ΤΜΗΜΑ ΔΕΚΑΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ
ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 585.

Σχ. 148. Η τῦ ὀρθῦ ἐπιφάνεια κυλίνδρȣ ΑΒΓ, ἴση ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΕΖ, ȣ̃ τὸ μὲν ὕψος ΔΕ, τῷ τῦ κυλίνδρȣ ὕψει ΑΒ, ἡ δὲ βάσις ΕΖ, τῇ κατὰ τὴν βάσιν τὴν ἐκείνȣ περιφερείᾳ ΒΓ, ἴση ἐςίν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Συμπιπτέσης γὰρ τῆς εὐθείας ΔΕ, οἱαδήποτε τῶν ἐπὶ τῆς τῦ κυλίνδρȣ ἐπιφανείας εὐθειῶν, οἷον τῇ ΑΒ, παραλλήλῳ ȣ̓́σῃ τῷ ἐν αὐτῷ ἄξονι, ἐὰν τυλίσσεσθαί πως τὸ ὀρθογώνιον περιβαλλόμενος ὁ κύλινδρος νοηθῇ, τὸ ὀρθογώνιον ȣ̓́τω διακυρτωθὲν τῇ τῦ κυλίνδρȣ ἐπιφανείᾳ προσεφαρμόσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 586. Σωζομένȣ δὲ τῦ ὕψȣς ΔΕ = ΑΒ, ἐὰν ἡ ΕΗ, μέρει τῆς περιφερείας τῷ ΒΘ, ἴση ληφθῇ, ἀχθῶσι τε ἡ μὲν ΗΙ τῇ ΕΔ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλοι, τὸ ὀρθογώνιον ΔΗ, τῇ ἐπιφανείᾳ ΑΒΘΚ ἴσον ἔσεσθαι, τὸν αὐτὸν τρόπον ὑποσυναφθήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 149. §. 587. Ἡ τῦ ὀρθῦ ἐπιφάνεια κώνȣ ΑΒΓ, ἴση ἐςὶ τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ, ȣ̃ ὕψος μὲν

μὲν τὸ ΔΕ ἴσον τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ ΑΒ, ἡ δὲ βάσις ΕΖ, τῇ ἐκείνου περιφερείᾳ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω ΗΘΙ τομεὺς τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος Σχ. 150.
ΗΘ = ΔΕ, ἥτε περιφέρεια ΘΙ = ΕΖ· ἔσται οὖν ΗΘ ἴση καὶ τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ ΑΒ· τό, τε τόξον ΘΙ, ἴσον τῇ περιφερείᾳ ΒΓ. Ὁ δὲ τομεὺς ΗΘΙ, ἴσος τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ (§. 470.). Συμπιπλέσης τοίνυν τῆς ΗΘ τῇ ΑΒ, ἐὰν ὁ κῶνος περιτυλιχθῇ τὸν τομέα, ἐφαρμόσει δήπου ἡ τοῦ τομέως ἐπιφάνεια τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ κωνικῇ. Ἄρα καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσον ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 588. Ἐὰν ὁ ΑΒΓ κῶνος δι' ἐπιπέδου τοῦ βγ παραλλήλου τῇ βάσει τμηθῇ, καὶ γενομένης τῆς Δε = Αβ, ἀχθῇ εζ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΕΖ, γενήσεται τὸ Δεζ τρίγωνον, ἴσον τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ Αβγ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ΒΓ, πρὸς τὴν κατὰ τὴν τομὴν περιφέρειαν βγ, ὡς ΑΒ πρὸς Αβ (§. 561.), καὶ ΕΖ : εζ = ΔΕ : Δε = ΑΒ : Αβ, ἔσται καὶ ΕΖ : εζ = ΒΓ : βγ. Ἀλλὰ μὴν ΕΖ = ΒΓ. Ἄρα καὶ εζ = βγ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 589. Ἔνθεν τοι, καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων ἐπιφανειῶν ἴσων ἀφαιρεθεισῶν, φανερὸν, ὡς ἡ τοῦ ἀκρωτηριασθέντος κώνου ἐπιφάνεια ΒβγΓ, ἴση τῷ τετραπλεύρῳ εΕΖ? Δίχα οὖν τετμήσθω ἡ εΕ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἀχθήτω ΜΝ τῇ πλευρᾷ ΕΖ παράλληλος, ἡ τὴν πλευρὰν ζΖ κατὰ τὸ Ν δίχα τέμνουσα. Πληρωθήτω δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ, ὃ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ζΗΝ, ΖηΝ, ἴσον ἔσται τῷ τετραπλεύρῳ εΕΖζ· ἐκ τοῦ ἀκολούθου δὲ καὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ βΒΓγ. Ἀλλὰ γὰρ ἐὰν καὶ βΒ δίχα

δίχα τμηθῇ πρὸς τῷ Κ, ἔσαι καὶ ΑΚ = ΔΜ· κἀντεῦθεν καὶ ἡ περιφέρεια ΚΛ, ἡ τῆς διὰ τῦ Κ κατατομῆς, τῆς τῇ βάσει παραλλήλυ, ἴση τῇ εὐθείᾳ ΜΝ. Ἔσιν ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἴση τῷ ὀρθογωνίῳ ΕΗ, ὗ ὕψος μὲν τὸ ΒΒ, βάσις δὲ ἡ εὐθεῖα, ἡ τῇ περιφερείᾳ ΚΛ ἴση.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 590. Ἀχθείσης ἐπὶ τῆς τῦ ὀρθῦ κώνυ ἐπιφανείας, ὡς ἔτυχεν εὐθείας τῆς ΑΠ, ἐὰν ΕΦ ληφθῇ ἴση τῇ περιφερείᾳ ΒΠ, καὶ τὰ λοιπὰ ὡσαύτως γένηται, τὸ ΔΕΦ τρίγωνον, τῇ ἐπὶ τῦ κώνυ ἐπιφανείᾳ ΑΒΠ ἴσον ἔσαι· καὶ τ᾽ ἄλλα ὅσα ἐντεῦθεν ὑποσυνῆπλαι, τῇ αὐτῇ συλλογισικῇ ἐφόδῳ ἥπερ ἐχρησάμεθα, συμπερανθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ. 151. §. 591. Ὁ ὀρθὸς κῶνος, ὁ διὰ τομῆς παραλλήλυ τῇ βάσει ἀκρωτηριασθεὶς, ὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἐνταῦθα διεσκεψάμεθα, καὶ διὰ τῆς τῦ τετραπλεύρυ περιελίξεως ἡμῖν ἀναφύεται. Δεῖ δὲ τῦ τετραπλεύρυ ΑΒΖΕ, τὰς μὲν κατὰ τὸ Α καὶ Β γωνίας ὀρθὰς εἶναι· τὰς δὲ λοιπὰς Ε, Ζ, πλαγίας. Περιελισσομένυ γὰρ τῦ τοιῦδε τετραπλεύρυ περὶ τὴν ΑΒ, γίνονται αἱ ΒΖ, ΑΕ, βάσεις τῶν ὀρθῶν κώνων, ὧν ἄξων κοινὸς ἡ ΒΑ προεκβληθεῖσα. Καὶ καταγράφεται ἄρα, ἡ τῦ ἠκρωτηριασμένυ ἐπιφάνεια κώνυ, τῷ περιελιγμῷ τῆς ΕΖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 15'. §. 592. Ἐὰν ἐπὶ τῦ παραλληλογράμμυ ΑΒΓΔ, πλαγίατις ὡς ἔτυχεν ἡ ΕΖ ἀχθῇ, καθ᾽ ἧς τὸ μέσον Η, κάθετος πίπτῃ ἡ ΗΘ ἀπὸ τῦ Θ σημείυ, τῆς πλευρᾶς ΑΒ προεκβληθείσης· περιελιχθῇ δὲ τό, τε ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΕ,

ΑΒΖΕ, περὶ τὸν κοινὸν ἄξονα ΑΒ, ἔσται ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἣν ἡ ΔΓ καταγράφει, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κωνικήν, ἣν ἡ ΕΖ καταγράφει διὰ τῆς αὐτῆς περιελίξεως, ὡς ΒΓ πρὸς ΗΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθήτω ΗΙ τῷ ΑΒ ἄξονι κάθετος, ἥτις αὐτὸν δίχα τεμεῖ· ἀχθήτω δὲ καὶ ΕΚ τῷ αὐτῷ παράλληλος. Καὶ ἔσται ΕΚ = ΑΙ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ ΕΗΘ, ΕΚΗ ὀρθαί, ἔσται ΕΗΚ + ΚΗΘ = ΚΗΘ + Θ. Ἔνθεντοι ΕΗΚ = Θ· τό,τε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΗΚ, τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΗΘΙ ὅμοιον. Ὅθεν ΙΗ : ΗΘ = ΕΚ : ΕΗ = 2ΕΚ : 2ΕΗ = ΑΒ : ΕΖ. Τοιγαροῦν ἔστω Π περιφέρεια, ἣν, τοῦ σχήματος περιελισσομένου, καταγράφει τὸ σημεῖον Η, καὶ Φ ὁμοίως περιφέρεια, ἣν τῷ αὐτῷ περιελιγμῷ τοῦ σχήματος τὸ σημεῖον Γ καταγράφει. Καὶ ἔσται Π : Φ = ΙΗ : ΒΓ (§. 431.). Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἣν ἡ ΕΖ περιελισσομένη καταγράφει, ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ οὗ βάσις μὲν ἡ Π, ὕψος δὲ τὸ ΕΖ (§. 589.). Ἡ δὲ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἣν περιελισσομένη καταγράφει ἡ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ Φ, ὕψος δὲ τὸ ΓΔ (§. 585.)· ἔσται δὴ καὶ ἡ κυλινδρικὴ πρὸς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐν λόγῳ συνθέτῳ, ἐκ τῶν λόγων Φ : Π, καὶ ΔΓ : ΕΖ· ἢ ἐκ τῶν λόγων ΒΓ : ΙΗ, καὶ ΑΒ : ΕΖ· ἢ καὶ ἐκ τούτων, ΒΓ : ΙΗ, καὶ ΙΗ : ΗΘ· τουτέστιν ὡς ΒΓ πρὸς ΗΘ· οὗτος γὰρ ὁ λόγος διὰ τῆς συνθέσεως ἀναφύεται, τοῦ ὅρου ΙΗ παραλειφθέντος (§. 181.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 593. Ἐγγραφέντος ἐν τῷ τετραγώνῳ ΑΒΓΔ τεταρτημορίου κύκλου, ἀχθει- Σχ. 152.

σῶντε

σῶιτε δύο εὐθειῶν EZ, ΗΘ παραλλήλων τῇ βάσει ΒΓ, καθ᾽ ἄστινασοῦν ἀπ᾽ αὐτῆς ἀποστάσεις· Ἐὰν τοῦ τεταρτημορίου συνάμα τῷ τετραγώνῳ περὶ τὴν ΑΒ περιελιχθέντος, ἡ μὲν ΕΗ σφαιρικὴν καταγράψῃ ἐπιφάνειαν, ἡ δὲ ΖΘ κυλινδρικήν, αἵδε αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ληφθήτω ἀντὶ τοῦ τεταρτημορίου, τὸ τεταρτόντινος σχήματος εὐθυγράμμου κανονικοῦ, ὅπερ ἂν δύο τῶν γωνιῶν πίπτοιεν κατὰ τὰ Ε καὶ Η. Ὑποσημαινέτω δὲ Π μὲν, τὴν τῶν πλευρῶν τοῦ τοιοῦδε σχήματος ἀπὸ τοῦ κέντρου Β ἀπόστασιν· τὸ δὲ Ρ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἤγουν, τὴν τοῦ κύκλου, ὥπερ ἂν τὸ τοιόνδε σχῆμα ἐγγραφῆναι ἔχοι, ἡμιδιάμετρον. Ἀχθήτωσαν δὲ καὶ ΙΚ, ΛΜ τῇ πλευρᾷ ΒΓ παράλληλοι, διὰ πασῶν τῶν τοῦ πολυγώνου γωνιῶν, τῶν μεταξὺ Ε καὶ Η. Ἐὰν οὖν τὸ τοιόνδε τοῦ κανονικοῦ σχήματος μέρος, συνάμα τῷ τετραγώνῳ περὶ τὴν ΑΒ περιελιχθῇ, καταγράψωσι δὲ τῶν πλευρῶν ἑκάστη ΕΙ, ΙΛ, ΛΗ ἐπιφανείας κωνικάς, αἱ δὲ ΖΚ, ΚΜ, ΜΘ, ἑκάστη κυλινδρικάς, ἔσαι τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἑκάστη, πρὸς ἑκάστην τῶν κυλινδρικῶν, τὴν ἐκείνῃ ἀντιστοιχοῦσαν, ὡς Π πρὸς Ρ, (§. 592.). Τοιγαροῦν καὶ πᾶσαι αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια, ἣν τὸ μέρος τοῦ πολυγώνου ΕΗ περιελιχθὲν καταγράψει, πρὸς πάσας τὰς ἐπιφανείας τὰς κυλινδρικάς, τουτέστι πρὸς ἣν ἡ ΖΘ ἅμα περιελισσομένη, ἐπιφάνειαν καταγράψει, ὡς Π πρὸς Ρ (§. 174.), ὅσαι ποτ᾽ ἂν ὦσιν αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, καὶ ὅσος ποτὲ τούτων ἀριθμὸς μεταξὺ τῶν Ε καὶ Η σημείων πίπτοι. Ἀλλὰ γὰρ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κατὰ τὸ εἰρημένον κανονικὸν σχῆμα πλευρῶν διηνεκῶς αὔξοντος, ἅμα καὶ ἡ Π ἀπόστασις

συναύ-

συναύξουσα, τέως δή, ἐν ᾧ αἱ πλευραὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συγχέονται, ἴση καθίσταται τῇ ἡμιδιαμέτρῳ Ρ (§. 398.)· τῆς ἄρα τεταρτημορικῆς ἤδη ἐπιφανείας ΑΕΓ ἡ ἀπὸ τοῦ ΕΗ τόξου καταγραφομένη ἐπιφάνεια, τῇ ἅμα ἀπὸ τοῦ ΖΘ μέρους τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς συγκαταγραφομένῃ διὰ τοῦ αὐτοῦ περιελιγμοῦ, ἡ αὐτὴ ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 594. Ἡ ἄρα τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου, οὗ ἡ μὲν βάσις τῇ βάσει τοῦ ἡμισφαιρίου, τὸ δ' ὕψος τῇ κατ' αὐτὸ ἡμιδιαμέτρῳ, ἴσον ἐστίν. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς ὁλοσχεροῦς σφαίρας, ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν ὁ κατὰ τὴν σφαῖραν μέγιστος κύκλος, ὕψος δὲ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 595. Κἀντεῦθεν ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἴση ἔσται ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς κατὰ τὴν σφαῖραν διαμέτρου περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αὐτὴ διάμετρος (§. 585.). Ἐπειδὴ δὲ τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας κύκλων ὁ μέγιστος, ἴσος ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ περιφέρεια, ὕψος δὲ τὸ τῆς διαμέτρου τεταρτημόριον (§. 469.)· ἔσται δὴ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, πρὸς τὸν ἐπ' αὐτῆς μέγιστον κύκλον, ὡς 4, πρὸς ἕν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 596. Τῇ δὲ πρὸς ἀλλήλας παραθέσει, εἰσὶν αἱ δυοῖν σφαιρῶν ἐπιφάνειαι, ὡς οἱ ἐν αὐταῖς μέγιστοι τῶν κύκλων· ἔνθεν τοι καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων, ἤτοι ὡς τὰ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.