διάφορον, ὅτι κατὰ μὲν ἐκείνην τῆς τῶν δύο ποσοτήτων ἀληθοῦς ἀεὶ διαφορᾶς λαμβανομένης, διὰ ταύτης ἀριθμητικόν τι τὰ πολλὰ παρίσταται κεφάλαιον. Ὃ δή, ὡς ἐξ ἀφαιρέσεως ἀνακύπτον, διαφορὰν καλεῖσθαι κἀνταῦθα ἐκράτησε. Προσέχειν οὖν κἀν τούτοις μὴ τὴν Ἀλγεβραϊκὴν λεγομένην, τῇ κυριωνύμῳ διαφορᾷ συγχέειν ἀνθ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐκλαμβάνοντας.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 634. Ἐὰν ᾖ Α : Β = Γ : Δ, τὸ δὲ Α ἀντὶ μονάδος ληφθῇ, (ἣν ἂν διὰ μνήμης ἔχοιμεν οἱ δέον τι προχρησόμενοι, ἀνεπιτιμήτως, ἔνθα οὐδεμία ἡ ἐκ τῆς θέσεως ἐπισυμβαίνουσα παραλλαγὴ πρὸς τὸ δοκοῦν ὑποτεθεισομένην) τὸ Δ ἐν γένει τὸ Γινόμενον εἶναι λέγεται ὑπὸ τῶν ποσοτήτων Β καὶ Γ. Ἡ δὲ πρᾶξις καθ' ἣν οὕτω τὸ Δ παράγεται, ὁποίαποτ' ἂν ᾖ, ὁ τοῦ ποσοῦ Γ διὰ τοῦ ποσοῦ Β καλεῖται Πολλαπλασιασμός. (§. 44.)

§. 635. Ἐὰν δὲ τῶν αὐτῶν κειμένων τὸ Β ἀντὶ μονάδος ληφθῇ, ἔσται δὴ Δ τὸ Πηλίκον τοῦ ποσοῦ Γ τοῦ διαιρουμένου διὰ τοῦ Α. Ἡ δὲ πρᾶξις, ὁποία δ' ἂν ᾖ, δι' ἧς ἀνακαλύπτεται τὸ Δ, καλεῖται Διαίρεσις. (§. 45.)

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 636. Ἐὰν τὰ Α, Β, Γ ποσὰ ᾖ τῶν ὁμογενῶν· ᾖ δὲ Α : Β = Γ : Δ, ἔσται καὶ Α : Γ = Β : Δ. (§. 165.) Ὅθεν καὶ οὕτως ἂν τὸ Δ παραχθείη· μηδὲν διαφέρον τὸ Β διὰ τοῦ Γ πολλαπλασιάσαι, ἢ τὸ Γ διὰ τοῦ Β ἀνάπαλιν. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον ἀνακύψει τὸ Δ, εἴτε γένοιτο ὡς Α (ληφθὲν ἀντὶ μονάδος) πρὸς Β, οὕτω καὶ Γ πρὸς Δ· εἴτ' οὖν καὶ ὡς Α πρὸς Γ, οὕτω καὶ Β (ἀντὶ μονάδος ἤδη τοῦτο ληφθὲν) πρὸς Δ.

§. 637.

§. 637. Ἐὰν οὖν πρῶτον μὲν γένηται 1 : Β = Γ : Δ· τουτέστιν, ἐὰν τὸ Γ διὰ τοῦ Β πολλαπλασιασθὲν παραχθῇ Δ. Εἶτα δὴ καὶ Β : Ι = Δ : Π· τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δηλονότι προγεγονότος, διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ Β ἤδη διαιρουμένου, ἔσται πηλίκον τὸ Π, τὸ τῇ πολλαπλασιασθείσῃ πρότερον ποσότητι Γ ἴσον (§. 54.). Καὶ ἔστιν ἄρα ἐν γένει τὸ πολλαπλασιάζειν τε καὶ διαιρεῖν οὕτως ἀλλήλοις ἀντίξοα, ὡς τὸ ὑπὸ θατέρου συμβαῖνον, διὰ θατέρου εἰς ὃ πρὸ τοῦ ἦν ἐπανάγεσθαι.

§. 638. Τοιγαροῦν ἐὰν δέῃ ποιῆσαι,

$$\begin{array}{l} \alpha : \beta = \gamma : a \\ \delta : \varepsilon = a : b \\ \zeta : \eta = b : c \\ \vartheta : \kappa = c : d \end{array}$$

Ἔσται κατὰ τὰ ἐν τοῖς περὶ τῶν ἀναλογιῶν εἰρημένα (§. 177.), ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογίας $a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$. Καὶ τούτου δ' ἐπὶ τῆς δευτέρας ἀναλογίας ἀντὶ τοῦ ἰσοδυνάμου a ἀντεισενεχθέντος, εὔδηλον ὡς τὸ b οὕτως ἐκδηλωθήσεται $\frac{\varepsilon\beta\gamma}{\delta\alpha}$. Ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο ἐπὶ τῆς τρίτης ἀναλογίας ἀντὶ τοῦ ἰσοτίμου b ταχθῇ, τὸ c οὕτως ἐκκείσεται $\frac{\eta\varepsilon\beta\gamma}{\zeta\delta\alpha}$. Καὶ ὡσαύτως ἐπὶ τῆς τετάρτης τὸ d παριστάμενον ἔσται $\frac{\kappa\eta\varepsilon\beta\gamma}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$. Καὶ παραπλησίως ἐφ' ὅσον καὶ δόξειε πορρωτέρω χωρεῖν.

§. 639. Ὡς εἴγε τῶν παραληφθέντων ἔστιν αἱ γραμμάτων μονάδος τύχῃ σημαντικαὶ, πάρεσται δὴ τὸ d κατάτινα τῶν ἐφεξῆς τύπων λαβεῖν· $\frac{\kappa\eta\varepsilon\beta\gamma}{\zeta\delta\alpha}$. ἢ $\frac{\kappa\eta\varepsilon\beta\gamma}{\delta\alpha}$. ἢ $\frac{\kappa\eta\varepsilon\beta\gamma}{\alpha}$ ἢ τέως $\kappa\eta\varepsilon\beta\gamma$.

ἢ καὶ

ἢ καὶ οὕτως $\frac{\eta\epsilon\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\epsilon\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ τελευταῖον $\frac{1}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$. Ἀμέλειτοι τὰ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν γράμματα, τῶν ἐπὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἀριθμῷ ὑπερέχειν ὁπωσοῦν, ἢ ἐλλείπειν ἐνδέχεται.

§. 640. Ἐντεῦθεν οὖν καὶ ὅπως ἄντις εὕροι τὴν ἐν τῶν ἐκτεθέντων τρόπων δηλουμένην ποσότητα d, ἐκ τῶν α, β, γ, κξ. δοθέντων, ῥᾴδιον συνιδεῖν. Οὕτος γὰρ $d = \frac{\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\epsilon}$ Ποίει,

$$\vartheta : \beta = \gamma : a$$
$$\zeta : 1 = a : b$$
$$\delta : 1 = b : c$$
$$\epsilon : 1 = c : d$$

Τουτέστι ζήτει πρὸς μὲν ϑ, β, καὶ γ, τὸ τέταρτον ἀνάλογον a· πρὸς δὲ ζ, 1, καὶ a τὸ ἤδη εὑρεθὲν, τὸ τέταρτον ὡσαύτως ἀνάλογον b· καὶ οὕτω χώρει διὰ πάντων ἐς τέλος τῶν γραμμάτων, τὰ μὲν ἐπὶ τοῦ κλάσματος ὑπὸ τὴν γραμμὴν τελοῦντα ἀντὶ ἡγουμένων, τὰ δ' ὑπὲρ αὐτὴν ἀντὶ ἑπομένων κατὰ τοὺς λόγους τιθέμενος, καὶ μονάδι πανταχοῦ τὴν τοῦ γράμματος ἀπουσίαν ἀναπληρῶν.

§. 641. Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται, ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ φέρε $d = \frac{\kappa\eta\epsilon\beta\gamma}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$, δέον δὲ ἐκ τῶν δοθέντων α, β, γ, καὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τοιούτου γένους τὸ d εὑρεῖν, οὐδὲν ὅλως διοίσει ὅπως ἂν καὶ ἔχοι τάξεως ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δι' ἀλλήλων τὰ γράμματα, οἷς οἱ λόγοι παρίστανται· ὥστε καὶ εἰ ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω τεθείη,

$$\delta : \gamma = \eta : a$$
$$\zeta : \kappa = a : b$$
$$\vartheta : \beta = b : c$$
$$\alpha : \epsilon = c : d$$

Τὸ

Τὸ κἀνταῦθα ἔσχατον γινόμενον d, ταυτὸν ἔσται τῷ ἀνωτέρω d, τῷ ἐκ τῶν ὡς πρὶν ἐκτεταγμένων ὅρων προκύψαντι. Ἐὰν γὰρ θῶμεν, καθ' ἣν ὧδε καταγέγραπται τάξιν πρῶτον ἐκκεῖσθαι τὰ γράμματα· εἶτα, κατὰ χώραν μένοντος τοῦ η, τὰ ἡγούμενα δ, ζ, θ, α, καὶ δὴ καὶ τὰ ἑπόμενα γ, κ, β, ε ὁπωσοῦν ἐκταράσσεσθαι· δῆλον δὴ ἐκ τῶν περὶ ἀναλογίας εἰρημένων (§. 179.), ὡς ἡ ἔσχατον ἀνακύπτουσα ποσότης d, οὐδεμίαν ὅλως ὑποστήσεται τροπὴν, κἂν αἱ λοιπαὶ πᾶσαι τραποῖεν, αἱ διὰ τῶν a, b, c ὑποσημαινόμεναι. Ἐὰν δὲ καὶ ἡ τῷ η δηλουμένη ἐναλλὰξ τεθῇ πρὸς τὴν ἀντὶ τοῦ γ ἀντικαθεστῶσαν, οὐδὲ τὸ a μεῖζον οὐδ' ἔλαττον, ἢ πρότερον προελεύσεται (§. 165.). Καὶ οὐδ' ἡ τυχοῦσα ἄρα μεταβολὴ οὐδ' ἐπὶ τῶν b καὶ c, οὐδ' ἐπὶ τοῦ d, τὸ παράπαν ἐπιγενήσεται.

§. 642. Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ δῆλον, ὅτι καὶ εἰ ἔκ τινων τῶν δεδομένων λόγων, οἷον τῶν δ : γ καὶ ζ : κ συγκείμενος εἴη λόγος ὁ μ : ν· ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν, ἤτοι πάντων, ἢ τινῶν λόγος ἕτερος π : φ· τούτων ἀντὶ τῶν ἐξ ὧν σύγκεινται ἀντικαθισταμένων, ἡ τοῦ d εὕρεσις εὐπετεστέρα. Συντιθεμένου τοίνυν τοῦ π : φ ἐκ τῶν λόγων θ : β καὶ α : ε, ποίει

μ : ν = η : a

καὶ π : φ = a : b, καὶ ἔσται b = d,

ὃ διεξοδικωτέρῳ πόνῳ, διὰ τῶν ἁπλουστέρων λόγων ἐξ ὧν τοῖς μ : ν καὶ π : φ ἡ σύνθεσις, ἐξευρίσκεται. Καὶ φανερὸν ἐντεῦθεν ὡς πολύχους ἡ μέθοδος, καθ' ἣν ἡ d ποσότης, ἡ ἐν εἴδει κλάσματος ἐκκειμένη, οὐ ἐκ πλειόνων ὅ,τε ἀριθμητὴς γίνεται καὶ ὁ παρονομαστὴς, ἐκείνων δοθέντων, εὑρίσκεται.

§. 643. Εἴωθε δὲ ἡ κλασματοειδῶς ἐκφερομένη ποσότης, **Κλάσμα** καὶ αὐτὴ ἐνταῦθα καλεῖσθαι, τοῦ ὀνόματος αὖθις ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν καὶ τῶν ἄλλων Μαθημάτων παρεισενεχθέντος, ἐν οἷς περὶ

S κλασ-

κλασμάτων κυρίως εἰπεῖν λόγος οὐδείς. Ἀλλ' ἔστι δὴ τοῦτο τῆς φωνῆς τὸ χρειῶδες, ὅτι δι' αὐτῆς, τίνα τὰ ἐπὶ τῶν οὕτως ἐκκειμένων διαμειπλέα κατὰ τοὺς περὶ τὰ κλάσματα ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς ὅρους τε καὶ κανόνας, ὑπαναμιμνησκομένους, οὐδὲν δέον ἐπὶ τὴν διδασκαλίαν ἀείποτε ἀνατρέχειν τῶν ἀναλογιῶν. Οἷον ἐὰν τὸ $\frac{\alpha\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\epsilon}$ προθέσθαι δέῃ ἐπιτομώτερον, ῥᾷστα ἂν ἡμῖν τουτὶ ἐκτελεσθείη κλάσματος δίκην τὴν οὕτως ἐκκειμένην ἐπιθεωροῦσι ποσότητα, ὅπερ οἱ ὅροι διὰ τῶν αὐτῶν αβ διαιρέσιμοι εἰσί. Ταύτῃ γὰρ τὸ $\frac{\alpha\gamma}{\epsilon}$ προχείρως πρόεισιν. Ἄλλως γάρ, εἴπερ ἐπὶ τῆς τῶν λόγων ἀνατρέχειν ἔδει συνθέσεως, ζητέον ἂν εἴη ὅτι τοὺς ὅρους α καὶ β, παριέναι θέμις, ἅτε δὴ ἐπὶ τῶν ἡγουμένων τοὺς αὐτοὺς καὶ τῶν ἑπομένων ἀπαντῶντας τῶν ἁπλουστέρων λόγων, ἐξ ὧν τῷ συνθέτῳ ἡ σύνθεσις (§. 181.).

§. 644. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον παρὰ ταῦτα, καὶ ὅσα ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἄλλως τρέπεσθαι φιλεῖ, ἤτε κατ' ἐκεῖνα πρόσθεσις, καὶ ἡ ἀφαίρεσις, καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, καὶ ἡ διαίρεσις, καὶ τὰ ἄλλα, ἐκ τῆς τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλίας εὐχερῶς ληφθήσεται· τά, τε ἐκείνοις ἀνήκοντα, διὰ φωνῶν ἐκδηλωθήσεται τῶν παντὶ ποσότητος γένει προσηκουσῶν, ὡς μὴ τοῖς ἀριθμοῖς μόνοις, τὰ ἐν χρήσει γινόμενα ἐνταῦθα προσδιορίζεσθαι.

§. 645. Ἐν γένει γοῦν ὁ οὕτως ἐκκείμενος λόγος $\frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\theta}{\mu\nu}$ τὸν ἐν συνθέσει λόγον ὑποσημαίνει τὸν ἐκ μὲν τῶν α : ζ, β : η, γ : θ ἐπ' εὐθείας· ἐκ δὲ τῶν π : μ, φ : ν ἀνάπαλιν ληφθέντων, ὧδε, μ : π, ν : φ. Ἐὰν γὰρ γένηται ἔνθεν μέν,

π : α

$$\begin{aligned} \pi &: \alpha = \beta : a \\ \varphi &: \gamma = a : b, \end{aligned}$$

Ἔνθεν δὲ,

$$\begin{aligned} \mu &: \zeta = \eta : c \\ \nu &: \vartheta = c : d, \end{aligned}$$

Ἐςὶ δήπε $\frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\varphi} : \frac{\zeta\eta\vartheta}{\mu\nu} = b : d$· τὸ μὲν γὰρ b τῷ προτέρῳ, τὸ δὲ d τῷ δευτέρῳ τῶν κλασμάτων ἴσον ἐςί. Ἄλλως δέπως τῶν ἀναλογιῶν διαταχθεισῶν, εὑρεθείη ἂν ὁ b : d λόγος διὰ συνθέσεως, κατὰ τόδε τὸ σχῆμα.

$$\begin{aligned} \gamma &: \varphi = b : a \\ \alpha &: \pi = a : \beta \\ \beta &: \eta = \beta : \eta \\ \mu &: \zeta = \eta : c \\ \nu &: \vartheta = c : d \end{aligned}$$

Ἔνθα καὶ τὰ ἡγέμενα τῶν συντεθεισομένων λόγων, καὶ τὰ ἑπόμενα, ὅπως ἂν δόξειεν ἀμείβειν ἐςί. Τέτε γὰρ γενομένε, αὐτίκα δῆλον (§. 179.) τὲς λόγες ἐξ ὧν ὁ b : d, πρὸς τὲς ἐν ἀρχῇ τεθέντας $\alpha : \zeta$, $\beta : \vartheta$, $\gamma : \eta$, $\mu : \pi$, $\nu : \varphi$, ἔχειν ἀνάγεσθαι.

§. 646. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι διὰ τῆ $\alpha\beta\gamma\mu\nu : \zeta\eta\vartheta\pi\varphi$, ὁ λόγος ὑποδηλῆται ὁ ἐκ τῶν διακριδὸν προτεθέντων συγκείμενος· διὸ καὶ ἰσοδυναμεῖ τῷ κλασματοειδῶς ἀνωτέρω ἐκφερομένῳ, $\alpha\beta\gamma\mu\nu : \zeta\eta\vartheta\pi\varphi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\varphi} : \frac{\zeta\eta\vartheta}{\mu\nu}$. Αἵτε δηλώσεις, κατὰ τὲς ἐν τοῖς περὶ τῶν κλασμάτων κανόνας εἰς ἀλλήλας μεθίςανται. Ἐὰν γὰρ ἑκατέρῳ τῶν ὅρων τῆ προτέρε λόγε, ὑποτεθῇ κοινὸς παρονομαςὴς ὁ $\mu\nu\pi\varphi$, ἀναχθῇ δὲ τὰ ἕτως ἀναφυόμενα κλάσματα, ἐπὶ ὅρες τῶν οἷς ἂν ἐκδηλωθείη, τὲς ἐλαχίςες, ἔςαι δὴ, $\alpha\beta\gamma\mu\nu : \zeta\eta\vartheta\pi\varphi = \frac{\alpha\beta\gamma\mu\nu}{\mu\nu\pi\varphi} :$

$\frac{\zeta\eta\vartheta\pi\phi}{\mu\nu\pi\phi} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta}{\mu\nu}$. Ἐκ δὲ τουτωνὶ τῶν κλασμάτων οἱ τοῦ προτέρου λόγου ἀναφύονται ὅροι, ἑκατέρου διὰ $\pi\phi\mu\nu$ πολλαπλασιαζομένου. Γίνεται γὰρ οὕτω $\frac{\alpha\beta\gamma\pi\phi\mu\nu}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta\pi\phi\mu\nu}{\mu\nu} = \alpha\beta\gamma\mu\nu : \zeta\eta\vartheta\pi\phi$· τὸ δ' αὐτὸ καὶ διὰ τῆς τῶν κλασμάτων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀναγωγῆς διαπερανθήσεται.

§. 647. Κἀντεῦθεν ὁμοίως ἕπεται, τῶν α^2, β^2, α^3, β^3, καὶ τῶν ἄλλων ὅσα τοιουτότροπα, εἴτε ἀριθμοὺς, εἴτε καὶ ποσὰ ὁποιαδηποτοῦν ἄλλα ὑποσημαινόντων, διὰ μὲν τοῦ $\alpha^2 : \beta^2$ λόγον δηλοῦσθαι τοῦ $\alpha : \beta$ τὸν διπλασίονα· διὰ δὲ τοῦ $\alpha^3 : \beta^3$ τὸν τοῦ αὐτοῦ τριπλασίονα· διὰ δὲ τοῦ $\alpha^4 : \beta^4$ τὸν τετραπλασίονα· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἔχειν τε τὸν $\alpha^2 : \beta^2$ διὰ δυοῖν ὁποιωνοῦν παρίστασθαι ποσῶν, ὧν θάτερον πρὸς θάτερον ἐν διπλασίονι λόγῳ εἴη τοῦ $\alpha : \beta$. Τουτέστι διὰ γραμμῶν, δι' ἐπιφανειῶν, διὰ στερεῶν παντοίων τὰ σχήματα· ἁπλῶς δι' ὧν ἂν ἐθέλοιτις ποσοτήτων. Τὸν δέτοι λόγον $\alpha^3 : \beta^3$ δι' ὁποιωνδήποτε παραπλησίως ποσῶν, ὧν ὁ λόγος τριπλασίων τοῦ $\alpha : \beta$· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 648. Οὕτωτοι καὶ ὁ $\alpha^3\beta^2 : \gamma^2$, τὸν ἐκ τῶν λόγων σύνθετον σημαίνει, τοῦ μὲν τριπλασίονος ὄντος τοῦ $\alpha : 1$, τοῦ δὲ διπλασίονος τοῦ $\beta : \gamma$. Δεῖ γὰρ τὴν μονάδα κἀνταῦθα τὸ ἐλλεῖπον τοῦ κατὰ τὸν λόγον ὅρου ἀναπληροῦν. Ἔστι δὲ $1 = 1^2 = 1^3 = 1^4$· ὅτι τῆς μονάδος καθ' ἑαυτὴν ἀγομένης, οὐδέν τι πλέον ἡ μονὰς τὸ γινόμενον. Ἀλλὰ γὰρ ὁ αὐτὸς λόγος $\alpha^3\beta^2 : \gamma^2$, καὶ ἐξ ἄλλων ἂν συντεθείη πολυτρόπως· οἷον ἐκ τῶν $\alpha^2 : \gamma^2$ καὶ $\alpha\beta^2 : 1$· ἢ κἀκ τούτων $\alpha\beta : \gamma$ καὶ $\alpha^2\beta : \gamma$.

§. 649. Ἔνθατοι ὁ στίχος,

$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^9$, κξ.

γεωμετρικῆς ἐστὶ προόδου σημαντικὸς, ἧς ὁ μὲν πρῶ-

τος

τος τῶν ὅρων ποσότης ἐστὶν ἡ ῥηθεῖσα 1· ὁ δὲ δεύτερος ποσότης ὁμογενὴς ἣν σημαίνει τὸ α. Καίγαρ $1 : \alpha = \alpha : \alpha^2 = \alpha^2 : \alpha^3 = \alpha^3 : \alpha^4$. Τῶν δὲ ἑφεπομένων ποσοτήτων ἑκάστη ἀναφύεται, τῆς ἡγουμένης διὰ τοῦ α πολλαπλασιαθείσης. Ἐὰν οὖν ἀφ' ἧστινοσοῦν τῶν ὅρων ἐπανιοῦσιν ἔστε τὴν μονάδα, καὶ ἔτι περαιτέρω τὰ τῆς προόδου χωρήσῃ, τοῦ αὐτοῦ σωζομένου τρόπου ὁ στίχος οὕτω διασημανθήσεται.

$$\alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha^1,\ \alpha^0,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4},\ \alpha^{-5},\ \text{κ.ξ.}$$

Δηλώσει δὲ τὸ α^0 τὸν ὅρον τὸν ἀντὶ μονάδος ἐπὶ τῆς προόδου ληφθέντα. Ὑπὲρ οὖν τοῦ α ὄντος, τοσῷδε μᾶλλον οἱ μὲν α^2, α^3, καὶ οἱ λοιποὶ μονάδος ἔσονται μείζονες· οἱ δὲ α^{-1}, α^{-2}, α^{-3} μονάδος ἐλάσσονες. Τοὐναντίον δὲ τοῦ α πρὸς τὴν μονάδα ἐλαττουμένου, οἱ μὲν α^2, α^3, κ.ξ. ἐλάσσονες ἔσονται τῆς μονάδος οἱ δὲ α^{-1}, α^{-2}, α^{-3}, κ.ξ. μείζονες.

§. 650. Τὰ δ' ἄλλα, τὸ ἐν §. 634. 635. εἰρημένον, ὅτι ποσότης πᾶσα ἀντὶ μονάδος ληφθῆναι δύναται, οὐδὲν αἰνίζεται ὅ,τι καὶ δυσχερὲς ἢ δυσξύμβλητον. Περὶ γὰρ τὰς τῶν πραγμάτων ἀναστρεφομένοις παραθέσεις, τὸ μὲν ἕκαστον ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἁπάντων εὖ τε καὶ καλῶς διακρίνειν, τῷ παντὶ χρήσιμόν ἐστι, μᾶλλον δὲ ἀναγκαῖον. Τὸ δὲ ἐν τίνι δήποτε σημείῳ, τὰ τῆς διαστολῆς ληφθείη, καὶ ὑπὸ ποίῳ διασημανθείη ὀνόματι, οὐδὲν τὸ παράπαν διαφέρον ἐστί. Διὸ οὐδὲ τὸ τῆς μονάδος ὄνομα, ἢ σημεῖον τῆς τοιᾶσδε χρήσεως ἀποκλειστέον. Πλὴν τούτου δὴ γινομένου, τὸ ἐπὶ προκειμένου τινὸς ζητήματος, ἑνὸς δίκην ὑποτεθὲν, ἐνταῦθα μὲν ὡρίσαι, ἐν ἄλλοις δὲ πρὸς τὸ δοκοῦν παρέσαι, πηλίκην ἂν καὶ βουλητὸν εἴη τὴν μονάδα παραλαβεῖν· οἷον εἰ ἀγροῦ μῆκος, πρὸς τὸ αὐτοῦ τούτου εὖρος δέοι παραβαλεῖν, οὐδὲν διοίσει πηλίκῳ ποτ' ἄντις τῷ μέτρῳ προχειρίσαιτο, εἰ μόνον τὸ ἐν χρήσει ἅπαξ παραληφθὲν ἐφεξῆς τηροῖτο ἀπαραλλάκτως. Τὴν μὲν οὖν ἐν ζητήματι, τι, ἢ θεωρήματι ἀπαντῶσαν ποσότητα, ἧς ὡς ἂν τύχοι ληφθείσης τὰ λοιπὰ ἥκιστα μεταβάλλει εὔχρηστόν ἐστιν οἱονεὶ μονάδα οὖσαν διασημαίνειν· Φύσει γὰρ τὸ τῆς μονάδος ἀπὸ βουλῆς ἤρτηται.

§. 651. Ἐθέλει δὲ ἡ μονὰς θετικῶς ἐνταῦθα ἀεὶ ἐκλαμβάνεσθαι· ἐν ᾧ καὶ τὸ πολλαπλασιάζειν τε καὶ διαιρεῖν Ἀλγεβρικῶς, τοῦ Ἀριθμητικῶς ταυτὰ ποιεῖν διενήνοχεν. Ὅ,τι γὰρ ἂν ἤποτε τὸ Α, ἐὰν ἀριθμητικῶς δεήσῃ πολλαπλασιάσαι αὐτὸ δι᾽ ἀριθμοῦ τινος, φέρε τοῦ 3, οὐδὲν ὅτι μὴ τὸν τρόπον ἀποσκοπεῖν χρὴ ὃν ὁ ἀριθμὸς 3 ἐκ τῆς ἐν αὐτῷ μονάδος συνίσταται· τουτέστι τὸν τοῦ ἀριθμοῦ λόγον πρὸς τὴν μονάδα τὴν αὐτοῦ. Ὁποία δέ τις ἡ μονὰς αὕτη, οὐδὲν χρὴ ζητεῖν. Ἀλλὰ μὴν + 3 ἐκ + 1 ὡσαύτως γίνεται, ὡς δήπου καὶ − 3 ἐκ − 1· τῆς προσληφθείσης δηλονότι μονάδος τῷ τριπλασιασμῷ· ὅ,τε λόγος + 3 πρὸς + 1, τῷ λόγῳ − 3 πρὸς − 1 ἐπιδήλως ἴσος ἐστί. Τοιγαροῦν ἥκιστα μὲν τῷ σημείῳ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ προσεκτέον, μάλιστα δὲ τῷ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀριθμητικῶς πολλαπλασιάζοντας. Διὸ καὶ τὸ γινόμενον 3 Α, ἀεὶ τοιαύτης, οἵας καὶ ἡ πολλαπλασιαζομένη ποσότης Α, ἔχον ἐστὶ καταστάσεως, θετικῆς μὲν + 3 Α, θετικῶς ἐκείνης + Α ἐχούσης, ἀποφατικῆς δὲ − 3 Α, ἀποφατικῶς − Α. Καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως δὲ ὁ αὐτὸς λόγος κρατεῖ. Καὶ γὰρ καὶ τὸ ἀριθμητικοῦ πηλίκον, οὐδὲν οὔτε τῷ τῆς ποσότητος εἴδει, οὔτε τῇ κατὰ τὰ σημεῖα + καὶ − ποιότητι τοῦ διαιρετέου διενήνοχε τὸ παράπαν. Ἀλλ᾽ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως καθόλου συνισταμένων, ἄλλως ἔχει τὸ πρᾶγμα. Εἴτε γὰρ καταφατικὸς εἴη ὁ πολλαπλασιαστής, ἢ ὁ διαιρέτης, εἴτε ἀποφατικὸς ἐπὶ τούτων, ἡ, πρὸς ἣν ἀνάγεται, μονὰς θετικῶς ἀείποτε ἐκλαμβάνεται. Καὶ ἐπεὶ τοίνυν − 3 ἐκ + 1 οὐκ ἂν γένοιτο τῷ τῆς οὕτως ἐχούσης μονάδος τριπλασιασμῷ, δεῖ δὲ τὴν ὑπεναντίως ἔχουσαν − 1 τριπλασιάσαι, ὡς ἂν τὸ ἐκ

τοῦ

τοῦ Α γινόμενον προέλθοι τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ τὸ -3 ἐκ τοῦ $+1$ παράγεται· τούτου δὴ χάριν οὐδὲ τὸ Α ποσὸν τριπλασιαστέον ἐστὶ, τὸ δ' ἐκείνῳ ἀντίθετον $-$ Α, εἰ τὸ $+$ Α πολλαπλασιάσαι δεήσει· καὶ τοὐναντίον τὸ $+$ Α, εἰ τὸ $-$ Α. Οὕτω γὰρ δὴ καὶ $+1$ οὐχὶ τοῦ -3 τριτημόριον ἐστὶ, τοῦ δ' ἀντιθέτου $+3$. Ἵνα τοίνυν καὶ ἐκ τοῦ Α τὸ πηλίκον προκύψῃ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ $+1$ πρόεισιν ἐκ -3, οὐκοῦν τὸ τοῦ διαιρετέου τριτημόριον ληπτέον, τὸ δὲ τῆς ἀντιθέτου ποσότητος, ὅπερ ἔσται $-\frac{1}{3}$ Α, ἐὰν τὸ Α ᾖ θετικόν· καὶ $+\frac{1}{3}$ Α, ἐὰν τὸ Α ᾖ ἀποφατικόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 652. Δυοῖν ποσῶν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιαζομένων, ἢ διαιρουμένων, ὑπὸ μὲν σημείοις τοῖς αὐτοῖς, τοῦ παραγομένου, ἢ τοῦ πηλίκου σημεῖον ἔσται τὸ $+$· ὑπὸ δὲ τοῖς ὑπεναντίως ἔχουσι, τὸ $-$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τῶν ἃ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάσαι δέον, ἢ διελεῖν, α καὶ β, κατ' ἀναλογίαν ἐκλαμβανομένων, μὴ μόνον τις προσέχῃ τῇ ποσότητι ἁπλῶς, ἀλλὰ καὶ τῇ καταστάσει καθ' ἣν αὐτὰ διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ διώρισται, φανερὸν ὅτι,

$$+1 : +\alpha = +\beta : +\alpha\beta$$
$$+1 : +\alpha = -\beta : -\alpha\beta$$
$$+1 : -\alpha = +\beta : -\alpha\beta$$
$$+1 : -\alpha = -\beta : +\alpha\beta$$

Καὶ δὴ καὶ $+\alpha : +1 = +\beta : +\frac{\beta}{\alpha}$

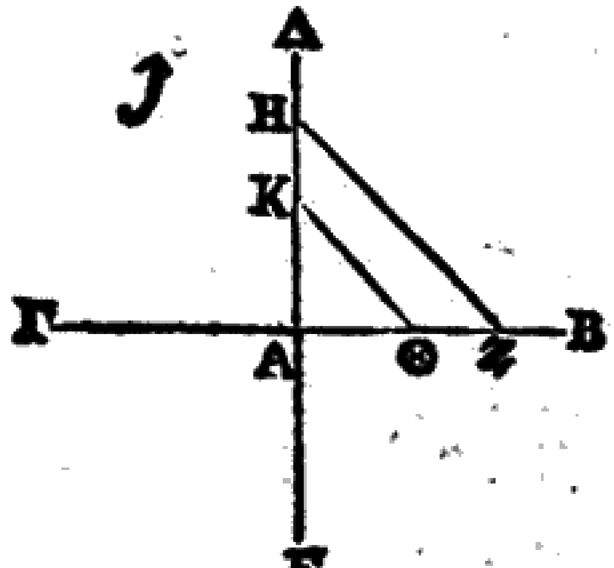
$$+\alpha : +1 = -\beta : -\frac{\beta}{\alpha}$$
$$-\alpha : +1 = +\beta : -\frac{\beta}{\alpha}$$
$$-\alpha : +1 = -\beta : +\frac{\beta}{\alpha}$$

Ἐν ταύταις οὖν ταῖς ἀναλογίαις, ἅπασαι αἱ τῶν σημείων ἔνεισι συζυγίαι, ὅσας ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ τῆς διαιρέσεως οἷόν τε λαβεῖν, ὅτι ἡ μονὰς καταφατικῶς ἀεὶ ἐκλαμβάνεται. Ὥστε δῆλον τὸ προτεθέν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

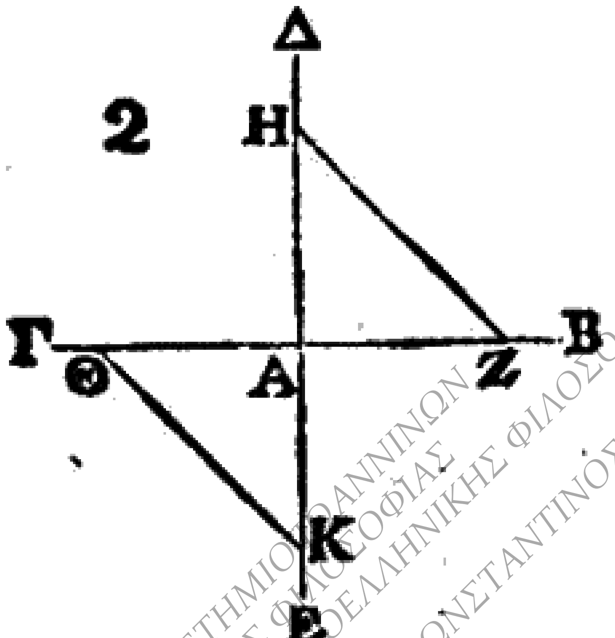
§. 653. Αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον, καθ᾽ ἣν Γεωμετρικῶς τριῶν εὐθειῶν διδομένων τὴν τετάρτην ἀνάλογον προσευρίσκειν μανθάνομεν· τελοῖτο δ᾽ ἂν τὰ τῆς κατασκευῆς ἐν γένει ὧδε.

Διὰ τοῦ Α σημείου ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι δύο ἐπέκεινα πέρατος πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι. Κείσθωσαν δὲ αἱ μὲν ἀπὸ Α πρὸς Β τείνουσαι εὐθεῖαι θετικαὶ εἶναι, αἱ δ᾽ ἀπεναντίον ἀπὸ Α πρὸς Γ ἀποφατικαί. Καὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἑτέρας δὲ τῶν εὐθειῶν, αἱ μὲν ἀπὸ Α πρὸς Δ θετικαὶ, αἱ δὲ ἀπὸ Α πρὸς Ε ἀποφατικαί.

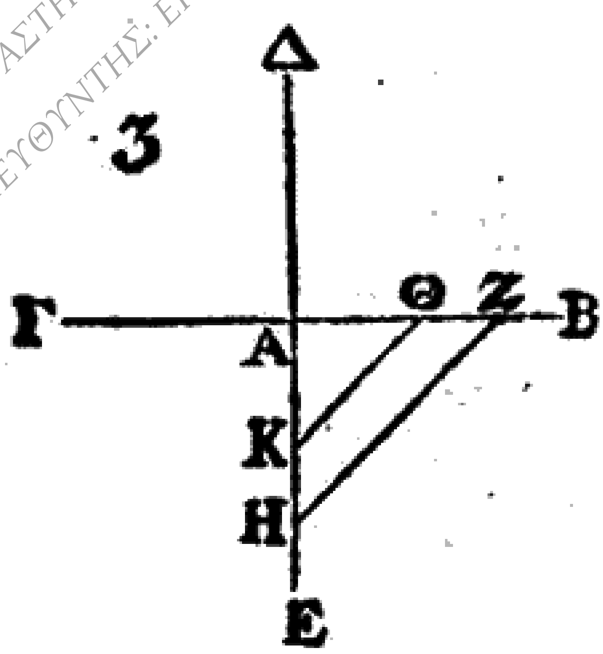


Ἐὰν οὖν ἐπὶ ταῖς τρισὶ δοθείσαις $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$ τετάρτην ἀποδοῦναι δέῃ ἀνάλογον, ποίει ΑΖ $= \alpha$, καὶ ΑΗ $= \beta$, ἐπιζεύξας τὴν ΖΗ. Εἶτα ποίει ΑΘ $= \gamma$, καὶ ἀπό γε τοῦ Θ τὴν ΘΚ ἀγαγὼν παράλληλον τῇ ΖΗ, ἕξεις δὴ τὴν ζητουμένην ΑΚ, ἣν ἐπάναγκες καταφατικὴν εἶναι, ἐφ᾽ ὁποῖον ἄντποτε σημεῖον τὸ Θ πέσοι, τῶν ἐπὶ τῆς ΑΒ, τῆς περάτων ἐπέκεινα.

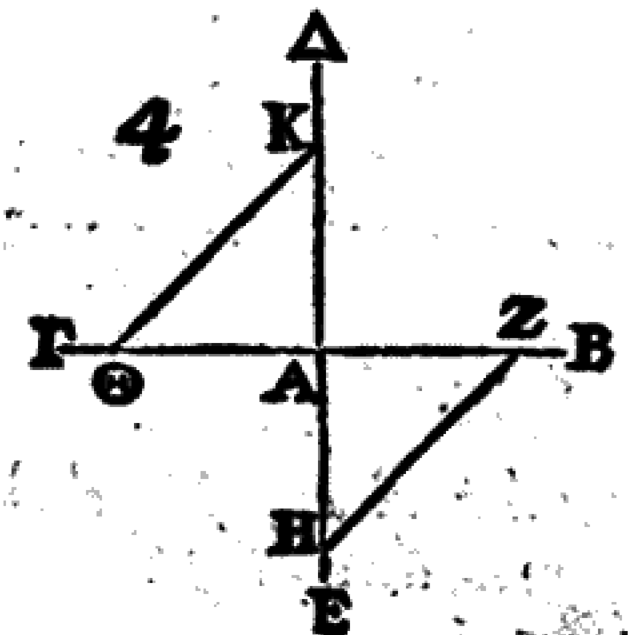
Ἐὰν



Ἐὰν δὲ δεύτερον ἐπὶ ταῖς $+\alpha$, $+\beta$, $-\gamma$, τετάρτη ἡ ζητουμένη ἀνάλογον, τίθει καὶ ὧδε, $AZ=\alpha$ καὶ $AH=\beta$, τὴν ΖΗ ὡς πρότερον ἐπιζεύξας. Τὴν δὲ $A\Theta=\gamma$, ἅτε δὴ ἀποφατικὴν οὖσαν ἐπὶ τοὐναντίον ΑΓ μετάγαγε· τὴν γὰρ ΘΚ πρὸς ΗΖ παράλληλον ἐνταῦθα ἄγων, ἕξεις ΑΚ τὴν ζητουμένην ἐπιδήλως ἀποφατικήν.



Ἐὰν τρίτον ἐπὶ ταῖς $+\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$, τὴν τετάρτην ἀνάλογον δεήσῃ προσευρεῖν, ποίει καὶ ὧδε $AZ=\alpha$, καὶ τὴν μὲν $AH=\beta$ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Ε θοῦ, ὅτι β ἀποφατικῶς ὑπόκειται· τὴν δὲ $A\Theta=\gamma$ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὅτι γ καταφατική. Ἐπιζευχθείσης δὲ αὖθις τῆς ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Θ πρὸς αὐτὴν ἀχθείσης παραλλήλου τῆς ΘΚ, ἔσται ΑΚ ἡ ζητουμένη, παραπλησίως καὶ ἤδη ἀποφατική.



Ἐὰν δὲ τέταρτον ἐπὶ ταῖς $+\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ τετάρτην ἀνάλογον εὑρέσθαι δέῃ· λαβὼν μὲν τὴν $AZ=\alpha$ πρὸς τὸ κατὰ Β μέρος, ἅτε καταφατικήν, τάξας δὲ τὴν $AH=\beta$ πρὸς τὸ κατὰ τὸ Ε, καὶ τὴν $A\Theta=\gamma$ πρὸς τὸ κατὰ τὸ Γ, ὡς ταύτας ἀμφω ἀποφατικάς· ἐπισυνάψατε ὡς ἀνωτέρω τὴν ΖΗ, καὶ τὴν πρὸς ταύτην παράλληλον ἀπὸ τοῦ Θ ἀγαγὼν, λήψῃ δὴ κἀνταῦθα τὴν ζητουμένην ΑΚ αὖθις καταφατικήν.

Ἐὰν τοίνυν ἡ ΑΚ ἁπανταχοῦ ῥηθῇ δ, ἐπὶ τῶν τεττάρων τουτωνὶ τρόπων,

$$+\alpha : +\beta = +\gamma : +\delta$$
$$+\alpha : +\beta = -\gamma : -\delta$$
$$+\alpha : -\beta = +\gamma : -\delta$$
$$+\alpha : -\beta = -\gamma : +\delta$$

εὔδηλον ὡς τὸ ἐπὶ δ τοῦ τετάρτου τῶν ὅρων σημεῖον κεῖται ὀρθῶς. Λοιποὶ δὲ τρόποι οἱ ἑξῆς τέτταρες·

$$-\alpha : -\beta = -\gamma : -\delta$$
$$-\alpha : -\beta = +\gamma : +\delta$$
$$-\alpha : +\beta = -\gamma : +\delta$$
$$-\alpha : +\beta = +\gamma : -\delta$$

Ἐν οἷς τὰ τῶν προτέρων σημεῖα ἀντιστρόφως τέτακται. Ἀλλ' ἐν τούτοις τόγε τοῦ τετάρτου τῶν ὅρων σημεῖον ὀρθῶς ὑποκεῖσθαι διὰ τῶν αὐτῶν σχημάτων δειχθήσεται, ἐὰν οὕτω καὶ τὰ σχήματα ἀντίστροφα τεθῇ, ὡς τὸ μὲν ΑΒ τῆς ἔξω πέρατος εὐθείας εἰς χώραν τὴν τῶν ἀποφατικῶν ἀφορισθῆναι, τὸ δὲ ΑΓ εἰς τὴν τῶν θετικῶν. Καὶ τὸ μὲν ΑΔ ὁμοίως ταῖς ἀποφατικαῖς ἀποκληρωθῇ ποσότησι, τὸ δ' ΑΕ ταῖς θετικαῖς. Τούτου γὰρ γενομένου τὰ διαγραφέντα ἀνωτέρω σχήματα, ταῖσδε ταῖς ὑστέραις τέτταρσιν ἀναλογίαις εὐτάκτως ἀντιστοιχήσει. Ἀλλὰ γὰρ ὑπὲρ τὰς ὀκταρίθμους τάσδε συζυγίας, τὰ σημεῖα διαταχθῆναι ἀμήχανον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 654. Ὁ,τίποτ' ἂν σημαίνῃ τὸ α, ἐὰν ἀπὸ τῆς μονάδος α°, ἑκατέρωθεν ἐς ἄπειρον στείχουσα προβαίνῃ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

α',

$\alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^{0}, \alpha^{1}, \alpha^{2}, \alpha^{3}, \alpha^{4}, \alpha^{5}$,

ὁ ὅρος α **Ῥίζα** καλεῖται πάντων τῶν λοιπῶν· οἱ δὲ, **Δυνάμεις** αὐτῆς ἀκούουσιν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν ὅρον ἐπισήμου ἑκάστη παρονομαζόμεναι. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ ἀριθμοῦ καὶ τῇ ῥίζῃ τὸ ὄνομα, ἢ πρὸς τήνδε, ἢ τήνδε τὴν δύναμιν ἀναφέρεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 655. Ἐνθεντοι καὶ α^2 δύναμις ἤκουσε **Δευτέρα** τῆς ῥίζης α· ἡ δὲ α ἀνάπαλιν ῥίζα **Δευτέρα** τῆς δυνάμεως α^2. Καὶ α^3 δὲ δύναμις **Τρίτη** τῆς ῥίζης α· ἡ δὲ α ῥίζα **Τρίτη** τῆς δυνάμεως α^3· καὶ οὕτω κἀπὶ τῶν λοιπῶν. Καθ' ἃ δὴ καὶ α^1 **Πρώτην** δύναμιν τῆς αὐτῆς ῥίζης α θέμις ἀποκαλεῖν ἀφ' ἧς οὐθέντι τὸ παράπαν διενήνοχε· τὸ δὲ α^0, ἤτοι 1 ἀδύναμον. Ἀλλὰ α^{-1} λέγοιτ' ἂν τῆς α ῥίζης δύναμις **Ὑποπρώτη**, καὶ α^{-2} **Ὑποδευτέρα**, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Εἰ καὶ οὕτως ἁπλῶς ἐκράτησε ταύτας ἀποκαλεῖν τοὺς κατὰ τὰ ἐπίσημα μόνον ἀριθμοὺς ὀνομάζοντας· οἷον τὴν α^{-5} φέρε, δύναμιν εἶναι λέγοντας τῆς ῥίζης α, ἧς τοὐπίσημον, ἤτοι ὁ ἐκθέτης -5. κτλ.

§. 656. Κατὰ ταῦτα δὲ καὶ α^2 τὸ **Τετράγωνον** ἦν τῆς δυνάμεως α· καὶ α^3 τῆς αὐτῆς ὁ **Κύβος**· καὶ α^4 τὸ **Διτετράγωνον**, καὶ οὕτως ἑξῆς· ὅτι δηλαδὴ ὁ λόγος $\alpha^2 : 1$ διπλασίων τοῦ $\alpha : 1$, ἡλίκος δὴ καὶ ὁ τῶν τετραγώνων, ὧν α καὶ 1 σημαίνουσι τὰς πλευράς. Καὶ ὁ λόγος $\alpha^3 : 1$ τριπλασίων τοῦ $\alpha : 1$, ἡλίκος δὴ ὁ τῶν κύβων, ὧν αἱ πλευραὶ α καὶ 1. Παραπλησίως οὖν καὶ τῶν ῥιζῶν ἡ μὲν δευτέρα εἴρηται καὶ **Τετραγωνική**· ἡ δὲ τρίτη **Κυβική**· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλὰ γὰρ εἰς σημασίαν τῶν ὑπερτέρων δυναμεώντε καὶ ῥιζῶν, ἡ

τῶν