$\alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^{0}, \alpha^{1}, \alpha^{2}, \alpha^{3}, \alpha^{4}, \alpha^{5}$,

ὁ ὅρος α Ῥίζα καλεῖται πάντων τῶν λοιπῶν· οἱ δὲ, Δυνάμεις αὐτῆς ἀκούουσιν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν ὅρον ἐπισήμου ἑκάστη παρονομαζόμεναι. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ ἀριθμοῦ καὶ τῇ ῥίζῃ τὸ ὄνομα, ἢ πρὸς τήνδε, ἢ τήνδε τὴν δύναμιν ἀναφέρεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 655. Ἐνθεντοι καὶ α^2 δύναμις ἤκουσε Δευτέρα τῆς ῥίζης α· ἡ δὲ α ἀνάπαλιν ῥίζα Δευτέρα τῆς δυνάμεως α^2. Καὶ α^3 δὲ δύναμις Τρίτη τῆς ῥίζης α· ἡ δὲ α ῥίζα Τρίτη τῆς δυνάμεως α^3· καὶ οὕτω κἀπὶ τῶν λειπῶν. Καθ᾽ ἃ δὴ καὶ α^1 Πρώτην δύναμιν τῆς αὐτῆς ῥίζης α θέμις ἀποκαλεῖν ἀφ᾽ ἧς οὐθέντι τὸ παράπαν διενήνοχε· τὸ δὲ α^0, ἤτοι 1 ἀδύναμον. Ἀλλὰ α^{-1} λέγοιτ᾽ ἂν τῆς α ῥίζης δύναμις Ὑποπρώτη, καὶ α^{-2} Ὑποδευτέρα, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Εἰ καὶ οὕτως ἁπλῶς ἐκράτησε ταύτας ἀποκαλεῖν τοὺς κατὰ τὰ ἐπίσημα μόνον ἀριθμοὺς ὀνομάζοντας· οἷον τὴν α^{-5} φέρε, δύναμιν εἶναι λέγοντας τῆς ῥίζης α, ἧς τοὐπίσημον, ἤτοι ὁ ἐκθέτης -5. κτλ.

§. 656. Κατὰ ταυτὰ δὲ καὶ α^2 τὸ Τετράγωνον ἦν τῆς δυνάμεως α· καὶ α^3 τῆς αὐτῆς ὁ Κύβος· καὶ α^4 τὸ Διτετράγωνον, καὶ οὕτως ἑξῆς· ὅτι δηλαδὴ ὁ λόγος $\alpha^2 : 1$ διπλασίων τοῦ $\alpha : 1$, ἡλίκος δὴ καὶ ὁ τῶν τετραγώνων, ὧν α καὶ 1 σημαίνουσι τὰς πλευράς. Καὶ ὁ λόγος $\alpha^3 : 1$ τριπλασίων τοῦ $\alpha : 1$, ἡλίκος δὴ ὁ τῶν κύβων, ὧν αἱ πλευραὶ α καὶ 1. Παραπλησίως οὖν καὶ τῶν ῥιζῶν ἡ μὲν δευτέρα εἴρηται καὶ Τετραγωνική· ἡ δὲ τρίτη Κυβική· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλὰ γὰρ εἰς σημασίαν τῶν ὑπερτέρων δυνάμεών τε καὶ ῥιζῶν, ἡ τῶν

τῶν τοιῶνδε ὀνομάτων χρῆσις καθ' ἡμᾶς ἤδη κατήργηται.

§. 657. Τὸ δ' εἰρημένον τὰς παρωνυμίας ταύτας τὰς αὐτὰς κρατεῖν, ὅ,τίποτ' ἂν τὸ α σημαίνειν τάσσοιτο, οὐδέπως ἐστὶ νοητέον· οἷον ἐὰν $\alpha = \beta^{\sigma}$, ἔσται $(\beta^{\sigma})^2$ ἡ τοῦ α, ἢ τοῦ β^{σ} δύναμις ἡ δευτέρα· καὶ $(\beta^{\sigma})^3$ ἡ τρίτη· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἢ ἐὰν $\alpha = \sqrt{\beta}$, ἔσται $(\sqrt{\beta})^2$ ἡ τοῦ α, ἢ τοῦ $\sqrt{\beta}$ δύναμις ἡ δευτέρα· καὶ $(\sqrt{\beta})^3$ ἡ τρίτη· καὶ αἱ λοιπαὶ ὡσαύτως. Οὕτω καὶ ἐὰν τεθῇ $\alpha = (\beta\gamma\gamma + \gamma^3)$ ἔσται $(\beta\gamma^2 + \gamma^3)^{\sigma}$ αὐτοῦ τοῦ α, ἢ τοῦ $(\beta\gamma\gamma + \gamma^3)$ δύναμις, ἡ κατὰ τὸ σ. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον αὐτὸ τοῦτο καὶ περὶ τῶν ῥιζῶν τῶν κατὰ πάσας τὰς τάξεις νοήσομεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 658. Ἐπειδὴ ἐν οἱαδήποτε προόδῳ γεωμετρικῇ, ἕκαστος τῶν ὅρων ἐστὶ πρὸς ἕτερον, ὡς τρίτος ὁ τυχὼν πρὸς τέταρτον τὸν ἐπίσης ἀπέχοντα, καὶ πρὸς μέρη τὰ αὐτά· ἐὰν ἐπὶ τῆς προσληφθείσης προόδου ὁποιοσοῦν ὅρος, δι' ὁποιουδήποτε πολλαπλασιασθῇ, ἢ γοῦν διαιρεθῇ, τὸ γινόμενον, ἢ τὸ πηλίκον, εἴς τις τῶν κατὰ τὴν πρόοδον ὅρων εἶναι ὀφθήσεται, τοῖς ἀπὸ τοῦ τρίτου πρόσω, ἢ ὀπίσω ἀριθμοῦσιν ἁπάντων. Οὕτως $\alpha^2 \times \alpha^3 = \alpha^5$· καὶ $\alpha^{-1} \times \alpha^{-2} = \alpha^{-3}$· ὡσαύτως καὶ $\frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \alpha$· καὶ $\frac{\alpha^5}{\alpha^3} = \alpha^2$· καὶ $\frac{\alpha^2}{\alpha^5} = \alpha^{-3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 659. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς ῥίζης ὁποιωνδήποτε δυνάμεων, ἐπ' ἀλλήλας ἀγομένων, δύναμις ἐστὶ καὶ τὸ γινόμενον ἀπὸ ῥίζης τῆς αὐτῆς. Τῆς δὲ τηλικαύτης δυνάμεως ἐπίσημον, τὸ ἐκ τῶν ἐν ταῖς ἐπιπολλαπλασιαζομέναις δυνάμεσιν ἐπι-

ἐπισήμων ἄθροισμα. Ἐὰν δὲ ὁποιαδήποτε δύναμις, δι' ὁποιασδήποτε ὁμοῤῥίζου δυνάμεως διαιρεθῇ, ἔσται δὴ καὶ τὸ πηλίκον δύναμις ὁμόῤῥιζος· ἧς ἐπίσημον ἡ τῶν ἐν ἐκείναις ταῖς δυνάμεσιν ἐπισήμων διαφορά. Τῶν μὲν οὖν $α^{μ}$ καὶ $α^{τ}$ δυνάμεων ἐπ' ἀλλήλαις ἀγομένων, τὸ ἐπίσημον τοῦ γινομένου ἔσται $μ + τ$· τῶν αὐτῶν δὲ τῆς προτέρας διαιρεθείσης διὰ τῆς δευτέρας, τὸ τοῦ πηλίκου ἐπίσημον ἔσται $μ - τ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 660. Ὅτι δὲ $α^{-3} = \frac{α^{2}}{α^{5}}$, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ὅρων τῶν ἐν τῷ κλάσματι διὰ $α^{2}$ διαιρεθῇ, ἑπομένως ἔσται $α^{-3} = \frac{1}{α^{3}}$. Καὶ ἐν γένει $α^{-μ} = \frac{1}{α^{μ}}$. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἐκ τῆς φύσεως τῆς γεωμετρικῆς προόδου καταφανές. Δῆλον γὰρ κἂν ἐκ τοῦδε τοῦ παραδείγματος,

$$\frac{1}{32},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{8}{1},\ \frac{16}{1},\ \frac{32}{1}.$$

ὅτι οἱ ἀπὸ τῆς μονάδος ἐν ἴσοις τοῖς διαλείμμασιν ἀλλ' ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῶν μερῶν ἀφεστῶτες ὅροι, διὰ κλασμάτων ἐκδηλοῦνται, ὧν θάτερον θατέρου ἐστὶ τὸ ἀντίστροφον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 661. Ἐπειδὴ δὲ ἐν γένει $α^{μ} \times α^{τ} = α^{μ+τ}$, ἐὰν ᾖ $μ = τ$, ἔσται $α^{2μ}$ τῆς ποσότητος $α^{μ}$ δύναμις δευτέρα. Ἡ δέ, πολλαπλασιασθεῖσα αὖθις διὰ $α^{μ}$, δώσει $α^{3μ}$ δύναμιν τὴν τρίτην, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ κατὰ γένος, πᾶσα δύναμις $α^{μ}$, ὡς ῥίζα τις θεωρουμένη, πρὸς ἄλλην ὁποιανοῦν δύναμιν ἧς ἐπίσημον φέρε τὸ σ, ἐξαίρεται, τῶν κατ' αὐτὰς ἐπιπολλαπλασιαζομένων ἐπισήμων μ καὶ σ, οὕτως ὥστε ἀνακύπτειν $α^{μσ}$. Ὅπερ αὖθις ἡ τῆς γεωμετρικῆς προόδου φύσις, σαφῶς παρίστησι. Δῆλον γὰρ (ὃς δ' ἂν

εἴη

εἴη ὁ ὁλοχερὴς ἀριθμὸς ὁ ὑπὸ τῦ μ σημαινόμενος) ὡς οἱ ἐν τῇ προόδῳ ὅροι,

$$1 \cdot\cdot\, \alpha^{\mu} \cdot\cdot\, \alpha^{2\mu} \cdot\cdot\, \alpha^{3\mu} \cdot\cdot\, \alpha^{4\mu} \cdot\cdot\, \alpha^{5\mu}$$

ἐν ᾗ ὁ δεύτερος ἐςὶν α^{μ}, ἴσῳ τῷ διαλείμματι ἀλλήλων ἀπέχϐσιν· οἵτε μεταξὺ τῶν 1 καὶ α^{μ} παρεμπίπ]οντες, ἰσάριθμοι τοῖς μεταξὺ τῶν α^{μ} καὶ $\alpha^{2\mu}$ εἰσὶ, καὶ τοῖς μεταξὺ τῶν $\alpha^{2\mu}$ καὶ $\alpha^{3\mu}$ ὡσαύτως· καὶ ἐφεξῆς. Τοιγαρῦν καὶ οἱ ἐκκείμενοι 1, α^{μ}, $\alpha^{2\mu}$, $\alpha^{3\mu}$, κ. ξ. γεωμετρικῶς προβαίνϐσιν· ὅ, τε $\alpha^{2\mu}$ τῦ α^{μ} ἐςὶν ὁ τετράγωνος, καὶ ὁ $\alpha^{3\mu}$ ὁ κύβος, καὶ ὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 662. Καὶ ἀνάπαλιν ἄρα ἐὰν τὸ ἐπίσημον ἡστινοσῦν δυνάμεως α^{μ} διαιρεθῇ διὰ 2, τὸ δὲ πηλίκον ὡς ἐπίσημον καινῆς δυνάμεως ἐκληφθῇ, ἔςαι $\alpha^{\frac{1}{2}\mu}$ τῆς προτέρας ἡ ῥίζα δυνάμεως ἡ τετραγωνική. Ἐὰν δὲ διὰ 3 τὸ $\alpha^{\frac{1}{3}\mu}$ τὴν ῥίζαν ἐκείνης δηλώσει τὴν κυβικήν. Καὶ ἐν γένει, τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}}$ τῆς α^{μ} δυνάμεως τὴν ῥίζαν προβαλεῖται τὴν κατὰ τὸν βαθμὸν σ. Διαιρϐμένϐ γὰρ τῦ μ διὰ τῦ σ, ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὡς τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}}$ ἐξαρθὲν ἐπὶ τὴν δύναμιν, ἧς τὐπίσημον σ, γίνεται α^{μ}· μὴ διαιρϐμένϐ δὲ, καὶ τὸ $\frac{\mu}{\sigma}$ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς εἶναι ἐ δύναται, ἀλλ' ὐδὲν ἧττον ὅμως τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}}$, τὴν ῥίζαν $\sqrt[\sigma]{\alpha^{\mu}}$ ὑποσημανεῖ, ὅ, τι δ' ἂν τὸ α τις ὑποθείη.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ'.

§. 663. Ἔςω $\alpha = \frac{\beta^{\varrho}\delta^{\tau}}{\gamma^{\upsilon}}$, καὶ ἔςαι· (§. 191.)

$$\alpha^{2} = \frac{\beta^{2\varrho}\delta^{2\tau}}{\gamma^{2\upsilon}}$$

$$\alpha^{3} = \frac{\beta^{3\varrho}\delta^{3\tau}}{\gamma^{3\upsilon}}$$

Καὶ

Καὶ οὖν γίνει, $\alpha^{\mu} = \frac{\beta^{\mu\rho}\,\delta^{\mu\tau}}{\gamma^{\mu\nu}}$

Ὅθεν ἀνάπαλιν, ἐὰν ᾖ $\alpha^{\mu} = \frac{\beta^{\rho}\,\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}$, δέῃ δὲ λαβεῖν ἀπὸ α^{μ} τὴν ῥίζαν τὴν κατὰ τὸν βαθμὸν σ, ἕκαστον τῶν ἐπισήμων ρ, τ, ν διαιρετέον διὰ σ, ὥστε γενέσθαι.

$$\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}} = \frac{\beta^{\frac{\rho}{\sigma}}\,\delta^{\frac{\tau}{\sigma}}}{\gamma^{\frac{\nu}{\sigma}}} = \sqrt[\sigma]{\alpha^{\mu}}.$$

Διὸ δὴ οἱ τύποι οἵδε,

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^{\rho}\,\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\sqrt[\sigma]{\beta^{\rho}}\times\sqrt[\sigma]{\delta^{\tau}}}{\sqrt[\sigma]{\gamma^{\nu}}}$$

ἀείποτε ἰσοδυναμήσουσιν· ἤτε καθ' οἱανδήποτε βαθμὸν σ ῥίζα τοῦ ὅρου α^{μ}, τοῦ τετάρτου ἀνάλογον πρὸς γ^{ν}, καὶ β^{ρ}, καὶ δ^{τ} τυγχάνοντος, τετάρτη ἀνάλογον καὶ αὐτὴ ἔσται πρὸς τὰς ῥίζας, γ^{ν}, β^{ρ}, δ^{τ}, τὰς ὁμοβαθμίους (§. 192.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 664. Ἐὰν δὲ ᾖ $\alpha^{\mu} = \frac{\alpha^{\rho}\,\alpha^{\tau}}{\alpha^{\nu}}$, ἔσται $\mu = \rho + \tau - \nu$. Καὶ ἑκατέρωθεν ἄρα τῆς ὁμοβαθμίου ληφθείσης ῥίζης, ἐὰν γένηται $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}} = \frac{\alpha^{\frac{\rho}{\sigma}}\,\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}}}{\alpha^{\frac{\nu}{\sigma}}}$, ἔσται $\frac{\mu}{\sigma} = \frac{\rho+\tau-\sigma}{\sigma} = \frac{\rho}{\sigma} + \frac{\tau}{\sigma} - \frac{\nu}{\sigma}$. Τοιγαροῦν τὸ ἐπίσημον $\frac{\mu}{\sigma}$ γίνεται ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{\rho}{\sigma}$, $\frac{\tau}{\sigma}$, $\frac{\nu}{\sigma}$ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ τὸ τοῦ ὅρου α^{μ}, τοῦ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας $\alpha^{\nu} : \alpha^{\rho} = \alpha^{\tau} : \alpha^{\mu}$ τεταρτεύοντος, ἐκ ἐκ τῶν ὁλοχερῶν ἐπισήμων τῶν κατὰ τὲς ἡγεμένες ὅρες συνεπιφέρεται· προσθέσει δηλαδὴ τῶν ἐπισήμων τῶν ἐπὶ ταῖς δυνάμεσι τῆς ῥίζης α, ὧν τὴν ἑτέραν πολλαπλασιάζειν δεῖ διὰ τῆς ἑτέρας, καὶ ἀφαιρέσει τῦ κατὰ τὸν διαιρέτην ἐπισήμε ἀπὸ τῦ ἀθροίσματος. Ἔνθεντοι καὶ ἐὰν τύχῃ τῶν κλασματικῶν τὰ ἐπίσημα, παραπλησίῳ τῷ ὑπολογισμῷ, τὰ τῦ γινομένε, ἢ τῦ πηλίκε, ὡς καὶ κατὰ τὸ ὁλοχερῆ ἐκκαλύπτεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 665. Καὶ ἔςαι δὴ $\alpha^{2\mu}$ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς δυνάμεως α^{μ}, καὶ $\alpha^{3\mu}$ ὁ κύβος, καὶ ἑξῆς ὁμοίως· κἄντε ὁλοχερὲς τύχοι τὸ μ, κἄντε ᾖ κλασματῶδες. Καθ᾽ ἑκατέραν γὰρ τῶν ὑποθέσεων,

$$\alpha^{0},\ \alpha^{\mu},\ \alpha^{2\mu},\ \alpha^{3\mu},\ \alpha^{4\mu},\ \alpha^{5\mu} - - - \alpha^{\sigma\mu}$$

πρόοδος ἡμῖν ἐκκείσεται γεωμετρικὴ, ἐν ᾗ ἀπὸ τῆς μονάδος α^{0}, ἄχρι τῦ $\alpha^{\sigma\mu}$, ὅροι μεσιτεύεσι τὸν ἀριθμὸν σ, ὧν ὁ δεύτερος ἐςὶν ὁ α^{μ}.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 666. Διὰ τῶνδε τῶν κανόνων, τὰ ῥιζικὰ τῶν σημείων, ἅτινα τῷ τύπῳ ἀπαντήσει, ῥᾷςα ἐκ μέσε γενήσεται· καὶ εἴπε παρὰ ταῦτα, ἐπὶ ἐγκειμένε τινὸς τύπε, ὃς ἂν δίκην μέλες ἐξισώσεως θεωροῖτο, μηδὲ ποσότητες ἐνεῖεν ἐξ ἄλλων συνδέσμῳ συνημμένων συγκείμεναι, εἰς τύπον ἀείποτ᾽ ἂν ἀναχθείη τὸν ἐμφερῆ τῷδε.

$$\alpha^{\mu}\beta^{\nu} + 3\alpha\beta^{\mu}\gamma^{-\epsilon} - 5\alpha^{\tau}\beta^{-\nu}\gamma^{\nu}.$$

Ἐν ᾧ δηλαδὴ ἕκαςον τῶν σημείων, γινόμενόν τι μοναδικὸν διατίθησιν, ἐκ δυνάμεων συνεςὼς ὧν τὰ ἐπίσημα ἤτοι ὁλοχερῆ, ἢ κεκλασμένα· θετικὰ, ἢ γεν ἀποφατικά. Νοητέον δὲ τὲς ὅτως ἔχοντας τύπες, εὐκρινεῖς αὐτὲς καὶ ἀῤῥίζες ἀκέοντας.

ΘΕΩΡΗ-

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 667. Ἐὰν $\alpha + \beta - \gamma$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $+ \delta$, ἔσται δὴ τὸ γινόμενον $\delta\alpha + \delta\beta - \delta\gamma$. Ἐὰν δὲ διὰ $- \delta$, προκύψει $- \delta\alpha - \delta\beta + \delta\gamma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐστὶ γὰρ $1 : \delta = + \alpha : + \delta\alpha$
καὶ $1 : \delta = + \beta : + \delta\beta$
καὶ $1 : \delta = - \gamma : - \delta\gamma$

Ἄρα (§. 174.), $1 : \delta = \alpha + \beta - \gamma : \delta\alpha + \delta\beta - \delta\gamma$· ὅπερ ἰῶ τὸ πρῶτον.

Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται, ὅτι καὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἀναλογίας σημείων, τῶν κατὰ τὸν δεύτερον καὶ τέταρτον ὅρον ἐπαμειβομένων (§. 652.) ἔσται,

$$1 : - \delta = \alpha + \beta - \gamma : - \delta\alpha - \delta\beta + \delta\gamma.$$

ὅπερ ἰῶ θάτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 668. Τοῦ ἄρα κατὰ συμπλοκὴν παράγοντος $\alpha + \beta - \gamma$ διὰ τοῦ ἁπλοῦ $+ \delta$, ἢ $- \delta$ πολλαπλασιαζομένου, γίνεται τὸ παραγόμενον, τῷ τὸν πολλαπλασιασμὸν διὰ πάντων ἐπάγεσθαι τῶν ὅρων, καὶ τὰ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντα, διὰ τῶν σὺν οἷς προκύπτει σημείων διασημαίνεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 669. Κἀντεῦθεν ὁ λόγος ἐπιφέρεται τοῦ δι' ἀλλήλων τοὺς ἐν συμπλοκῇ πολλαπλασιάζειν παράγοντας· οἷον τὸν $\alpha + \beta - \gamma$, διὰ τοῦ $\delta - \varepsilon + \zeta$. Μετιοῦσι γὰρ τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς εἰ καὶ ἁπλοῦς τις εἴη, γενήσεται $= \alpha (\delta - \varepsilon + \zeta) + \beta (\delta - \varepsilon + \zeta) - \gamma (\delta - \varepsilon + \zeta)$· τὰ δὲ γινόμενα ἐὰν ἤδη ὁ παράγων $\delta - \varepsilon + \zeta$ ἐκληφθῇ ὡς συγκείμενος, τοιαῦτα προβαίνει.

$$
\begin{aligned}
+\alpha\,(\delta - \varepsilon + \zeta) &= \alpha\delta - \alpha\varepsilon + \alpha\zeta \\
+\beta\,(\delta - \varepsilon + \zeta) &= \beta\delta - \beta\varepsilon + \beta\zeta \\
-\gamma\,(\delta - \varepsilon + \zeta) &= -\gamma\delta + \gamma\varepsilon - \gamma\zeta.
\end{aligned}
$$

Καὶ πρόεισι τοίνυν τὸ οὕτω παραγόμενον τῶν ὅρων ἑκάστου τῶν ἐπὶ θατέρου τῶν παραγόντων, πολλαπλασιαζομένου δι' ἑκάστου τῶν ἐπὶ θατέρου, καὶ τῶν ἐντεῦθεν ἀνακυπτόντων τοῖς σὺν οἷς συμπροῆλθε σημείοις γνωριζομένων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 670. Ἔνθεν τοι ὁ ποσότητος συμπεπλεγμένης διὰ παραπλησίας ἄλλης ῥᾷστα τελεῖται πολλαπλασιασμὸς, ἐὰν εὐκρινεῖς τε καὶ ἄῤῥιζοι ἀμφότεραι τύχωσι. Πρῶτον μὲν γὰρ ἐπ' ἀλλήλων ἄγονται οἱ ἀριθμοί· ἔπειτα δὲ ἐπισημειοῦται τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ποσοτήτων ἃς τὰ γράμματα ὑποδηλοῖ. Ἐπεὶ δ' ἐν τούτοις ἡ τῶν γραμμάτων θέσις παρ' ἡμῖν κεῖται, ὅπως ἂν βουλητὸν εἴη καταγράφειν αὐτὰ, εὖ ἂν ἔχοι κατὰ τὴν πρὸς ἄλληλα τάξιν τὰ στοιχεῖα ἐκλάσσειν, ἵν' εὐδηλότερον οὕτω τῶν γινομένων ἅττα ταυτὰ, καὶ ἅπερ ἕτερα καταφαίνοιτο. Ὧδε δέ τοι τῶν παραγομένων τὰ ἁπλούστερα εὑρεθέντα, ἐξ ὧν τὸ ὁλοσχερὲς συγκροτεῖται, συναπτέα ἐφ' ἓν, ὡς ἂν ἧπερ οἷόν τε ἁπλούστατα τὸ ζητούμενον παραστῇ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α.

$$
\begin{array}{l}
\alpha + 2\beta - \gamma + 3\delta \\
2\alpha - \beta + \gamma \\
\hline
2\alpha\alpha + 4\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 6\alpha\delta \\
-\alpha\beta - 2\beta\beta + \beta\gamma - 3\beta\delta \\
\quad \alpha\gamma + 2\beta\gamma - \gamma\gamma + 3\gamma\delta \\
\hline
2\alpha\alpha + 3\alpha\beta - \alpha\gamma + 6\alpha\delta - 2\beta\beta + 3\beta\gamma - 3\beta\delta - \gamma\gamma + 3\gamma\delta.
\end{array}
$$

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

$$2\alpha\beta - 3\alpha\gamma + \beta\gamma$$
$$\alpha\gamma - 2\beta\gamma$$

$$2\alpha\alpha\beta\gamma - 3\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha\beta\gamma\gamma$$
$$-4\alpha\beta\beta\gamma + 6\alpha\beta\gamma\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma$$

$$2\alpha\alpha\beta\gamma - 3\alpha\alpha\gamma\gamma + 7\alpha\beta\gamma\gamma - 4\alpha\beta\beta\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

$$\alpha^3 + 2\beta\alpha^2 - 3\beta\gamma\alpha$$
$$2\alpha^2 + 3\beta\alpha$$

$$2\alpha^5 + 4\beta\alpha^4 - 6\beta\gamma\alpha^3$$
$$3\beta\alpha^4 + 6\beta^2\alpha^3 - 9\beta^2\gamma\alpha^2$$

$$2\alpha^5 + 7\beta\alpha^4 - 6\beta\gamma\alpha^3 + 6\beta^2\alpha^3 - 9\beta^2\gamma\alpha^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ.

$$\alpha^{\mu} + 2\alpha^{\mu-\nu}\beta^{-\tau} - 3\alpha^{-\mu}\beta^{\nu}$$
$$3\alpha^{\nu} + \beta^{\tau}$$

$$3\alpha^{\mu+\nu} + 6\alpha^{\mu}\beta^{-\tau} - 9\alpha^{-\mu+\nu}\beta^{\nu}$$
$$\alpha^{\mu}\beta^{\tau} + 2\alpha^{\mu-\nu} - 3\alpha^{-\mu}\beta^{\nu+\tau}$$

Ταῦτα δὲ συνεπιτμηθῆναι οὐχ οἷά τε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ προσεχῶς ἀνωτέρω παραδείγματος διὰ τῶν μ καὶ ν καὶ τ ὑποσημαίνηται κλάσματα· ἢ δὲ καθ' ὑπόθεσιν $\mu = \frac{3}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\tau = \frac{1}{3}$, ἔσται $\mu + \nu = 2$; καὶ $\nu - \mu = -1$, καὶ $\mu - \nu = 1$, καὶ $\nu + \tau = \frac{5}{6}$· ἅπερ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀντεισενεχθέντα, τὸ ἀνῆκον τῇ ὑποθέσει τηρήσει. Ὡσαύτως δὲ χωρητέον συνάπλωσι καὶ τὰ διὰ γραμμάτων ἐκκείμενα κλάσματα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 671. Καὶ κατὰ τάδε δὴ τὰ σχήματα ἅπαντες οἱ τῶν εὐκρινῶς τε καὶ ἀῤῥίζως ἐγκειμένων ποσοτήτων πολλαπλασιασμοὶ περανθήσονται. Πάρεργον δ' ἂν εἴη τὸ οὕτω προκύπτον, κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων οὕτως ἐκτάσσειν, ὡς τὰς μὲν ὑπερτερούσας ἡγεῖσθαι, τὰς δὲ βαθμηδὸν ὑποβαινούσας ἐφέπεσθαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 672. Οἱασδηποτοῦν ποσότητος εὐκρινοῦς τε καὶ ἀῤῥίζου δι' ἄλλης ποσότητος παραπλησίας διαιρεθείσης, τὸ πηλίκον ὡς οἷόν τε ἁπλούστατα ἔχον ἀποδοῦναι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 673. Ἔστω δὴ πηλίκον $\frac{\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha+\beta}$, ἐν ᾧ τῶν ὅρων ἑκάτερον, κατὰ τὸ αὐτὸ γράμμα τὸ α ἐκτεταγμένον ὄντα ἁπλούστερον ἀποδοῦναι δεῖ. Ἐὰν τοίνυν τὸν διαιρέτην $\alpha+\beta$, δι' ἁπλοῦ παράγοντος, ὑφ' οὗπερ ἂν ὁ πρῶτος τοῦ διαιρετέου προέλθοι ὅρος, πολλαπλασιάσῃς, ὃς ἐπὶ τοῦ προκειμένου παραδείγματος ἐστὶν α^2 τό, τε γεγονὸς $\alpha^3+\alpha^2\beta$, ἀπὸ τοῦ διαιρουμένου ὑφέλῃς, καὶ τὸ λειπόμενον ὑποσημειώσῃς $-2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$, πηλίκον ἕξεις μικρὸν τοῦ ἀνωτέρω ἁπλούστερον τό, $\alpha^2+\frac{\beta^3-\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}$.

Ὡς εἴγε καὶ τούτου ἔτι βούλοιο τὸ ἁπλούστερον ἀπενέγκασθαι, μέτιθι καὶ τὸ ἐν χερσὶ κλάσμα παραπλησίως. Καὶ δὴ διαιρετέου μὲν ἤδη προκειμένου τοῦ $-2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$, διαιρέτου δὲ τοῦ αὐτοῦ ἐκείνου $\alpha+\beta$, ἐὰν τοῦτον διὰ $-2\alpha\beta$ πολλαπλασιάσῃς, προκύψει $2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2$· ὅπερ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαι-

ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται $\alpha\beta^2+\beta^3$. Καὶ παρέςαι ἤδη πηλίκον τὸ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha+\beta}$.

Ἁπλούςατον δὲ προελεύσεται τὸ πηλίκον, ἐὰν καὶ ἑξῆς τὸν διαιρέτην πολλαπλασιάσῃς ἔτι διὰ β^2· τὸ γὰρ οὕτω γενόμενον $\alpha\beta^2+\beta^3$ ὡς ἂν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ ἔσχατον κλάσμα διαιρετέου ἀφαιρεθῇ, ἐπεὶ μηδὲν περαιτέρω ὑπολειφθήσεται, εὔδηλον ὅτι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον ἔςαι $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

§. 374. Εἰώθαμεν δὲ μιᾷ προόδῳ ἐπὶ τῆς οὕτω περαινομένης πράξεως χωρεῖν, ἐφ' ὅσον ἂν οὕτως ἄκλαςα τὰ μέρη τοῦ πηλίκου προκύπτοι, ὅπερ ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων σχημάτων προχειρότατα τελεῖται. Ἔνθα τῶν παραγομένων, ἅπερ ἀφαιρεῖν δέον, τὰ σημεῖα ἐπὶ τἀναντία μετήμειπται, ὡς ἂν ἁπλῇ προσθέσει τὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἐκπεραίνοιτο.

Διαιρέτης.	Διαιρετέος.	Πηλίκον.
$\alpha+\beta$	$\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$	$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
	$-\alpha^3-\alpha^2\beta$	
	$-2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$	
	$+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2$	
	$\alpha\beta^2+\beta^3$	
	$-\alpha\beta^2-\beta^3$	
	0	

Σχῆμα ἕτερον.

Διαιρέτης.	Διαιρετέος.
$\alpha^3+3\alpha\beta\gamma-\beta^2\gamma$	$2\alpha^5+\alpha^3\beta\gamma-2\alpha^2\beta^2\gamma-15\alpha\beta^2\gamma^2$
	$+5\beta^3\gamma^2$
Πηλίκον.	$-2\alpha^5-6\alpha^3\beta\gamma+2\alpha^2\beta^2\gamma$
$2\alpha^2-5\beta\gamma$	$-5\alpha^3\beta\gamma-15\alpha\beta^2\gamma^2+5\beta^3\gamma^2$
	$+5\alpha^3\beta\gamma+15\alpha\beta^2\gamma^2-5\beta^3\gamma^2$
	0

§. 675. Ἐπειδὴ δὲ οὐκ ἀεὶ διὰ τῶν ἀφαιρέσεων ὁ διαιρέτης οὕτως οἴχεται εἰς τὸ μηδὲν, λοιπὸν ἐστὶν (εἰμήτις ὡς ἐν ἀρχῇ ἰῶ κατὰ χώραν ἐάσαι τὸ κλάσμα ἕλοιτο) ἔκ τε τοῦ ὑπολειπομένου καὶ τοῦ διαιρέτου, καινόντι κλάσμα πορίζεσθαι, ὃ τῷ ἀκλάστῳ τοῦ πηλίκου μέρει προσεπικαταγραπτέον· οἷον εἰ δέοι τὸ $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$ διελεῖν διὰ $\alpha\alpha + \alpha\beta$, ὡδέπως ἕξει τό

ΣΧΗΜΑ.

Διαιρέτης.	Διαιρετέος.	Πηλίκον.
$\alpha\alpha + \alpha\beta$	$\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$	$\alpha + \beta$
	$-\alpha^3 - \alpha^2\beta$	
	$\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$	
	$-\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$	
	$-2\alpha\beta^2$	

τὸ δ' ὅλον πηλίκον $\alpha + \beta - \dfrac{2\alpha\beta^2}{\alpha\alpha + \alpha\beta}$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ κλάσμα δι' οὗ ἤτοι ὁλοχερὲς τὸ πηλίκον, ἢ αὐτοῦ μέρος παρίσταται, ἐφ' ὅσον οἷόν τ' ἐλάχιστα συμπεπλεγμένον τὸν παρονομαστὴν ἀνακλέον, τῶν παραγόντων ὅσοι ἐπ' ἀμφοῖν τοῖς ὅροις κοινῇ ἐμφιλοχωροῖεν, ἀποβαλλομένων. Οἷον τὸ μὲν πηλίκον $\dfrac{\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2}{\alpha\alpha + \alpha\beta}$· ἁπλούστερον ἂν καταγράφοιτο $\dfrac{\alpha\alpha + 2\alpha\beta - \beta^2.}{\alpha + \beta}$ τὸ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαν, οὕτως $\alpha + \beta - \dfrac{2\beta\beta}{\alpha + \beta}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς μὲν οὖν ὀρθῶς κατὰ τοὺς τεθέντας κανόνας τὰ τῆς διαιρέσεως χωρεῖ, ῥᾴδιον συνιδεῖν, τῷ τοῖς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραβαλεῖν ὅροις μὴ κατοκνήσαντι.

σαντι. Ἔστι γὰρ οὕτως ἀντίζους τῷ πολλαπλασιασμῷ ἡ διαίρεσις, ὡς ταύτην ἀπὸ τοῦ παραγομένου διὰ θατέρου τῶν παραγόντων, τὸν ἕτερον ἀποδιδόναι, τὸν μετὰ θατέρου τὸ γεγονὸς συναποτελέσαντα. (§. 637.)

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 676. Ὅς δ' ἂν κλασματίας εἴη τὸ πηλίκον ἐν τῷ μέρει συμπληρῶν, ἀλγεῖσθαι ὧδε οὐκ ἀεὶ δυνήσεται, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τὰ κλάσματα, (ἃ μετὰ τοῦ ὁλοχεροῦς συνίστησι τὸ πηλίκον, ὡς μικρόντι πάνυ φέροντα τὸ διάπλωμα), οὐδὲ λόγου τὰ πολλὰ ἀξιοῦται (§. 79.). Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τοῦ ἐσχάτου τῶν ἀνωτέρω τὸ β φέρε, μάλα διαφέρον τύχῃ μεγέθει τοῦ α, τὸ $\alpha + \beta$ μονονουχὶ τῷ β καὶ ἴσον ἔσται, ὡς μορίῳ τούτου πολλοστῷ ὑπερέχον. Ἔνθαντοι τὸ $\frac{2\beta\beta}{\alpha+\beta}$, μικρόντι ἧττον ἔσται τοῦ 2β, τοῦ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ $2\beta\beta$ διὰ μόνου τοῦ β προκύπτοντος. Τοιγαροῦν τοῦ $\frac{2\beta\beta}{\alpha+\beta}$ ἀμεληθέντος, πλέοντι ἂν ἀμεληθείη τοῦ καλὰ τὸ λοιπὸν ἐν τῷ πηλίκῳ μέρος, ἤτοι τοῦ $\alpha + \beta$· τοὐναντίον μέντοι ἐὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κλάσματος, μέγατι ὑπερβάλλον τύχῃ τὸ α ὑπὲρ τὸ β, πολλοστόντι ἔσται τινικαῦτα τὸ $\frac{2\beta\beta}{\alpha+\beta}$, ἡλίκον καὶ ἀδεῶς ἔχειν ὀλιγωρεῖσθαι, ἔνθα μάλιστα τὸ ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς ζητεῖται γινόμενον.

§. 677. Ἄλλως τε δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων καταφανὲς, ὅτι καὶ πολυτρόπως, τὴν δοθεῖσαν διὰ τῆς δοθείσης ποσότητος διαιροῦντας τὸ πηλίκον ἐστὶ παριστᾶν. Καὶ γὰρ δὴ καὶ τὸ κλάσμα, καθ' ὅπερ ἐπὶ τῆς ἐσχάτης ἔστημεν διαιρέσεως, ἔχοι ἂν καὶ περαιτέρω ἀναπτυχθῆναι τόνδε τὸν τρόπον·

$$\alpha+\beta \;\Big|\; 2\beta\beta \cdots\cdots \;\Big|\; \frac{2\beta\beta}{\alpha}-\frac{2\beta^3}{\alpha^2}+\frac{2\beta^4}{\alpha^3},$$

$$-2\beta\beta-\frac{2\beta^3}{\alpha}$$

$$-\frac{2\beta^3}{\alpha}$$

$$+\frac{2\beta^3}{\alpha}+\frac{2\beta^4}{\alpha^2}$$

$$\frac{2\beta^4}{\alpha^2}$$

$$-\frac{2\beta^4}{\alpha^2}-\frac{2\beta^5}{\alpha^3}$$

$$-\frac{2\beta^5}{\alpha^3}$$

Οὗ προσληφθέντος γίνεται τὸ ὅλον πηλίκον,

$$\alpha+\beta-\frac{2\beta\beta}{\alpha}+\frac{2\beta^3}{\alpha^2}-\frac{2\beta^4}{\alpha^3}+\frac{2\beta^5}{\alpha^4\,(\alpha+\beta)}$$

Καὶ γὰρ ἐδ' ἐνταῦθα τὸ κλάσμα τὸ ἐκ τοῦ λοιποῦ καὶ τοῦ διαιρέτου ὀλιγωρητέον, εἰ μὴ καὶ τούτου πρόδηλον εἴη τὸ τῆς σμικρότητος. Ἔσται δὲ καὶ ὧδε τὸ $\frac{2\beta^5}{\alpha^4\,(\alpha+\beta)}$ τοσούτῳ μὲν ἔλαττον, ὅσῳ τὸ β τοῦ α ἐλαττονοῦται· τοσούτῳ δὲ μεῖζον, ὅσῳ τὸ β πρὸς τὸ αὐτὸ α μεγέθει διαφέρον ἐστί.

§. 678. Σημείωσαι ὅτι τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας ῥᾴδιον καὶ ταῖς ποσότησι προσαρμόζειν, ταῖς δυνάμεις παρισώσαις, ὧν τὰ ἐπίσημα ἐν γράμμασι πρόκειται, τοῖς ἀριθμοὺς εἴτε ὁλοκερεῖς, εἴτε καὶ κλασματώδεις ὑποσημαίνουσι.

§. 679. Τούτων γὰρ ἁπάντων κειμένων, οὐδὲν δυσχερὲς οὐδὲ τὰ κλάσματα δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάζειν

ζειν, ἢ διαιρεῖν εὐκρινῆτε ὄντα καὶ ἄῤῥιζα· οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ πολλαπλασιασθὲν μὲν, παραγόμενον δώσει τὸ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· διαιρεθὲν δὲ, πηλίκον τὸ $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$. Ἀλλὰ καὶ διαιρέσει μόνῃ ἑκατέρα ἂν τῶν πράξεων ἐκπερανθείη διὰ τοῦ (:) διασημαινομένη, ὥστε εἶναι μὲν τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γινόμενον $\frac{\alpha : \delta}{\beta : \gamma}$, εἶναι δὲ τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως πηλίκον $\frac{\alpha : \gamma}{\beta : \delta}$. Ὡς οὐ μόνον τῷ μὲν ἐπαλλήλῳ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν, τὸ ὑπὸ τῶν κλασμάτων προκύπτει γινόμενον, τῷ δ' ἐναλλὰξ, τὸ δι' αὐτῶν πηλίκον· ἀλλὰ καὶ διαιρέσει τῇ μὲν ἐναλλὰξ τῶν ὅρων αὐτὰ πολλαπλασιάζεσθαι πέφυκε, τῇ δ' ἐπαλλήλῳ διαιρεῖσθαι (§. 90. 91.).

Ταύτητοι ἐὰν $\frac{\alpha^3\beta^2\gamma}{\varepsilon^4}$ ἐπιπολλαπλασιαστέον τοῦ ἢ ἐπὶ $\frac{\gamma\varepsilon^2}{\alpha\beta}$, καὶ διαιρετέον διὰ τοῦ αὐτοῦ, τὸ μὲν γινόμενον ἔσται $\frac{\alpha^3\beta^2\gamma^2\varepsilon^2}{\alpha\beta\varepsilon^4}$, τὸ δὲ πηλίκον $\frac{\alpha^4\beta^3\gamma}{\gamma\varepsilon^6}$. ὧν δὴ κλασμάτων ἑκάτερον ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον ἔξεσται ἀναγαγεῖν, τὸ μὲν οὕτω γράφοντας, $\frac{\alpha^2\beta\gamma^2}{\varepsilon^2}$. τὸ δὲ οὕτω $\frac{\alpha^4\beta^3}{\varepsilon^6}$

Οὕτω καὶ $\frac{\alpha^\mu\beta^\nu}{\gamma^2\varepsilon^{\nu-1}}$ πολλαπλασιασθὲν διὰ $\frac{\gamma^\nu\varepsilon^3}{\alpha\beta}$, δώσει $\frac{\alpha^\mu\beta^\nu\gamma^\nu\varepsilon^3}{\alpha\beta\gamma^2\varepsilon^{\nu-1}} = \frac{\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu-1}\gamma^{\nu-2}}{\varepsilon^{\nu-4}}$, ἢ $\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu-1}\gamma^{\nu-2}\varepsilon^{4-\nu}$: ἑκάτερον γὰρ ἰσοδύναμον. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς διαιρέσεως τοῦ προτέρου διὰ τοῦ δευτέρου πηλίκον ἔσται, $\frac{\alpha^{\mu}+\beta^{\nu+1}}{\gamma^{\nu+2}\varepsilon^{\nu+2}}$.

Καὶ τὸ $\frac{\alpha^2\beta+\beta^3}{\alpha-\gamma}$ πολλαπλασιαθὲν διὰ $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha\beta}$ δώσει παραγόμενον $\frac{(\alpha^2\beta+\beta^3)\times(\alpha^2-\gamma^2)}{(\alpha-\gamma)\,\alpha\beta}$. ὃ δήπου κλάσμα ἀναχθήσεται τῶν παραγόντων, τοῦ μὲν $\alpha^2\beta+\beta^3$, καὶ $\alpha\beta$, διὰ τοῦ β διαιρεθέντος, τοῦ δὲ $\alpha^2-\gamma^2$, καὶ $\alpha-\gamma$, δι' αὐτοῦ τούτου τοῦ $\alpha-\gamma$· ὅθεν πηλίκον τὸ $\alpha+\gamma$. Καὶ ἔσται ἄρα ἀναχθὲν

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2)\times(\alpha+\gamma)}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma}{\alpha}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 680. Ἡ μὲν οὖν τοιάδε τοῦ κλάσματος εἰς τὸ ἁπλούστατον ἀναγωγὴ, τοὺς τῶν ὁπωσοῦν ἐγκειμένων ποσοτήτων διαιρέτας δήλους προϋποτίθησιν· ἢ γοῦν τὸν τρόπον τοῦ αὐτοὺς ἀνακαλύπτειν· ὧν ἐν χερσὶν ὄντων, οἱ τὸν ἀριθμητὴν κοινῇ καὶ τὸν παρονομαστὴν διαιροῦντες προχείρως ἐκλέγονται. Καὶ ἔστι μὲν αὐτομάτοις πολλαχοῦ ἁπαντῶσιν ἐντυγχάνειν τοῖς τοιοῖσδε διαιρέταις· ἁπλοῖς δὲ οὖσι καὶ μοναδικοῖς οὐκ ἔσθ' ὅπου οὐ πάρεστιν. Οὕτως αὐτόθεν φανερὸν τοῦ $\alpha\alpha+\alpha\beta$ μοναδικὸν ὑπάρχειν διαιρέτην τὸν α. Οὐ πολλῷ δὲ δυσχερέστερον καὶ τοῦ $\alpha\alpha+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$, τοὺς $\alpha+\beta$, καὶ $\alpha-\gamma$ διαιρέτας ὄντας συνιδεῖν. Ἀλλὰ γὰρ τοὺς τῶν μᾶλλον συνθέτων ἀνακαλύπτειν μακρῷ ἐργωδέστερον καὶ εὐκρινῶν ὄντων, καὶ ἀρρίζων· καὶ οὐδὲ τοῦ παρόντος ἐστὶ τόπου τοὺς κανόνας παραθέσθαι, οἷς πρὸς θήραν τὴν ἐκείνων ποδηγετούμεθα.

Διὸ καὶ εἰς τὴν ἀπόπειραν τὸ περὶ τούτου παραθετέον· καθ' ἣν ἀνυσιμώτατα ἐπιχειρήσομεν τῇ εὑρέσει, τοὺς ἐξ ὧν τὸ παραγόμενον, οὗ τοὺς διαιρέ-

τας