ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΤΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.

ΤΜΗΜΑ Α΄.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΚΑΘΟΛΟΥ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 597.

Ἐὰν ἡ ποσότης ἔκλασιν ἔχουσα, ἢ ἄλλη ἥτισοῦν ἡ Π, πρὸς ἄλλην ποσότητα ἤτοι δοθεῖσαν, ἢ πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθεῖσαν τὴν Μ, ὡς ἀριθμὸς Α πρὸς μονάδα τὴν αὐτοῦ, εἰρήσεται δὴ ἡ ποσότης Π διὰ τοῦ ἀριθμοῦ Α, παρίσασθαι, ἢ ἐκφέρεσθαι. Τὴν δὲ Μ ποσότητα, δι᾽ ἧς ἡ Π οὕτω δηλοῦται, ἰδιαιτέρᾳ σημασίᾳ Μέτρον καλοῦμεν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 598. Εἴωθε γὰρ τὸ τοῦ μέτρου ὄνομα, καὶ κατ᾽ ἄλλην ἐνδοχὴν λαμβάνεσθαι, ὡς ὅτε μέτρον τῆς Π ποσότητος λέγεται, οἱαδήποτε ποσότης Ν, ἢ πρὸς δοθεῖσαν τινὰ ἐστὶν, ὡς ἐστὶν ἡ Π αὐτὴ πρὸς τὴν Μ φέρε, καὶ ταύτην δοθεῖσαν. Τοιῷδε λόγῳ τὸ μέρος τῆς περὶ τὴν τῆς γωνίας κορυφὴν καταγραφομένης κυκλικῆς περιφερείας, τὸ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῶν ἐκείνης ἀπολαμβανόμενον, λέγεται τῆς γωνίας εἶναι τὸ μέτρον· τὸ γὰρ τηλικοῦτον τόξον ἐςὶ πρὸς τὸ τεταρτημόριον, ὡς ἡ γωνία, ἧς ταῖς πλευραῖς ἐναπείληπται, πρὸς γωνίαν ἔχει τὴν ὀρθὴν (§. 455. 456.). Ἐπειδὰν οὖν τούτῳ χρώμεθα, ἔςι δὴ τὸ τεταρτημόριον τῶν τοιῶνδε μέτρων οἷατις ῥυθμὸς, ἢ ὅρος· παρὰ Λατίνοις Modulus.

§. 599. Ὁ δ' ἐνταῦθα μέτρον καλεῖται, κατὰ τὸ γένος τῆς ἐκμετρηθησομένης ποσότητος ποικίλλεται. Τὸ γὰρ μέτρον ὁμογενὲς ἀεὶ τῇ ποσότητι ἐξ ἀνάγκης ἐςίν· ἡλίκον ἀμέλειτοι αὐτῇ, ἢ μέρει αὐτῆς, ὅλον, ἢ μέρος, ἔχειν καὶ ἐξισοῦσθαι. Καὶ γραμμὴ τοιγαροῦν διὰ γραμμῆς μετρηθήσεται, καὶ γωνία διὰ γωνίας, καὶ ἐπιφάνεια δι' ἐπιφανείας, καὶ ςερεὸν διὰ ςερεοῦ, καὶ βάρος διὰ βάρους, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως.

§. 600. Ὁ δὲ ἀριθμὸς Α ὁ τὴν Π ποσότητα παριςὰς, ἤτοι διαμετρήσει εὑρίσκεται, ἢ ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν ἐπιφέρεται. Ὁ δὲ λόγος τοῦ διαμετρεῖν, ὁ κατὰ παραβολὴν γοῦν τοῦ μέτρου πρὸς τὸ μετρητὸν γινόμενος, οὐδεμίαν φέρει δυσχέρειαν, καὶ κατ' ἀρχὰς ἡμῖν τῶν ἀριθμητικῶν (§. 3.) τεθεώρηται. Χώραν δ' ἔχει πρὸ πάντων ἐντε γραμμαῖς εὐθείαις, καὶ τῶν καμπύλων ὅσαις εὐθείας ἴσας ἀποδιδόναι ἐνδέχεται.

§. 601. Ἐπεὶ δὲ δεῖ καὶ τὸ μέτρον τὰ πολλὰ διαιρεῖν, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μορίων, εἰς ἅπερ ἂν αὐτὸ διαιρεθείη, τὸ προσφυὲς ἤρτηται τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, οἷς ἡ Π ποσότης, ἢ τὸ ταύτης μέρος ἐκδηλωθήσεται. Τό,τε προσφυὲς οὕτω καὶ κατάλληλον ἐν τοῖς κλάσμασι διαιρέσει μάλιςα τοῦ μέτρου θηρωμένοις, ἀριθμὸν μορίων ληπτέον, τὸν μήτε πολὺν καθ' ἑαυτὸν, καὶ ὑπὸ ἄλλων ἀριθμῶν ἐλασσόνων, ὡς οἷόντε πλείςων ὑποδιαιρούμενον· τοιοῦτοι δὲ οἱ ἀριθμοὶ 12, 30, 60, καὶ οἱ παραπλήσιοι. Ἔςι γὰρ $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$· καὶ $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$· καὶ $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$·

καὶ $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$· καὶ $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$· καὶ $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$· καὶ $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$. Ἐὰν δὲ μείζων παραληφθῇ τῶν μορίων ἀριθμὸς, οἷον 30, ἢ 60, καὶ πλείονα ἔτι κλάσματα διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν μορίων τοῦ μέτρου ἐκδηλωθήσονται. Ἀλλὰ καὶ τῶν μερῶν ἕκαστον ὡσαύτως αὖτις περαιτέρω ὑποδιέλοι, εἰς ὃ ἂν εἰς μέρη ἀποχρώντως ἔχοντα λεπτότητος γένοιτο.

§. 602. Ἐὰν δὲ, ἐπὶ τῆς τοῦ μέτρου διαιρέσεως, πρὸς τὴν τοῦ ὑπολογισμοῦ τις ἀποβλέπῃ εὐχέρειαν, ἄριστα ἂν τῇ δεκαδικῇ προχρήσαιτο διαιρέσει, εἰς δέκα μὲν τὸ μέτρον διελόμενος μόρια, εἰς δέκα δὲ τούτων ἕκαστον τῶν μορίων δεύτερα, εἰς δέκα δὲ καὶ τούτων ἕκαστον τρίτα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οἱ γὰρ, ἐκ τοῦ ὧδε διαιρεθέντος μέτρου ἀριθμοὶ, οἷς αἱ ποσότητες παρίστανται, οὐδὲν ἄλλο, παρὰ τὰ δεκαδικὰ ταῦτα, παρεισάγοντες κλάσμα, ἐπισήμως τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐπιτέμνουσι. Πηλίκον δ᾽ ἐὰν ᾖ τὸ μέτρον τὸ ὁλοσχερὲς, ὃ οἱ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀριθμοὶ ὑποσημαίνουσι, τὰ τοῦ μέτρου μόρια, τὰ ὑπὸ τῶν ἑφεπομένων τῇ τοιᾶδε ὑποδιαστολῇ ἀριθμῶν ἐκδηλούμενα, ἐπίσης ἐστὶν εὐζωύετα· καὶ δι᾽ αὐτῶν ὑπολογισμὸς ἅπας, εὐμαρῶς ὡς οἷόν τε καὶ προχείρως διεκπεραίνεται.

§. 603. Ἀμέλει τοι δυεῖν γραμμῶν ὑπὸ τῷ αὐτῷ μέτρῳ, ἐν ἀριθμοῖς παριστανομένων, δοθήσεται διὰ μὲν τοῦ τῶν ἀριθμῶν κεφαλαίου, τὸ τῶν γραμμῶν κεφάλαιον, διὰ δὲ τῆς διαφορᾶς ἡ διαφορά· οἷον ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 13, 523, καὶ 6, 71 γραμμὰς δύο ὑποσημαίνωσιν, ἔσται τούτων τὸ μὲν κεφάλαιον, ἴσον γραμμῇ, τῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 20, 233 ὑποδηλουμένῃ· ἡ δὲ διαφορὰ, ἴση τῇ διὰ τοῦ 6, 813.

§. 604. Τριῶν δὲ γραμμῶν δι᾽ ἀριθμῶν δηλουμένων, εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη ἀνάλογον, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, ᾗ καὶ τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ὁ τέταρτος ἀνάλογον ἐξευρίσκεται (§. 175.). Οἷον, ἐὰν οἱ τὰς δοθεί-

δοθείσας γραμμὰς παριςῶντες ἀριθμοὶ ὦσιν οἵδε, 13, 25· καὶ 19, 8· καὶ 17, 94, εἴη ἂν ὁ τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἀποδιδὺς ὗτος, 26, 8.

§. 605. Ὡσαύτως καὶ γραμμὴ, ἡ μεταξὺ δυεῖν ἐν ἀριθμοῖς παριςαμένων τοῖσδε, 5, 32, καὶ 7, 14 μέση ἀνάλογος, ἀποδοθήσεται διὰ τῦ ἀριθμῦ 6, 16· ὃς μέσος ἐςὶ τῶν δοθέντων ἀνάλογος· ἤτοι τῦ ὑπ' αὐτῶν παραγομένυ ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ (§. 193.)

§. 606. Εἰώθασι δὲ τὰ πολλὰ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν, αὐτὰς τὰς γραμμὰς ὀνομάζειν, ἢ τὰ ὁποιαδήποτε ἄλλα ποσὰ τὰ δι' αὐτῶν παριςάμενα. Προςιθέντες γὰρ ἀριθμὺς ἀλλήλοις, ἢ ἀπ' ἀλλήλων ὑφαιρῦμενοι, αὐτὰς φασὶ προσαθροίζειν, ἢ διαιρεῖν τὰς γραμμὰς, ἢ τὰς οἱασδήποτ' ἄλλας ἐν ἀριθμοῖς ἐκφερομένας ποσότητας.

§. 607. Ὡσαύτως καὶ ἢν δέοι πρὸς μονάδα, καὶ δύο ἀριθμὺς εὐθείας γραμμὰς παριςῶντας 5 καὶ 7, τὸν τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν, ὁ 5 × 7, ἢ ὁ 35, τὴν τετάρτην γραμμὴν ἀποδώσει. Ταύτητοι καὶ παρὰ τὸ μόνυ πολλαπλασιασμῦ δεῖν ἐνταῦθα, ἡ τετάρτη ἐκείνη τῷ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασμῷ τῶν γραμμῶν λαμβάνεσθαι λέγεται. Καίτοι τὸ πολλαπλασιάζειν τῦ ἀριθμῦ μόνυ ἴδιον κυρίως ἐςίν.

§. 608. Ἔνθεντοι καὶ τετράγωνον ἐνίοτε ἡ γραμμὴ καλεῖται, ἡ ἀνάλογον ὖσα δυσὶν ἑτέραις, ὧν ἡ πρώτη διὰ μονάδος παρίςαται· ὁ γὰρ ἀριθμὸς δι' ὗ ἡ τρίτη αὕτη ἀποδίδοται, τετράγωνος ἐςίν· οἷον εἰ πρὸς εὐθείας ἃς οἱ ἀριθμοὶ δηλῦσιν 1, καὶ 3, τὴν τρίτην δέοι ἀνάλογον προσευρεῖν, ἐπεὶ 1 : 3 = 3 πρὸς τὴν ζητυμένην, ἡ ζητυμένη αὕτη δι' ἀριθμῦ τετραγώνυ τῦ 9 ἐκδηλωθήσεται.

§. 609. Τῇ δ' αὐτῇ διανοίᾳ καὶ γραμμὴ λέγεται διαιρεῖσθαι διὰ γραμμῆς, ἢ ποσότης ὁποιαδήποτε διὰ ποσότητος. Ἐὰν γὰρ πρὸς γραμμὰς τρεῖς, ὧν τὰς μὲν δύο προτέρας οἱ ἀριθμοὶ 5, 32 καὶ 11, 4 ὑποσημαίνουσι, τὴν δὲ τρίτην ἡ μονάς, προσευρεῖν δέῃ τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ἐπειδὴ τὸν ἀριθμὸν 11, 4, διὰ τοῦ 5, 32 διαιρεῖν δεῖ, ἵν' ὁ 2, 14 ἀνακύψῃ, ὁ τὴν γραμμὴν ἐκείνην παραστησόμενος, τούτου γε ἕνεκα καὶ ἡ γραμμὴ αὐτή, τῇ διαιρέσει γραμμῆς διὰ γραμμῆς προϊέναι λέγεται.

§. 610. Εἰσὶ δὲ τοιοῦτοι καὶ ἕτεροι ἑρμηνείας τρόποι, οὓς ἥτε τῶν μεγεθῶν ἐν ἀριθμοῖς εἰσήγαγε δήλωσις, καὶ ἡ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων, προσεκύρωσε χρῆσις· οἷς ἐάν τις προσοχθίζων ᾖ, ἀντὶ τῶν ποσοτήτων οὕτος, τοὺς ἀριθμοὺς ὀνομάζων δι' ὧν ἐκεῖναι παρίστανται· ἢ καὶ ἀντὶ τῶν ἀριθμητικῶν ὅρων, ταῖς ἐκ τῆς τῶν ἀναλογικῶν διδασκαλίας φωναῖς προσχρώμενος καὶ φράσεσι, ταῖς ἐπίσης παντοίῳ γένει ποσότητος προσηκούσαις, πᾶσαν ῥᾳδίως τὴν δοκοῦσαν δυσχέρειαν ἐκ μέσου ποιήσεται.

§. 611. Ἐντεῦθεν οὖν τῆς κοινῆς τῆσδε καὶ πεπατημένης Ἀριθμητικῆς, τῇ Γεωμετρίᾳ εἰς χρῆσιν οὕτω παραληφθείσης, καινόν τι εἶδος Ἀριθμητικῆς ἐξέφυ, ἣν Καθόλου τε καὶ Γενικὴν δεόντως ἐκάλεσαν. Αὕτη δὲ οὐ δι' ἀριθμῶν προβάλλεται τὰς ποσότητας, δι' ἑτέρων δέ τινων σημείων τε καὶ εἰδῶν αὐτὰς τῇ διανοίᾳ παρίστησιν, οἷσπερ οὐδέν τι ἧττον καὶ ἀριθμοί, καὶ γραμμαί, καὶ ἐπιφάνειαι, καὶ στερεά, καὶ παντοίου γένους ἄλλα μεγέθη, ὑποσημαίνεσθαι ἔχουσι. Καὶ ταῦτα δὴ τὰ σημεῖα, οὐ πολλῷ διαφερόντως ἡμῖν, ἢ τοὺς ἀριθμοὺς ὁ ἀριθμητικὸς φιλεῖ, μεταχειριζομένοις, οὐκ ἐν ὑποθέσεσιν εἰδικωτάταις τὰ προβαλλόμενα τυγχάνει τῆς ἐπιλύσεως, ὥσπερ

(ὥσπερ διὰ τῆς κοινοτέρας Ἀριθμητικῆς ἐξ ἀριθμῶν τινων δεδομένων, ἀριθμοὶ ἄλλοι ἐξεχόμενοίπως ἐκείνων ἐπιφέρονται) ἀλλὰ θεωρήματ' αὐτὰ κατασκευάζεται, καὶ μέθοδοίτινες πρὸς ἐπίλυσιν τῶν προβαλλομένων τὰ μέγιστα συντελοῦσαι ἀνακαλύπτονται, αἱ μὲν ἀριθμητικῶς δι' ὑπολογισμοῦ, αἱ δὲ γεωμετρικῶς διὰ τῆς τῶν διαγραμμάτων κατασκευῆς τὰ τῆς ἐφόδου περαίνουσαι. Μεγίστης οὖν, καὶ ὅσης οὐκ ἄντις ῥαδίως εἴποι, τῆς κατὰ τὴν τοιάνδε Λογιστικὴν χρήσεως οὔσης, πρὸ ἔργου ἂν, μᾶλλον δὲ πολλοῦ ἄξιον εἴη, τοὺς κατ' αὐτὴν ὅρους τε καὶ κανόνας εἰς ἓν συλλέξασι, πλατύτερον ἐνταῦθα διεξελθεῖν. Τῶν γὰρ οἷον ἀρχῶν χώραν ἐν αὐτῇ ἐπεχόντων, τὰ μὲν, ὡς ἄρα κοιναί τινες ἔννοιαι οὖσαι, προϋπετέθη, τὰ δ' ἐν τοῖς φθάσασιν ἐξετέθη, καὶ εἰς χρῆσιν παρείληπται ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν.

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ.

§. 612. Ὁποιαδηποτοῦν ποσότης, γραμμὴ, ἐπιφάνεια, στερεὸν, ἀριθμὸς, καὶ ἥτισοῦν ἄλλη, ἣ ἂν ἐξ ἄλλων μηδαμῶς ἠρτημένη νοοῖτο, διά τινος τῶν γραμμάτων α, β, γ, κξ. ὑποσημαινέσθω, προχαρασσομένου μὲν τοῦ − σημείου ἀποφατικῆς οὔσης, καθὰ προείρηται (§. 39. κξ.), καταφατικῆς δὲ, καὶ ἤτοι μοναδικῶς, ἢ κατ' ἀρχὴν τοῦ στίχου τελούσης, σημείου μηδενὸς ἐπιγραφομένου· ἐπιτασσομένου δὲ μόνον τοῦ +, ἔνθα ἂν κατὰ συνέπειαν ἐν τῷ στίχῳ ἄλλῃ ποσότητι συνεκτάσσοιτο.

§. 613. Αἱ ἐν ἰσότητι ἐπιδήλῳ ποσότητες διὰ τοῦ αὐτοῦ δηλούσθωσαν γράμματος. Πλείοσι δ' οὔσαις ὁ ἀριθμὸς προσεπιγραφέσθω, οἷον 2α ἀντὶ α + α· καὶ ἀντὶ α + α + α, 3α· καὶ ἀντὶ 2β + 3β τιθέσθω 5β· καὶ ὡσαύτως δὲ καὶ 13γ, καὶ 15δ νοείσθω. Τὴν μέντοι μονάδα οὐδὲν δέον ἐπιχαράσσεσθαι, εἰμήποτε καθ' ἑαυτὴν τυχὸν ἀπαντῶσαν, ἢ σαφη-

σαφηνείας ἕνεκα μείζονος. Τῶν δὲ ποσοτήτων αἱ ἑτερογενεῖς· ἢ αἱ ὁμογενεῖς μὲν, ἄνισοι δέ· ἢ ὧνπερ ἂν ἔπω δῆλα τὰ τῆς ἰσότητος, ἢ δι' ὅντινοῦν λόγον ἀνυπόθετα, ἅπασαι ἐν διαφέρουσι καὶ τοῖς γράμμασι χαρακτηριζέσθωσαν.

§. 614. Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης ἐξ ἄλλων ἠρτημένη ᾖ, καὶ τοῦτο δὴ, ὅπως ἐκείνων ἐξῆπται, δι' ἰδιαζόντων ἐκδηλούσθω σημείων, ὧν ἤδη τὰ πλεῖστα ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς προεκτέθειται.

§. 615. Ἀμέλειτοι τὸ μὲν παραγόμενον ὑπὸ δυοῖν ποσοτήτων, ἃς τὰ δύο α καὶ β ὑποδηλοῖ γράμματα, ἢ (§. 154.) τὸ πρὸς μονάδα, καὶ α, καὶ β τέταρτον ἀνάλογον, γραφέσθω $\alpha\beta$· εἰμή τινα ἐκ τῆς γραφῆς $\alpha \times \beta$, ἢ $\beta \cdot \alpha$ (§. 52.) παρείη μείζονα ἐλπίζειν σαφήνειαν· ἡ δέ τοι μονὰς, τῶν τῆς ἀναλογίας $1 : \alpha = \beta : \alpha\beta$ ὅρων ὁ πρῶτος, ἀεὶ θετικῶς ἐκλαμβανέσθω.

§. 616. Τὸ παραγόμενον ὑπὸ τριῶν ποσοτήτων, α, β, γ, τῷ δὲ τῷ ἁπλουστάτῳ τρόπῳ δηλούσθω $\alpha\beta\gamma$, ἢ $\beta\gamma\alpha$, ἢ $\alpha\gamma\beta$, ἢ ἄλλως ὁπωσοῦν μετατασσομένων τῶν γραμμάτων· ἢ ὧδε $\alpha \times \beta\gamma$, ἢ $\alpha\beta \times \gamma$, ἢ $\alpha \cdot \beta\gamma$, ἢ $\alpha\beta \cdot \gamma$, ἢ καὶ $\alpha \times \beta \times \gamma$, ἢ $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, εἴ τις λόγος ἀναπείσειεν. Ἀλλὰ καὶ τὰ ὑπὸ τεττάρων, ἢ πλειόνων παραγόντων προκύπτοντα παραπλησίως γραφέσθω.

§. 617. Εἰ δὲ τοῖς γράμμασιν, οἷς αἱ ποσότητες ἐκδηλοῦνται, καὶ ἀριθμοὶ προσκέοιντο, ἀντὶ $2\alpha \times 3\beta$, γεγράφθω $6\alpha\beta$, τῶν ἀριθμῶν ἐπιπολλαπλασιαζομένων. Ἢν δέ τις λόγος ὑπαγορεύοι, τοὺς ἀριθμοὺς διαστέλλειν χρειῶσαι, κατ' ἀρχὰς γοῦν γραφέσθωσαν ὧδε $2.\ 3.\ \alpha\beta$. Αὐτὸ δὲ τοῦτο παρατηρηθήσεται καὶ τῶν ἀριθμῶν ὄντων πλειόνων.

§. 618. Τὰ ἀπὸ ἴσων παραγόμενα, ἃ τοῦ παράγοντος ἀξίαι τε καὶ δυνάμεις ἀκούουσιν (§. 130.), ἤτοι

ἤτοι τῷ εἰωθότι τρόπῳ σημειέσθω, ἢ ἀντὶ αα γραφέσθω $α^2$, ἀντὶ ααα, $α^3$, ἀντὶ αααα, $α^4$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς τῷ πρὸς δεξιὰν προσεπιγραφομένῳ ἀριθμῷ, ἰσαρίθμους εἶναι τὰς μονάδας τοῖς ἰσαλλήλοις παράγουσιν ἀφ᾽ ὧν προκύπτει ἡ δύναμις. Τηνικαῦτα δὲ ὁ τοιόσδε ἀριθμὸς, ὁ τῆς δυνάμεως ἡμῖν ἔςαι **Δείκτης**, ἢ τὸ **Ἐπίσημον**, δι᾽ οὗ ἡλίκητις ἐςὶ τὴν τάξιν ἡ ἀξία καὶ δύναμις, ὑποσημαίνεται.

§. 619. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τύπον καὶ ἀντὶ αααββ γράφοιτ᾽ ἂν $α^3 β^2$· καὶ ἀντὶ αααα ββγγγ, $α^4 β^2 γ^3$· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων παραπλησίως.

§. 620. Τὸ **Πηλίκον** ὃ κατὰ διαίρεσιν τῆς ποσότητος φέρε β, διὰ τῆς α προκύπτει· ἢ τὸ τέταρτον ἀνάλογον πρὸς α, καὶ 1, καὶ β, κἀνταῦθα σημειέσθω διὰ $\frac{β}{α}$.

§. 621. Καὶ ἐν γένει τὸ τέταρτον ἀνάλογον, πρὸς τὰ τρία ποσὰ α, β, γ, δηλέσθω εἰ δόξειεν εὐκρινέστερον οὕτω $\frac{β \times γ}{α}$, ἢ $\frac{β}{α} \times γ$, ἢ $\frac{γ}{α} \times β$, ἐπιτομώτερον δ᾽ οὕτω $\frac{βγ}{α}$.

§. 622. Τὸ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον ἐπὶ τοῖς τρισὶν α, β, $\frac{δε}{γ}$, οὕτω σημειωθήσεται $\frac{βδε}{αγ}$. Καὶ τὸ ἐπὶ α, β, $\frac{βδε}{αγ}$, οὕτω $\frac{ββδε}{ααγ}$. Κἂν τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως.

§. 623. Ἡ τετραγωνικὴ **Ῥίζα** τῆς ποσότητος α, ἤτοι ἡ μέση ἀνάλογον τῇ τε μονάδι, καὶ τῇ ποσότητι α, οὕτω διατυπωθήσεται $\sqrt{α}$. Ἢν δὲ καὶ τὰς

τὰς ὑπερτέρας δέοι σημειοῦν ῥίζας, ἐπιγραπτέον τῷ σημείῳ τῆς ῥίζης, τὸ τῆς τάξεως ἐπίσημον, ὥστε $\sqrt[3]{\alpha}$ δηλοῦν τὴν κυβικὴν ῥίζαν, καὶ $\sqrt[4]{\alpha}$ τὴν τεταρτοταγῆ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 624. Ἐὰν ἡ ἐκ πλειόνων ἀθροιζομένη ποσότης ὡς μία θεωρῆται, τὰ γράμματα δι᾿ ὧν ἐκείνη δηλοῦται μετὰ τῶν περὶ αὐτὰ σημείων, ἐν παρενθέσει ἐναποληφθήσεται, καὶ τότε δὴ τὸ οὕτω συνημμένον, ὡς εἰ καὶ γράμμα ἔντι μοναδικὸν ἐτύγχανε διαχειρισθήσεται. Οὕτως $\alpha \times (\beta + \gamma)$, τὸ ὑπὸ τῆς α ποσότητος, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν β καὶ γ, παρίστησι γινόμενον· τὸ δὲ $\alpha \times (\beta - \gamma)$, τὸ ὑπὸ α, καὶ τῆς τῶν ἄλλων διαφορᾶς. Τὸ δὲ $(\beta + \gamma) \times (\beta - \gamma)$, τὸ ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν β καὶ γ ποσοτήτων, καὶ τῆς αὐτῶν τούτων διαφορᾶς. Τὸ δὲ $(\alpha + \beta)^2$, τὸ τετράγωνον σημαίνει, ἤτοι τὴν δευτέραν τῶν δυνάμεων, τὴν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν α καὶ β. Ἔστι δὲ $\sqrt{}(\alpha + \beta)$ ἡ ῥίζα τῆς αὐτῆς ἡ τετραγωνική.

§. 625. Ἀντὶ δὲ τῆς τοιᾶσδε συμπλοκῆς, συντελὲς πολλάκις εὐθεῖαν ἐπάγειν ἐπὶ ταῖς συμπλεκομέναις ποσότησι. Ταῖς δὲ ποσότησι ταῖς ἐν εἴδει κλασμάτων ἐκκειμέναις, ἡ γραμμὴ ἡ τὸν διαιρετέον ὅρον ἀπὸ τοῦ διαιρέτου διαστέλλουσα, ἀντὶ συνδέσμου εἰς συμπλοκὴν ὑπουργεῖ. Καὶ γὰρ $\frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha - \beta}$, σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha\beta + \gamma\delta$, διαιρετέον διὰ τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 626. Ἡ καθόλου Πρόσθεσις, ἤτοι ἡ εἰς ταυτὸ συγκεφαλαίωσις τῶν ὑπὸ τοῖς εἴδεσι τούτοις δηλουμένων ποσοτήτων, ἁπλῆ τις ἐστὶ τούτων προσάθροισις· ᾗ δὴ πολλάκις, καὶ ἡ τοῦ ἀθροίσματος συμπα-

συμπαραλαμβάνεται ἀναγωγὴ εἰς ὅρους, δι' ὧν ἂν ἐκδηλωθείη, τοὺς βραχυτάτους.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 627. Οὕτω τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β, ἐστὶν $\alpha + \beta$· τὸ δὲ τῶν α, καὶ $-\beta$, ἐστὶν $\alpha - \beta$· τὸ δὲ τῶν 3α, καὶ 2α, ἐστὶ $3\alpha + 2\alpha$· ἢ συντομώτερον 5α· τὸ δὲ τῶν 5α καὶ -2α, ἐστὶ $5\alpha - 2\alpha$· καὶ συντομώτερον 3α· τὸ δὲ τῶν 2α καὶ -5α, ἐστὶ $2\alpha - 5\alpha$· συντομώτερον -3α.

§. 628. Κατὰ τύπον δὲ τῶνδε τῶν ὑποδειγμάτων, πᾶσα πρόσθεσις ῥᾷστα ἐκτελεσθήσεται.

Ἐὰν ἐπὶ $\alpha\beta + 2\beta\gamma$ προστεθῇ $\alpha\beta - \beta\gamma$, συγκροτηθήσεται κεφάλαιον $2\alpha\beta + \beta\gamma$.

Ἐὰν ἐπὶ $\alpha\beta - 3\beta\gamma$ προστεθῇ $\gamma\delta - \alpha\beta + \gamma\gamma$, κεφάλαιον $\gamma\delta - 3\beta\gamma + \gamma\gamma$.

Ἐὰν ἐπὶ $2\alpha^2 - 2\beta^2$ προστεθῇ $3\alpha^2 + \beta^2 - \gamma\alpha$, κεφάλαιον $5\alpha^2 - \beta^2 - \gamma\alpha$.

Ἐὰν ἐπὶ $3\alpha^3 - 4\alpha^2\beta$ προστεθῇ $2\alpha^2\beta - 3\alpha^3$, κεφάλαιον $-2\alpha^2\beta$.

Ἐὰν ἐπὶ $\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{2\beta\beta}{\alpha}$ προστεθῇ $\frac{2\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\beta\beta}{\alpha}$, κεφάλαιον $\frac{3\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\beta\beta}{\alpha}$.

Ἐὰν ἐπὶ $\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\beta\gamma}$ προστεθῇ $\sqrt{\beta\gamma} - \sqrt{\gamma\delta}$, κεφάλαιον $\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\gamma\delta}$.

Καὶ ἐὰν ἐπὶ $2\sqrt{\alpha\beta} - 3\sqrt{\beta\gamma}$ προστεθῇ $2\sqrt{\beta\gamma} - \sqrt{\gamma\delta}$, κεφάλαιον συστήσεται $2\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\beta\gamma} - \sqrt{\gamma\delta}$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐὰν $\alpha \cdot (\beta\gamma - \gamma\delta) + \beta \cdot (\alpha\gamma + \beta\delta)$ προστιθέναι δέῃ ἐπὶ $3\alpha \cdot (\beta\gamma - \gamma\delta) - 2\beta \cdot (\alpha\gamma + \beta\delta) - \alpha^3$, κεφάλαιον ὑπο-

ιστωαφσυναφθήσεται τὸ $4\alpha \cdot (\beta\gamma - \gamma\delta) - \beta \cdot (\alpha\gamma + \beta\delta) - \alpha^3$.

Καὶ παραπλησίως δὲ, ἐὰν ἐπὶ $\frac{2\alpha\beta - \beta\beta}{\gamma}$ προστεθῇ $\frac{3\varepsilon\gamma + \varepsilon\varepsilon - \gamma\gamma}{\gamma}$, προκύψει $\frac{2\alpha\varepsilon + 3\varepsilon\gamma - \gamma\gamma}{\gamma}$.

Καὶ τῶν ποσοτήτων δὲ $2\sqrt{}(\alpha\beta + \beta\beta) - 3\sqrt{}(\beta\gamma - \gamma\gamma) + 2\sqrt{}\beta\gamma$· καὶ $5\sqrt{}(\alpha\beta + \beta\beta) + 2\sqrt{}(\beta\gamma - \gamma\gamma) + \sqrt{}\alpha\beta - \sqrt{}\beta\gamma$, τὸ κεφάλαιον ἐστὶ $7\sqrt{}(\alpha\beta + \beta\beta) - \sqrt{}(\beta\gamma - \gamma\gamma + \sqrt{}\alpha\beta + \sqrt{}\beta\gamma$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 629. Ῥᾴδιον οὖν ἐκ τῶνδε συνιδεῖν, ὡς ἣν καθόλου ἐνταῦθα ὀνομάζομεν πρόσθεσιν, τῇ ἐπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν (§. 31.), τῇ οὐδέν τι ἧττον καὶ τοῖς Γεωμετρικοῖς ἐν χρήσει γινομένῃ, ἐν οἷς μόνον ὁμοιόσημα τυγχάνει τὰ συναπτόμενα, συμφωνεῖ. Ἐπὶ γὰρ τῶν ἑτεροσήμων ἤτοι μόνην ἀφαίρεσιν, ἢ γοῦν προσαφαίρεσιν· τουτέστι τὴν εἰς ταυτὸ προσθέσεώς τε ἅμα καὶ ἀφαιρέσεως συνέλευσιν ἀπαιτεῖ. Προκύπτει γὰρ ταύτῃ γε τὰ πολλὰ, τὸ μὲν τῶν ποσοτήτων ἄθροισμα οὐδαμῶς, ἡ δ' ἐν αὐταῖς χωροῦσα διαφορά· ἣν, ὡς ἄρα ἐκ τῆς ὧδε καλουμένης προσθέσεως ἀπαιτουμένην, κεφάλαιον ὀνομάζειν εἰώθαμεν. Ἀλλὰ γὰρ εἴτις τοῦ κυρίως τοιούτου ἀντιδιαστέλλειν ἕλοιτο, Ἀλγεβραϊκὸν τόδε Κεφάλαιον ἀποκαλέσας οὐκ ἂν ἀπροσφυῶς ὀνομάσειεν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 630. Ἡ καθόλου Ἀφαίρεσις ποσότητος Β ἀπὸ ποσότητος Α, τρίτης ἐστὶν εὕρεσις ποσότητος, ᾗ προστεθείσης τῆς Β, ἀποκατασταθήσεται ἡ Α. (§. 34.).

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 631. Ἐξευρίσκεται δ' ἡ τρίτη αὕτη ῥαδίως, τῶν ἐπὶ ταῖς ἐξ ὧν ἡ Β συγκροτεῖται ποσότησι σημείων ἀμειβομένων· τοῦ μὲν + εἰς τὸ −, τοῦ δὲ − εἰς τὸ +· καὶ τῆς Β ποσότητος ἀντισήμως οὕτω τῇ Α προστιθεμένης. Τούτου γὰρ γενομένου ἐὰν τῇ ἐντεῦθεν προκυψάσῃ ἡ ποσότης Β ὡς ἰῶ κατ' ἀρχὰς ἔχουσα προσεπιτεθῇ, δῆλον ὅτι ἀποκαταστήσεται ἡ Α, τῶν ἀντισήμων ὑπ' ἀλλήλων ἀναιρουμένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 632. Ἔνθεντοι ἐὰν ἀπὸ τοῦ α ἀφαιρεθῇ β, προκύψει $\alpha-\beta$. Καὶ γὰρ $\alpha-\beta+\beta=\alpha$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ α ἀφαιρεθῇ $-\beta$, προκύψει $\alpha+\beta$. Καὶ γὰρ $\alpha+\beta-\beta=\alpha$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ $\alpha-\beta$ ἀφαιρεθῇ $\alpha+\beta-\gamma$, προκύψει $\gamma-2\beta$. Καὶ γὰρ $\gamma-2\beta+\alpha+\beta-\gamma=\alpha-\beta$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ $2\alpha\alpha-\alpha\beta+\gamma\gamma$ ἀφαιρεθῇ $\alpha\alpha+\alpha\beta-\beta\gamma$, προκύψει $2\alpha\alpha-\alpha\beta+\gamma\gamma-\alpha\alpha-\alpha\beta+\beta\gamma$; ὃ συνεπιτέμνουσιν ἔσται $\alpha\alpha-2\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\gamma$. Δεῖ γὰρ καὶ ταῦτα ἐπὶ τὸ ὡς οἷόν τε ἁπλούστερον ἐπανάγειν.

Συνελόντα δὲ εἰπεῖν, τῶν ἐπὶ τῆς ἀφαιρετέας ποσότητος σημείων εἰς τἀναντία μεταβαλόντων, ἡ ἀφαίρεσις τὸν αὐτὸν ἐπ' ἀκριβὲς τελεῖται τρόπον, ὃν καὶ ἡ πρόσθεσις.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 633. Ἐκεῖνο γοῦν ἐπιδήλως τῇ ἀριθμητικῇ ἡ γεωμετρικὴ συνᾴδει ἀφαίρεσις, τὸ κἂν ταύτῃ τῆς διαφορᾶς τῷ ἀφαιρετέῳ ὑποσυναπτομένης, τὸ ἀφ' οὗ ἀφῄρητο πάλιν ἀποκαθίστασθαι. Τὸ δ' ἐν αὐταῖς διάφορον,

διάφορον, ὅτι κατὰ μὲν ἐκείνην τῆς τῶν δύο ποσοτήτων ἀληθοῦς ἀεὶ διαφορᾶς λαμβανομένης, διὰ ταύτης ἀριθμητικόν τι τὰ πολλὰ παρίσαται κεφάλαιον. Ὃ δή, ὡς ἐξ ἀφαιρέσεως ἀνακύπτον, διαφορὰν καλεῖσθαι κἀνταῦθα ἐκράτησε. Προσέχειν οὖν καὶ τούτοις μὴ τὴν Ἀλγεβραϊκὴν λεγομένην, τῇ κυριωνύμῳ διαφορᾷ συγχέειν ἀνθ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐκλαμβάνοντας.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 634. Ἐὰν ᾖ Α : Β = Γ : Δ, τὸ δὲ Α ἀντὶ μονάδος ληφθῇ, (ἣν ἂν διὰ μνήμης ἔχοιμεν οἱ δέοντι προσχρησόμενοι, ἀνεπιτιμήτως, ἔνθα οὐδεμία ἡ ἐκ τῆς θέσεως ἐπισυμβαίνουσα παραλλαγὴ πρὸς τὸ δοκοῦν ὑποτεθεισομένην) τὸ Δ ἐν γένει τὸ Γινόμενον εἶναι λέγεται ὑπὸ τῶν ποσοτήτων Β καὶ Γ. Ἡ δὲ πρᾶξις καθ' ἣν οὕτω τὸ Δ παράγεται, ὁποίαποτ' ἂν ᾖ, ὁ τοῦ ποσοῦ Γ διὰ τοῦ ποσοῦ Β καλεῖται Πολλαπλασιασμός. (§. 44.)

§. 635. Ἐὰν δὲ τῶν αὐτῶν κειμένων τὸ Β ἀντὶ μονάδος ληφθῇ, ἔσται δὴ Δ τὸ Πηλίκον τοῦ ποσοῦ Γ τοῦ διαιρουμένου διὰ τοῦ Α. Ἡ δὲ πρᾶξις, ὁποία δ' ἂν ᾖ, δι' ἧς ἀνακαλύπτεται τὸ Δ, καλεῖται Διαίρεσις. (§. 45.)

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 636. Ἐὰν τὰ Α, Β, Γ ποσὰ ᾖ τῶν ὁμογενῶν· ᾖ δὲ Α : Β = Γ : Δ, ἔσται καὶ Α : Γ = Β : Δ. (§. 165.) Ὅθεν καὶ οὕτως ἂν τὸ Δ παραχθείη· μηδὲν διαφέρον τὸ Β διὰ τοῦ Γ πολλαπλασιάσαι, ἢ τὸ Γ διὰ τοῦ Β ἀνάπαλιν. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον ἀνακύψει τὸ Δ, εἴτε γένοιτο ὡς Α (ληφθὲν ἀντὶ μονάδος) πρὸς Β, οὕτω καὶ Γ πρὸς Δ· εἴτ' οὖν καὶ ὡς Α πρὸς Γ, οὕτω καὶ Β (ἀντὶ μονάδος ἤδη τοῦτο ληφθὲν) πρὸς Δ.

§. 637.