πέμπτη, ἡ ἕκτη· ὧν δὴ αὐτὴ ἡ ῥίζα, ἅτε δὴ δυνάμις πρώτη, προτάσσεται.

Α′. $\alpha + \beta$

Β′. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Γ′. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Δ′. $\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$

Ε′. $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$

Ϛ′ $\alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 +$
$6\alpha\beta^5 + \beta^5$.

§. 685. Ἐκ τῶνδε ῥᾷςα αἱ δυνάμεις συςήσονται αἱ ἀπὸ ῥίζης τῆς $\alpha - \beta$, ἐὰν ἀποφατικῶς σημειωθῇ τὰ γινόμενα, οἷς τὸ β ἐμφιλοχωρεῖ περιοσάριθμον φέρον τὄπίσημον· ἕτως·

Α′. $\alpha - \beta$

Β′. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Γ′. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Δ′. $\alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4$

Ε′. $\alpha^5 - 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 - \beta^5$

Ϛ′. $\alpha^6 - 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 - 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 -$
$6\alpha\beta^5 + \beta^6$.

§. 686. Τὸν αὐτὸν δὲ καταφαίνεται τρόπον, ὡς τὰς ἀπὸ τῆς $-\alpha + \beta$ ῥίζης δυνάμεις προκύψειν,

ἐὰν

ἐὰν ἀποφατικῶς σημειωθῇ, ἐφ' οἷς τὸ α περισσαρίθμου ἔλαχε τοῦ ἐπισήμου, τὰ γινόμενα· οἷον,

Α΄. $-\alpha+\beta$

Β΄. $+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Γ΄. $-\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+\beta^3$

Δ΄. $+\alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4$

Ε΄. $-\alpha^5+5\alpha^4\beta-10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3-5\alpha\beta^4+\beta^5$

Ϛ΄. $+\alpha^6-6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2-20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4-$
$6\alpha\beta^5+\beta^6$.

§. 687. Ἐπὶ τούτων, ἐὰν καὶ εἰς ἐμφιλοχωρεῖ τὸ β ἐν περισσαρίθμῳ τῷ ἐπισήμῳ ὑπεναντίως σημειωθῇ τὰ γινόμενα, οἱ τῶν δυνάμεων τύποι προκύψουσι τῶν ἀπὸ ῥίζης τῆς $-\alpha-\beta$.

Α΄. $-\alpha-\beta$

Β΄. $+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Γ΄. $-\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3$

Δ΄. $+\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$

Ε΄. $-\alpha^5-5\alpha^4\beta-10\alpha^3\beta^2-10\alpha^2\beta^3-5\alpha\beta^4-\beta^5$

Ϛ΄. $+\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4+$
$6\alpha\beta^5+\beta^6$.

§. 688. Ἐν ἅπασι δὴ τοῖς προτεθεῖσι τύποις οὐδὲν δυσχερὲς τήν τε τῶν σημείων τάξιν ἥτις ποτὲ ἐστὶ συνιδεῖν, καὶ τῶν γινομένων τὴν διαδοχὴν περινοῆσαι, ἅτινα ἐκ τῶν κατὰ τὰ ὀνόματα α καὶ β συγκροτεῖται δυνάμεων. Ἐὰν γὰρ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ὁ ἀντὶ ἐπισήμου ὢν τῆς δυνάμεως πρὸς ἣν ἐξᾶραι τὴν ῥίζαν δεῖ τὴν διώνυμον, δηλωθῇ διὰ τοῦ σ τὰ γινόμενα οὕτως ἐν τάξει ἐκκείσεται.

$\alpha^\sigma,\ \alpha^{\sigma-1}\beta,\ \alpha^{\sigma-2}\beta^2,\ \alpha^{\sigma-3}\beta^3 \ldots\ldots \alpha^0\beta^\sigma$.

Οἱ δ' ἀριθμοὶ δι' ὧν τὰ γινόμενα ταῦτα πολλαπλασιάζεται, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σ, οὕτως ἂν συσταῖεν, ὥστε κατὰ γένος τὴν κατὰ τὸ σ δύναμιν, τὴν ἀπὸ τῆς

δυω-

δυωνύμου ῥίζης $\alpha + \beta$, τουτέστι τὴν $(\alpha + \beta)^{\sigma}$, οὕτω παρίστασθαι· $\alpha^{\sigma} + \frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta + \frac{\sigma\cdot(\sigma-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} + \frac{\sigma\cdot(\sigma-1)\cdot(\sigma-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{\sigma-3}\beta^{3} + \frac{\sigma\cdot(\sigma-)\cdot(\sigma-2)\cdot(\sigma-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^{\sigma-4}\beta^{4} +$ κ.ξ.

Καὶ τῆς δὲ δὴ τῆς προόδου τοσοίδε παραληφθήσονται ὅροι, ὁπόσοι κατὰ τὴν ταχθεῖσαν τιμὴν τῷ γράμματι σ, παραχθῆναι δυνήσονται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν τεθῇ $\sigma = 1$, δῆλον ὅτι $(\alpha + \beta)^{1}$ τῷ κατὰ γένος τύπῳ ὑπενεχθήσεται. Ἔσται γὰρ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\alpha^{\sigma} = \alpha$, καὶ $\frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta = \alpha^{0}\beta = \beta$.

Ἀλλὰ $\frac{\sigma(\sigma-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2}$, διὰ τὸ $\sigma - 1 = 0$, οἴχεται εἰς τὸ μηδὲν, ὥσπερ καὶ οἱ ὅροι οἱ ἑξῆς ἀπὸ τοῦδε πάντες, παρὰ τὸ ἅπασι τὸ $\sigma - 1 = 0$ ἐμφιλοχωρεῖν. Ὡσαύτως ἐὰν τεθῇ $\sigma = 2$, γίνεται $\alpha^{\sigma} = \alpha^{2}$, καὶ $\frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta = 2\alpha\beta$· καὶ $\frac{\sigma\cdot\sigma-1}{1\cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\alpha^{0}\beta^{2} = \beta^{2}$· τῶν δ' ἀπὸ τοῦδε ἐφεξῆς ὅρων, τῇ τοῦ παράγοντος $\sigma - 2 = 0$ παρεμπλώσει, εἰς τὸ μηδὲν οἰχομένων, ἔσται δήπου $(\alpha + \beta)^{2} = \alpha^{2} + 2\alpha\beta + \beta^{2}$. Φημὶ οὖν ὡς ἐὰν ὁ κατὰ τὸ σ γράμμα, ὁπόσου δήποτε ἐκληφθὲν, ἀληθεύῃ τύπος, ἀληθεύσει δήπου καὶ τοῦ τῆς δυνάμεως ἐπισήμου μονάδι προσαυξομένου $\sigma + 1$.

Ἐὰν γὰρ θῶμεν,

$$(\alpha+\beta)^{\sigma} = a\alpha^{\sigma} + b\alpha^{\sigma-1}\beta + c\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} + d\alpha^{\sigma-3}\beta^{3} + \text{κ.ξ.}$$

ληφθαληφθέντων $$a = 1$$

$$b = \frac{\sigma}{1}$$

$$c = \frac{\sigma \cdot (\sigma - 1)}{1 \cdot 2}$$

$$d = \frac{\sigma \cdot (\sigma - 1) \cdot (\sigma - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$ καὶ ἑξῆς,

τῷ διὰ τοῦ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασμῷ παραχθήσεται·

$$(\alpha + \beta)^{\sigma+1} = a\alpha^{\sigma+1} + b\alpha^{\sigma}\beta + c\alpha^{\sigma-1}\beta^2 + d\alpha^{\sigma-2}\beta^3 + \kappa.\xi.$$
$$+ a\alpha^{\sigma}\beta + b\alpha^{\sigma-1}\beta^2 + c\alpha^{\sigma-2}\beta^3$$

ἐν ᾧ δὴ σίχῳ τὸ a τῇ μονάδι 1, ὡσαύτως ἰσοδυναμεῖ, ὡς κἀν τῷ ἀνωτέρῳ. Ἀλλὰ γὰρ $b + a$ ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου τῶν ὅρων $= \sigma + 1$. Ὁ δὲ τοῦ τρίτου $c + b = \frac{\sigma(\sigma - 1)}{1 \cdot 2} + \frac{\sigma}{1}$, ὃς καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀναχθεὶς ὄνομα 2, γράφοιτ' ἂν καὶ οὕτω $\frac{\sigma(\sigma-1) + 2\sigma}{1 \cdot 2}$, καὶ οὕτω $\frac{(\sigma - 1 + 2) \cdot \sigma}{1 \cdot 2} = \frac{(\sigma + 1) \cdot \sigma}{1 \cdot 2}$.

Ὁ δὲ τοῦ τετάρτου ὅρου συνεργὸς $d + c$, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀνηγμένος ἐστὶ $\frac{\sigma \cdot (\sigma-1) \cdot (\sigma-2) + 3\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. ὃς δὴ καὶ οὕτως ἂν γράφοιτο $\frac{(\sigma - 2 + 3)\sigma(\sigma - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(\sigma + 1)\sigma(\sigma - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Ὅθεν ῥάδιον συνιδεῖν, ὡς ὁ τοῦ πέμπτου ὅρου συνεργὸς, ἔσται $\frac{(\sigma + 1)\sigma(\sigma - 1)(\sigma - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. ὁ δὲ τοῦ ἕκτου, $\frac{(\sigma + 1)\sigma(\sigma - 1)(\sigma - 2)(\sigma - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐὰν

Ἐὰν οὖν τεθῇ $\pi = \sigma + 1$, ὥστε εἶναι $\sigma = \pi - 1$ ἀντεισαχθέντος ἀντὶ τοῦ σ τοῦ $\pi - 1$ ἐπὶ τῶν εὑρεθέντων, ἐπιφέρεται $b + a = \pi$

$$c + b = \frac{\pi(\pi - 1)}{1 \cdot 2}$$

$$d + c = \frac{\pi(\pi - 1)(\pi - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Διὸ καὶ γίνεται·

$$\overline{\alpha + \beta}^{\pi} = \alpha^{\pi} + \frac{\pi}{1}\alpha^{\pi-1}\beta + \frac{\pi \cdot (\pi - 1)}{1 \cdot 2}\alpha^{\pi-2}\beta^{2} + \frac{\pi \cdot (\pi - 1)(\pi - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^{\pi-3}\beta^{3},$$

κτλ. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ πρόοδος αὕτη παραπλησιωτάτη ἐστὶ τῇ προληφθείσῃ, ἐν ᾗ ἀντὶ τοῦ π, τὸ σ εἰσενήνεκτο, ἑπόμενον ἐστὶν, εἰ ἀληθῶς δι' ἐκείνης ἡ $(\alpha + \beta)^{\sigma}$ παρέστη δύναμις, τὸ γράμμα σ ὁποσουδήποτε τιμηθὲν, ἀληθῶς οὐδὲν ἧττον καὶ διὰ ταύτης τῆς ἀδελφὰ ἐκείνῃ χωρούσης ἡ δύναμις παραστήσεται, ἧς περ ἐπίσημον τὸ $\sigma + 1$. Τουτέστιν ἡ $(\alpha + \beta)^{\sigma+1}$, εἰ μόνον ἁπανταχοῦ ἀντὶ τοῦ σ, τὸ $\sigma + 1$ ἀντεισενεχθείη.

Ἐντεῦθεν δὲ ἐκ τοῦ ἀκολούθου ἀληθεύσει ὁ τύπος, καὶ ἡλικονοῦν ἀριθμὸν καταφατικόν τε καὶ ὁλοχερῆ τοῦ σ ἐπισημαίνοντος. Εἰ γὰρ ἀληθεύει, ἐὰν ᾖ $\sigma = 1$, ἀληθεύσει δήπου καὶ ἐὰν $\sigma = 2$, ὡς καὶ ἄλλως ἰδόντες ἔφθημεν· καὶ ἐὰν $\sigma = 3$· καὶ ὡσαύτως ἑξῆς ἐὰν $\sigma = 4$, καὶ ἐὰν $\sigma = 5$· καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 689. Ἕπεται δ' ἐκ τῶν ἤδη ἀποδεδειγμένων, ὅτι ἀληθεύων ὁ τύπος ἡλικονοῦν ἀριθμὸν τοῦ σ ἐπισημαίνοντος, εἴτε ὁλοχερῆ, εἴτε κλασματώδη, καταφατικὸν, ἢ ἀποφατικὸν, ὃς ἂν ᾖ κ, ἀληθεύσει πάντῃ, καὶ ἐὰν τεθῇ τὸ $\sigma = 1 + \kappa$, ἢ γοῦν

$\sigma = 2$

$\sigma = 2 + \kappa$, ἢ $\sigma = 3 + \kappa$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Συνελόντι γοῦν, ἀληθεύσει ἡλικοσοῦν ἂν καὶ εἴη ὁ ὁλοχερὴς ἀριθμὸς ὁ τῷ κ προστιθέμενος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 690. Μάλιστα μὲν οὖν ἐκ τοῦ καθόλου τύπου, οἱασδηποτοῦν διωνύμου ῥίζης, ἧς ἂν τοὐπίσημον διδῶτο, τὴν δύναμιν συγκροτῆσαι ῥᾴδιόν ἐστι. Τῆς γὰρ ἑβδόμης φέρε προβαλλομένης δυνάμεως, ἔσται $\sigma = 7$ καὶ

$$(\alpha + \beta)^\sigma = (\alpha + \beta)^7 = \alpha^7 + \frac{7}{1}\alpha^6\beta + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\alpha^5\beta^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^4\beta^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^3\beta^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\alpha^2\beta^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\alpha\beta^6 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\beta^7.$$

Ἀλλ' ἐπέκεινα χωρεῖν οὐκ ἔξεστι, τοῦ ἐφεξῆς ὅρου, εἰ ζητηθείη, $= 0$ προκύπτοντος. Τοιγαροῦν τῶν συνεργῶν κατὰ τὸ δέον ἐπαναχθέντων, ἔσται δὴ ἡ ζητουμένη δύναμις $\alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + \beta^7$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 691. Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα μὴ ᾖ $\alpha + \beta$, ἀλλὰ $\alpha - \beta$, κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἀνωτέρω τύπον τῆς δυνάμεως διαμορφουμένης τοὺς μὲν ὅρους τοὺς τὰς ἀξίας τοῦ ἀποφατικοῦ ὀνόματος $-\beta$, ἀρτιάριθμα ἔχοντας τὰ ἐπίσημα 0, 2, 4, 6, κξ. καταφατικῶς διὰ τοῦ $+$ ἐπιχαρακτέον, τοὺς δὲ περιττάριθμα 1, 3, 5, κξ. ἀποφατικῶς διὰ τοῦ $-$· οὐ γὰρ ἂν τὰ τῶν οὕτω γινομένων ὅρων σημεῖα, διὰ τῶν συνεργῶν τραπείη, ὡς τούτων ἁπάντων ἐνταῦθα ὄντων καταφατικῶν. Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα τύχῃ οὖσα $-\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$, τὸ αὐτὸ παρατετηρηκόσιν ἐπὶ τῶν κατὰ τὰ ὀνόματα ἀξιῶν, οὐδὲν δυσχερὲς τὰ σημεῖα τοῖς ὅροις ἐπιχαρίσσειν κατάλληλα. Εὔδηλον δὲ καὶ τῶν δυνάμεων εἰς ἀρτιάριθμα τὰ ἐπίσημα, μηδεμίαν εἶναι διαφορὰν, ὅπως ποτ' ἂν τὰ τῆς ῥίζης ἔχοι, εἴθ' ὕτως $\alpha + \beta$, εἴτε καὶ ὕτως $- \alpha - \beta$. Καὶ ὐδέντι μᾶλλον, ὐδὲ τὰς ἀπὸ $\alpha - \beta$, καὶ $- \alpha + \beta$ ὁμοταγεῖς διακρίνεσθαι. Ἀλλὰ γὰρ τὰς ἀπὸ δυωνύμυ ῥίζης περισσαρίθμυς τὰ ἐπίσημα, θατέρυ τῶν τῆς ῥίζης ἀμειφθέντος σημείων, ἢ ἑκατέρυ, ἐπάναγκες ἀεὶ κατὰ τὰ σημεῖα καὶ ταύτας ἀμείβεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 691. Τῦ τοίνυν τύπυ τῆς ἀφ' οἱασῦν δυωνύμυ ῥίζης καταφανῦς ὄντος δυνάμεως, καὶ ἡ ἀπὸ ῥίζης τριωνύμυ ὁμοταγὴς δύναμις διατυπωθήσεται, καὶ ἡ ἀπὸ τετρωνύμυ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς ἔτι μᾶλλον συνθέτυ.

Ἔςω δὴ ῥίζα $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$, κξ. ἧς διατυπῶσαι δεῖ τὸ τετράγωνον. Ἐὰν ὖν ἐκ διαδοχῆς ληφθῇ α, $\alpha + \beta$, $\alpha + \beta + \gamma$, ὡς πρῶτον ὄνομα, τὸ δ' ἐφεπόμενον γράμμα ὡς δεύτερον· ἢ καὶ μᾶλλον ἐπιτέμνυσιν, ἐὰν τεθῇ $\alpha = A$, $\alpha + \beta = B$, $\alpha + \beta + \gamma = \Gamma$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \Delta$ κξ, τὸ τετράγωνον ἔςαι,

$$\begin{aligned} A^2 &+ 2A\beta + \beta^2 \\ &+ 2B\gamma + \gamma^2 \\ &+ 2\Gamma\delta + \delta^2 \\ &+ 2\Delta\varepsilon + \varepsilon^2, \end{aligned}$$

καὶ ὕτως ἐφεξῆς, ἐὰν καὶ πλείω τύχῃ τὰ ὀνόματα.

Ὁ δέ τοι κύβος ὁ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ῥίζης ὕτως ἀποδοθήσεται,

$$\begin{aligned} A^3 &+ 3A^2\beta + 3A\beta^2 + \beta^3 \\ &+ 3B^2\gamma + 3B\gamma^2 + \gamma^3 \\ &+ 3\Gamma^2\delta + 3\Gamma\delta^2 + \delta^3 \\ &+ 3\Delta^2\varepsilon + 3\Delta\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \end{aligned}$$

Τὸ

Τὸ δὲ διτετράγωνον οὕτως,

$$\begin{aligned} A^4 + 4A^3\beta + 6A^2\beta^2 + 4A\beta^3 + \beta^4 \\ + 4B^3\gamma + 6B^2\gamma^2 + 4B\gamma^3 + \gamma^4 \\ + 4\Gamma^3\delta + 6\Gamma^2\delta^2 + 4\Gamma\delta^3 + \delta^4 \\ + 4\Delta^3\varepsilon + 6\Delta^2\varepsilon^2 + 4\Delta\varepsilon^3 + \varepsilon^4. \end{aligned}$$

Καὶ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον διαμορφωθήσονται καὶ αἱ δυνάμεις αἱ τούτων ἔτι καθυπέρτεραι. Σημεῖα δὲ ἁπανταχοῦ ἐπιτεθείσεται, τὰ ἐκ τῶν σημείων τῶν τῆς ῥίζης ὀνομάτων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτοντα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 693. Τὴν κατὰ δύο, ἢ πλείω ὀνόματα ἐξελέσθαι ῥίζαν, ἐκ μὲν τοῦ δοθέντος τετραγώνου τὴν τετραγωνικὴν, ἐκ δὲ τοῦ κύβου τὴν κυβικὴν, ἐκ δὲ τοῦ διτετραγώνου τὴν διτετραγωνικὴν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΛΥΣΙΣ.

§. 694. Ὁποία ποτ᾽ ἂν ᾖ, ἡ ἀπὸ ῥίζης ὀνομάτων πλειόνων διδομένη δύναμις, οἷον ἥδε ἡ τετραγωνικὴ $\Delta = 16\beta^4 + 16\beta^3\alpha\chi + 4\alpha^2\chi^2 + 16\beta^2\chi^2 + 8\alpha\chi^3 + 4\chi^4$, κατὰ τὰ ἐπίσημα τῶν ἀξιῶν ἀεὶ διατετάχθω τοῦ γράμματος, τοῦ ἐν αὐτῇ ἐμφιλοχωροῦντος συχνότερον· οὕτως ὥστε, ἤτοι τὰς τοῦ εἰρημένου γράμματος καθυπερτέρας ἀξίας ἐν τάξει ἡγεῖσθαι, ἕπεσθαι δὲ τὰς ταπεινοτέρας, ἢ γοῦν ἀνάπαλιν τὰς μὲν ἐλάσσονας ἡγεῖσθαι, τὰς δὲ μείζονας ἐν τάξει ἕπεσθαι. Εἰ δὲ καὶ πλείω τύχοι τὴν ἀξίαν ἰσοστάσια γράμματα, διατιθέσθω καὶ ταῦτα, ὅσαγε τῷ πρώτῳ παρείκοι, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Εἶτα·

§. 695. Εἰ τὴν ῥίζαν ἐξελέσθαι δέοι τὴν τετραγωνικὴν, ληφθέντος ἀντὶ πρώτου ἐκείνης ὀνόματος τοῦ Α, ὅπερ ἂν τετραγωνισθὲν τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῶν κατὰ τὸ δοθὲν τετράγωνον ἴσον εἴη, ὑφαιρεθήτω μὲν ΑΑ ἀπὸ τοῦ δοθέντος τετραγώνου Δ, διαιρεθήτω δὲ διὰ τοῦ 2Α τὸ μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν ὑπολειφθὲν $\Delta - \mathrm{AA}$· τὸ γὰρ ταύτηγε ἐκπροϊὸν πηλίκον, θάτερον τῶν ὀνομάτων ἔσται τῆς ῥίζης, ὃ λεγέσθω Β. Τοῦ γοῦν Β οὕτως εὑρεθέντος, γινέσθω $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^2$, καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐκείνου δοθέντος τετραγώνου Δ ὑφαιρείσθω· ἐὰν γὰρ μηθὲν ὑπολειφθῇ μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν· τουτέστιν ἐὰν καταληφθῇ $\Delta - (\mathrm{A} + \mathrm{B})^2 = 0$, φανερὸν αὐτόθεν τὴν $\mathrm{A} + \mathrm{B}$, τὴν ῥίζαν εἶναι τὴν ζητουμένην· ὡς ἔτι περιλειφθείη τὸ $\Delta - (\mathrm{A} + \mathrm{B})^2$, οἱ πρῶτοι τῶν ἐν αὐτῷ ἁπάντων διὰ $2(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ αὖθις διαιρεθήτωσαν ὅροι, καὶ τὸ ἀπ᾽ ἐντεῦθεν πηλίκον, ὅπερ εἰρήσεται Γ, εἰς τρίτον ὄνομα τῶν τῆς ῥίζης ἀποτιθέσθω. Ἤδη δὲ καὶ $(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma)^2$ τὸ ἀπὸ τῆς εἰς τόδε εὑρεθείσης ῥίζης τετράγωνον, ἀπὸ τοῦ κατ᾽ ἀρχὰς δοθέντος ἐκείνου τετραγώνου τοῦ Δ, ὑφαιρείσθω, καὶ ἐὰν ᾖ $\Delta - (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma)^2 = 0$, ἔσται $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma$ ἡ ῥίζα· εἰ δ᾽ ἔτι λοιπὸν, ὡσαύτως καὶ προσωτέρω τὰ τῆς πράξεως χωρείτω, ἀεὶ μὲν τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ διπλοῦ τῶν εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὀνομάτων γινομένης, ἀεὶ δὲ καὶ τῆς ἐκείνων αὐτῶν τετραγωνισθέντων ἀπὸ τοῦ προτεθέντος τὸ κατ᾽ ἀρχὰς τετραγώνου ὑφαιρέσεως εἰς τέλος, ἕως οὗ μηδὲν τέως περιῇ τὸ ὑπολειπόμενον.

§. 696. Ἐὰν δὲ ὁ Δ κύβος παρῇ, καὶ τούτου ἡ κυβικὴ ῥίζα ᾖ ζητουμένη, ληφθήτω Α ἴσον τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ πρωτίστου τῶν ὅρων τῶν ἐπὶ τοῦ κύβου τοῦ προκειμένου, κατά γε τὰ εἰρημένα καὶ τούτου ἤδη προδιαταχθέντος. Καὶ ὑφαιρεθήτω δὴ ἀπὸ τοῦ Δ ὁ ἀπὸ Α κύβος· καὶ τοῦ λοιποῦ $\Delta - \mathrm{A}^3$ ὁ πρῶτος ἁπάντων ὅρος, διαιρεθήτω διὰ $3\mathrm{A}^2$· τὸ γάρτοι πηλίκον, ὃ λέγω Β, τῶν τῆς ῥίζης ἔσται ὀνομάτων τὸ δεύτερον. Γινέσθω τοίνυν $\Delta - (\mathrm{A} + \mathrm{B})^3$· τοῦτο δὲ

ἐὰν

ἐὰν ᾖ = 0, δῆλον ὡς ἡ $A + B$ ἡ ῥίζα ἦν ἡ ζητουμένη· ἢν δέ τοι λείποιτο περιὸν τὸ $\Delta - (A + B)^3$, διαιρείσθωσαν οἱ πρῶτοι ἐν αὐτῷ ἀπαντῶντες ὅροι διὰ $3(A + B)^2$, καὶ τὸ πηλίκον, ὅπερ εἰρήσθω Γ, ἔσται τῶν ἐπὶ τῆς ῥίζης ὀνομάτων τὸ τρίτον. Γινέσθω δ' αὖθις $\Delta - (A + B + \Gamma)^3$, καὶ καθόλου τὰ τῆς πράξεως χωρείτω, ὡς ἐπὶ τῆς εὑρέσεως τῆς ῥίζης τῆς τετραγωνικῆς· εἰμὴ παρ' ὅσον ἐνταῦθα διαιρεῖν μὲν δέον διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου, τοῦ ἀπὸ τῶν εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὀνομάτων συνισταμένου, ὑφαιρεῖν δὲ ἀπὸ τοῦ κατ' ἀρχὰς δοθέντος κύβου, τὸν κύβον τὸν ἀπὸ τῶν αὐτῶν.

§. 697. Ἐὰν δὲ Δ ᾖ διτετράγωνον, ζητῆται δὲ τούτου ῥίζα ἡ διτετραγωνική, ληφθήτω μὲν Α τῇ τηλικαύτῃ ῥίζῃ τοῦ πρωτίστου τῶν ὅρων ἴσον, τοῦ δοθέντος διτετραγώνου ᾗ δέον προδιαταχθέντος· καὶ ὑφαιρείσθω $\Delta - A^4$· καὶ ὁ τοῦ λοιποῦ τοῦδε πρῶτος ἀπαντῶν ὅρος διὰ $4A^3$ διαιρείσθω· τὸ δὲ πηλίκον, ὅπερ αὖθις εἰρήσεται Β, εἰς δεύτερον ὄνομα τῶν ἐπὶ τῆς ῥίζης ἀποτιθέσθω. Ἤδη δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ δοθέντος διτετραγώνου Δ, ὑφαιρείσθω $(A + \beta)^4$, καὶ τοῦ λοιποῦ $\Delta - (A + B)^4$, ἔτι τὸ περιὸν, οἱ πρῶτοι ὅροι διὰ $4(A + B)^3$ διαιρείσθων, εἰς τὴν τοῦ τρίτου τῶν ὀνομάτων τῆς ῥίζης Γ, γένεσιν· λαμβανέσθω δὲ δὴ καὶ $\Delta - (A + B + \Gamma)^4$· καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐξ ἀρχῆς περαινέσθω.

§. 698. Ἐὰν δὲ Δ δύναμις πρόκειται, ἡ πέμπτη, ἀφ' ἧς ἂν δέοι καὶ πέμπτην ἐξελέσθαι ῥίζαν τινὰ πολυώνυμον, ληπτέον ἀντὶ Α τὴν ὁμοταγῆ ῥίζαν τοῦ πρώτου τῶν ὅρων τῆς κατὰ τὸ Δ δυνάμεως. Εἶτ' ἐφεξῆς ὑφαιρετέον A^5, καὶ $(A + B)^5$, καὶ $(A + B + \Gamma)^5$ κξ. τὸ δὲ λοιπὸν κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον διαιρετέον διὰ $5A^4$, καὶ $5(A + B)^4$, καὶ $5(A + B + \Gamma)^4$, ὡς ἂν τῶν ὀνομάτων τῆς ῥίζης ἀνακύπτῃ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον.

§. 699. Καὶ ἐν γένει ἐὰν Δ ἡ ἀπὸ ῥίζης πολυωνύμου δύναμις ἐπὶ τον κατὰ τὸ σ τύχῃ ἐξηρμένη βαθμὸν, τῶν λοιπῶν ἁπάντων τηρουμένων, ὑφαιρεθήσεται μὲν ἐκ διαδοχῆς A^σ, $(A+B)^\sigma$, $(A+B+\Gamma)^\sigma$, τῶν δὲ ὑπολειπομένων οἱ πρώτως ἀεὶ προκείμενοι ὅροι διαιρεθήσονται διὰ $\sigma A^{\sigma-1}$, $\sigma(A+B)^{\sigma-1}$, $\sigma(A+B+\Gamma)^{\sigma-1}$, ἄχρις οὗ ἀπαντῆσαι γένοιτο τὴν πρᾶξιν προϊοῦσαν τῷ μηδενί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς μὲν οὖν τὸ τῆς ῥίζης ἑπόμενον ὄνομα διὰ τῆς ἐπιταχθείσης διαιρέσεως ὑπεξάγεται, ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν δυνάμεων συστάσεως (§. 688) ῥᾴδιον συνιδεῖν, τὰ δὲ λοιπὰ καθ' αὑτὰ δῆλα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Α.

§. 700. Ἐὰν τοῦ προτεθέντος (§. 694.) τετραγώνου $16\beta^4+16\beta^2\alpha\chi+4\alpha^2\chi^2+16\beta^2\chi^2+8\alpha\chi^3+4\chi^4=\Delta$· ἡ ῥίζα ζητῆται, ἔσται $A=4\beta^2$, καὶ $2A=8\beta^2$· ὡς εἴγε διὰ τούτου διαιρεθείη τὸ $16\beta^2\alpha\chi$, ὃς ὁ πρῶτος ἐστὶ τῶν ὅρων τοῦ λοιποῦ $\Delta-A^2$, προκύψει $2\alpha\chi=B$· τοιγαροῦν $A+B=4\beta^2+2\alpha\chi$· καὶ $(A+B)^2=16\beta^4+16\beta^2\alpha\chi+4\alpha^2\chi^2$· καὶ $2(A+B)=8\beta^2+4\alpha\chi$. Τοῦ γοῦν λοιποῦ $\Delta-(A+B)^2$ πρῶτοι ἀπαντῶσιν ὅροι $16\beta^2\chi^2+8\alpha\chi^3$· ὧν διὰ τοῦ $2(A+B)$ διαιρεθέντων, προκύψει $2\chi^2=\Gamma$. Ἀλλὰ μὴν $\Delta-(A+B+\Gamma)^2=0$. Ἄρα $4\beta^2+2\alpha\chi+2\chi^2$, ἡ ῥίζα ἐστὶν ἡ ζητουμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

§. 701. Προκείσθω τετράγωνον

$$\gamma\gamma-2\gamma\beta+\beta\beta+4\gamma\alpha-4\beta\alpha+4\alpha\alpha=\Delta.$$

Ἔσται δὲ $A=\gamma$, καὶ $2A=2\gamma$· τοῦ δὲ τετραγώνου AA ὑφαιρεθέντος, ἐὰν ὁ προσεχῶς ἑπόμενος ὅρος

διὰ

διὰ 2γ διαιρεθῇ, προκύψει $-\beta = B$· τοιγαροῦν $A + B = \gamma - \beta$· καὶ $(A + B)^2 = \gamma^2 - 2\gamma\beta + \beta^2$. καὶ τούτου ὁμοίως ὑφαιρεθέντος, οἱ τῶν λοιπῶν ὅρων ἐγγὺς ἀκολουθοῦντες $4\gamma\alpha - 4\beta\alpha$, ἢν διαιρεθῶσι διὰ $2\gamma - 2\beta$, παρέξουσι $2\alpha = \Gamma$. Ἄρα $A + B + \Gamma = \gamma - \beta + 2\alpha$.

Καὶ ἐπειδὴ $\Delta - (A + B + \Gamma)^2 = 0$, ἔσται $\gamma - \beta + 2\alpha$ ἡ ῥίζα ἡ ζητουμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

§. 702. Ἀλλ' ὑποκείσθω δὴ τὴν ῥίζαν εὑρεῖν τοῦ τετραγώνου·

$$81 + 108\chi - 24\chi^3 + 4\chi^4 = \Delta.$$

Ἔσται $A = 9$, καὶ $B = 6\chi$· καὶ ἐὰν οὖν τὸ ἀπὸ τῶνδε τετράγωνον $81 + 108\chi + 36\chi^2$ ὑφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δοθέντος, τῶν λοιπῶν ὅρων οἱ πρῶτοι ἔσονται $-36\chi^2 - 24\chi^3$· οἱ δὲ διαιρεθέντες διὰ $18 + 12\chi$, δώσουσι $-2\chi^2$. Καὶ ἔστιν $(9 + 6\chi - 2\chi^2)^2 = \Delta$. Ἄρα κτ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ.

§. 703. Ἤδη δὲ προτεθείσθω καὶ τὴν ἀπὸ τοῦ κύβου

$$8\alpha^3 - 36\alpha^2\beta + 54\alpha\beta^2 - 27\beta^3 + 12\alpha^2\gamma - 36\alpha\beta\gamma + 27\beta^2\gamma + 6\alpha\gamma^2 - 9\beta\gamma^2 + \gamma^3 = \Delta.$$

ῥίζαν ἐξελέσθαι τὴν κυβικήν. Ἔσται οὖν $A = 2\alpha$, καὶ $3A^2 = 12\alpha^2$. Ἐὰν δὲ ὁ κύβος A^3 ἀπὸ τοῦ προτεθέντος κύβου ὑφαιρεθῇ, προσεχὴς ἑξῆς ὅρος ἀπαντήσει ὁ $-36\alpha^2\beta$, οὗ διὰ $3A^2$ διαιρεθέντος, πηλίκον τὸ $-3\beta = B$. Καὶ δὴ $A + B = 2\alpha - 3\beta$. Τούτου δὲ ὁ κύβος ὑφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ προτεθέντος, καταλείψει $12\alpha^2\gamma - 36\alpha\beta\gamma + 27\beta^2\gamma + 6\alpha\gamma^2 - 9\beta\gamma^2 + \gamma^3$· οὗ ἐὰν οἱ πρῶτοι τῶν ὅρων διαιρεθῶσι διὰ $3(A + B)^2 = 3(4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2)$ πηλίκον προελεύσεται τὸ $\gamma = \Gamma$. Καὶ ἔσαι $(2\alpha - 3\beta + \gamma)^3 = \Delta$· ὥστε ἡ ῥίζα ἡ κυβικὴ ἤδη εὕρηται ἡ ζητεμένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 704. Οὕτω μὲν δὴ αἱ ῥίζαι ὑπεξάγονται, ἐξ ὁποσωνοῦν ἂν ὦσιν ὀνομάτων συγκείμεναι, ἀπὸ τῶν δυνάμεων τῶν τελείων. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ἐπισήμου τῆς δυνάμεως ἀρτιαρίθμου τυχάνοντος, ἀεὶ δυνατὸν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔχειν διττὴν (§.691.) παρὰ τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν, καὶ ἡ ἑτέρα τῇ αὐτῇ ἂν μεθόδῳ ληφθείη, ἀποφατικῆς μεταληφθείσης τῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου τῆς κατὰ τὸ Δ δυνάμεως. (οἷον ἐπὶ τοῦ Β΄. τῶν προτεθέντων παραδειγμάτων τεθείσης τῆς $A = -\gamma$)· κἀντεῦθεν ἐφεξῆς τῆς πράξεως περανθείσης κατὰ τὴν ταχθεῖσαν μέθοδον. Ἀλλὰ γὰρ πολλῷ ἂν εὐπετέστερον εἴη, τὰ σημεῖα πάντα τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ἀμείβειν, οὕτω γὰρ ἐπὶ τοῦ εἰρημένου παραδείγματος γένοιτ' ἂν ἡ ἑτέρα τῶν ῥιζῶν $-\gamma + \beta - 2\alpha$· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

Ῥᾴδιον δὲ συνιδεῖν, ὡς οὐκ ἐπὶ πάσης, ὅπως ἂν ἔτυχε δηλουμένης ποσότητος, τὴν καθ' οἱανδήποτε τάξιν ἡμῖν ἐπιταχθεῖσαν ῥίζαν, κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον οἷόντε λαβεῖν. Αὐτίκα καὶ γὰρ τὴν ἀπὸ $\alpha^2 + \beta^2$ τετραγωνικὴν εὐκρινῶς τε καὶ ἄνευ τῆς τῶν ῥιζικῶν καλουμένων σημείων παρεμπλώσεως, ἀποδοῦναι ἀμήχανον. Καὶ εἰσὶ δὲ κατὰ ταύτην καὶ ἄλλαι ἀριθμοῦ ἐπέκεινα παντὸς, οὕτως ἀναπόδοτοι.

§. 706. Οὐ μὴν ἀλλ' ὅπως ἂν καὶ προκέοιτο δηλουμένη τις ποσότης οἷον ἡ Α, ἐὰν μονὰς ληφθῇ αὐτῇ τῇ Α ὁμογενὴς, ἀεί τις μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τῆς εἰρημένης ποσότητος Α ἐμφιλοχωρήσειεν ἂν μέση ἀνάλογον. Ἀμέλει τοι ἐὰν ὦσιν 1 καὶ Α ἐν γραμμαῖς διδόμεναι, ῥᾷστα ἡ μέση (§. 452.) ἐξευρεθήσεται. Εὑρεθεῖεν δ' ἂν καὶ μέσαι δύο ἀνάλογον μεταξὺ