ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 562. Ἡ ἄρα βγδεζ τομὴ, πρὸς τὴν ΒΓΔΕΖ βάσιν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τοῦ τῶν πλευρῶν βγ : ΒΓ (§. 487.)· τοῦ δὲ λόγου βγ : ΒΓ τῷ Αγ : ΑΓ ἴσου τυγχάνοντος (§. 417.), ἔςαι ὁ τῆς τομῆς πρὸς τὴν βάσιν λόγος διπλασίων καὶ τοῦ Αγ : ΑΓ. Ἡ δὲ τῆς τομῆς περίμετρος πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἐςὶν ὡς Αβ : ΑΒ (§. 415.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 142. §. 563. Ἐὰν κῶνος ΑΒΓ, δι᾽ ἐπιπέδου τῇ βάσει ΒΓ παραλλήλου τμηθῇ, κύκλος ἀνακύψει ὁ βγ, οὗ ὁ λόγος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, διπλασίων ἐςὶ τοῦ λόγου Αβ : ΑΒ. Ἡ δὲ κατὰ τὴν τομὴν περιφέρεια πρὸς τὴν κατὰ τὴν βάσιν, ὡς Αβ : ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 143. §. 564. Αἱ πυραμίδες καὶ οἱ κῶνοι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ΒΓ, ΕΖ ὄντα, καὶ ἐν ἐπιπέδοις παραλλήλοις ΗΘ, ΙΚ, ἴσα ἐςί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ἑκάτερον τῶν ῥηθέντων ςερεῶν δι᾽ ἐπιπέδου τμηθῇ παραλλήλου ταῖς βάσεσι, κἀντεῦθεν ἀνακύψωσι τομαὶ αἱ βγ καὶ εζ, ἔςαι βγ : ΒΓ ἐν διπλασίονι λόγῳ τοῦ Αβ πρὸς ΑΒ· καὶ εζ : ΕΖ, ὡσαύτως ἐν διπλασίονι λόγῳ τοῦ Δε : ΔΕ· οἱ δὲ τοι λόγοι Αβ : ΑΒ, καὶ Δε : ΔΕ ἀλλήλοις ἴσοι (§. 522.). Ἄρα καὶ βγ : ΒΓ = εζ : ΕΖ· καὶ βγ : εζ = ΒΓ : ΕΖ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΓ = ΕΖ, ἔςαι καὶ βγ = εζ. Τὰ δὲ ςερεὰ, ὧν αἱ τομαὶ αἱ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ παράλληλοι ἅπασαι ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶ, καὶ αὐτὰ ἀλλήλοις ἴσα ἐςὶ (§. 523.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 565. Ἁπάσῃ ἄρα πυραμίδι, καὶ κώνῳ παντὶ,

.., πυραμὶς ἴση τριπλȣ́ρος κατασκευασθῆναι, ἢ ... ἐπινοηθῆναι δυνήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 566. Ἐὰν εὐθεῖα, ἡ ἀπὸ τȣ̃ παραλλήλȣ τῇ βάσει ἐπιπέδȣ, ἐφ᾽ ὃ ἡ τῆς πυραμίδος, ἢ τȣ̃ κώνȣ κορυφὴ ἀφικνεῖται, πρὸς τὸ κατὰ τὴν βάσιν ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη, ὕψος τῆς πυραμίδος, ἢ τȣ̃ κώνȣ ῥηθῇ, ἡ παρȣ̃σα προτασις ὅτω προτεθήσεται, „ὅτι αἱ πυραμίδες καὶ οἱ κῶνοι, ὧν ἴσαι εἴσι „βάσεις, καὶ τὰ ὕψη, ἴσοι εἰσίν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 567. Τὸ πρίσμα, ἢ ὁ κύλινδρος ȣ̃ ἡ μὲν βάσις τῇ βάσει, τὸ δ᾽ ὕψος τῷ ὕψει τῷ τῆς πυραμίδος, ἢ τῷ τȣ̃ κώνȣ ἴσα ἐςὶ, τῆς πυραμίδος, ἢ τȣ̃ κώνȣ τὸ τριπλȣ̃ν ἐςίν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὑποκείσθω δὴ σημαινόμενον τὸ πρίσμα, ἢ ὁ κύλινδρος διὰ τȣ̃ Π, ἡ δὲ πυραμὶς ἢ ὁ κῶνος διὰ τȣ̃ Φ. Ἔςω δὲ καὶ Β σχῆμα τῇ βάσει ἑκατέρȣ τῶν ςερεῶν Π καὶ Φ ἴσον, καὶ Υ αὐτῶν ἐκείνων τὸ ὕψωμα. Γενέσθω δὲ πρίσμα τρίγωνον ΑΒΓΔΕΖ· ȣ̃ βάσις ἡ ΑΒΓ = ΔΕΖ ἔςω = Β· τὸ δὲ ὕψος ΑΔ = ΓΖ = ΒΕ = Υ. Καὶ ἔςαι δὴ τὸ πρίσμα τόδε ἴσον τῷ προσληφθέντι Π (§. 538.). Ἀχθήτωσαν ȣ̃ν ΔΒ, ΔΓ. Καὶ νοείσθω ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ, ἥτις, ὡς τὴν μὲν βάσιν ΑΒΓ = Β ἔχȣσα, τὸ δ᾽ ὕψος ΑΔ = Υ, τῷ ςερεῷ Φ ἴση ἔςαι (§. 564.). Φημὶ δὴ, ὅτι τῆσδε τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ, τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ τριπλȣ̃ν ἐςί. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΖ βάσις τῆς λοιπῆς πυραμίδος ΓΒΕΖΔ διὰ τῆς διαγωνίȣ ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΖ ὀρθογώνιον ἐςὶν, ἅτε δὴ πλευρὰ ȣ̃σα πρίσματος ὀρθȣ̃ (§. 528.), ἔςαι ΓΒΕ = ΓΖΕ· ὥςε ἡ πυραμὶς ΔΓΒΕ = τῇ ΔΓΕΖ, παρὰ τὸ αὐτὸ ἀμφοτέ- Σχ. 144

 φοτέφολέραις εἶναι καὶ τὸ ὕψωμα. Ἀλλὰ γὰρ τῆς ΔΓΕΖ πυραμίδος ἐὰν βάσις μὲν ληφθῇ ἡ ΔΕΖ, ὕψος δὲ τὸ ΓΖ, καὶ τὸ μέγεθος δῆλον ὅτι τῷ τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ ἴσον. Ἔστιν ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ τριπλάσιον· ταύτητοι καὶ Π = 3Φ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 568. Ἔνθεντοι ἐὰν ἐπὶ τῆς βάσεως Β, πρίσμα ἢ κύλινδρος σταθῇ, οὗ ὕψος ⅓Α, τὸ τηλικοῦτον στερεὸν ἴσον ἔσται πυραμίδι, ἢ κώνῳ, ἐπὶ βάσεως μὲν = Β, ἐν ὕψει δὲ = Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. 569. Οἱ δὲ κῶνοι καὶ αἱ πυραμίδες, οἱ οὐδέπως εἰς κυλίνδρους ἢ πρίσματα μεταβαλόντες ῥᾶστα παρατεθείσονται, καὶ πρὸς κώνους ἑτέρους ἢ πυραμίδας, καὶ πρὸς κυλίνδρους ἢ πρίσματα. Καὶ ἐν γένει ὁ μὲν πυραμίδος ἢ κώνου, πρὸς πυραμίδα ἢ κῶνον λόγος, ἐκ τῶν λόγων συγκείσεται τῶντε βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν· ὁ δὲ τῆς πυραμίδος ἢ τοῦ κώνου λόγος πρὸς τὸ πρίσμα ἢ τὸν κύλινδρον, ἐκ τοῦ λόγου συγκείσεται τῆς τοῦ κώνου, ἢ τῆς πυραμίδος βάσεως πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἢ τοῦ πρίσματος, καὶ ἐκ τοῦ λόγου τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους τοῦ κώνου ἢ τῆς πυραμίδος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, ἢ τοῦ κυλίνδρου τὸ ὁλοχερές.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 570. Καθόλου μὲν οὖν ἐκ τῆς κατὰ τὴν δεῖξιν ἐφόδου φανερὸν, ὅτι τὰ περὶ τῶν πρισμάτων καὶ κυλίνδρων καὶ πυραμίδων καὶ κώνων ἀποδειχθέντα, καὶ περὶ ἀναριθμήτων ἄλλων στερεῶν λεγόμενα κρατεῖ, ὧν αἱ ἐπίπεδοι βάσεις, εἴτε κύκλοι, εἴτε εὐθύγραμμα σχήματα εἰσί. Νοεῖται δὲ εὐχερῶς τὰ τοιάδε στερεὰ, τοῖς εἰς τόδε τεθεωρημένοις παραβαλλόμενα. Δῆλον γὰρ ὡς ἐνάριθμα τούτοις, καὶ

ὧν

ὧν αἱ βάσεις κύκλων εἰσὶ τομεῖς, ἅτινα ἐκ κυλίνδρων ἢ κώνων, ὀρθῶν ἢ πλαγίων μορφοῦσθαι δύναται, ἐὰν διὰ τῶν ἀξόνων ὑπὸ δυοῖν ἐπιπέδων τὰ στερεὰ τάδε τέμνηται. Διὸ καὶ τομεῖς ἂν τὰ οὕτως ἀνακύπτοντα τῶν στερεῶν εἰκότως κληθείη· τὸ μὲν ὑπὸ τῶν διὰ τοῦ κατὰ τὸν κύλινδρον ἄξονος χωρούντων ἐπιπέδων συνιστάμενον, τομεὺς τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν διὰ τοῦ κατὰ τὸν κῶνον, τομεὺς τοῦ κώνου, ὀνομαζόμενα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 571. Ἐὰν κύκλου τεταρτημόριον ΑΒΓ, πε- Σχ. 145.
ρὶ τὴν ἡμιδιάμετρον ΑΓ, ὡς περὶ ἄξονα περιαχθῇ ἔϛγε τὸ ΑΔΓ, τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ, τὸ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓΔ, παρὰ τὰ δύο τεταρτημόρια ΑΒΓ, ΑΔΓ, καὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΔ πέρατα ἔχον, τομεὺς τοῦ ἡμισφαιρίου εἰρήσεται. Ἀπογεννᾶται γὰρ τὸ ἡμισφαίριον, τῇ ὁλοσχερεῖ τοῦ τεταρτημορίου ΑΒΓ περιαγωγῇ, καθ' ἣν ἡ ΓΒ κύκλον γράφει τὸν εἰς βάσιν τῷ ἡμισφαιρίῳ ἐσόμενον. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τοῦ τεταρτημορίου ἡμικύκλιον περιαχθῇ, ὁ μὲν τομεὺς ἔσται τῆς σφαίρας, τὸ δὲ διὰ τῆς ὁλοσχεροῦς περιαγωγῆς γινόμενον ἡ αὐτὴ σφαῖρα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 572. Ἡ βάσις ἡ τοῦ κατὰ τὸ ἡμισφαίριον τομέως, ἔστι τοῦ κύκλου τομεὺς (§. 537.), ἐν ᾧ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ, τὴν τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΑΔΓ, πρὸς ἄλληλα κλίσιν καταμετρεῖ (§. 512.). Καὶ ἐὰν ὁ τοῦ ἡμισφαιρίου τομεὺς δι' ἐπιπέδου τμηθῇ παραλλήλου τῇ βάσει, τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον σχῆμα βγδ, καὶ αὐτὸ τομεὺς ἔσται κύκλου τῇ βάσει ὅμοιος, τοσούτῳ δὲ ἐλάσσων, ὅσῳ δὴ μᾶλλον τοῦ κατὰ τὸ Γ κέντρου ἐστὶν ἀφιστάμενος. Ἀναφύεται γὰρ τὸ σχῆμα τόδε βγδ, ἐὰν ἡ γβ εὐθεῖα, ἡ ἐπὶ τῆς ἀκινήτου ΑΓ κάθετος, ἐν τῷ κατὰ τὸ τεταρτημόριον ΑΓΒ ἐπιπέδῳ, πέδω, περὶ αὐτὴν τὴν ΑΓ περιαχθῇ, ἔσγε τὸ ἐπίπεδον τοῦ τεταρμορίου ΑΓΔ. Ἐντεῦθεν γὰρ δὴ τομεὺς καταγράφεται, οὗ ἡ μὲν ὑπὸ βγδ γωνία, τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστὶν (§. 511.), ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος βγ, τῆς ἡμιδιαμέτρου ΒΓ ἐλάσσων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 573. Ἅπαν δὲ σημεῖον τῶν ἐπὶ τῆς ΑΒΔ κυρτῆς ἐπιφανείας, ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ τοῦ τεταρτημορίου ἐπίσης ἀπέχειν ἐπάναγκες· ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΒ, ἧς τῇ περὶ τὴν ΑΓ περιαγωγῇ ἡ ἐπιφάνεια καταγράφεται, ἐπίσης ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἀφέστηκεν. Ἔστι δὲ ἡ ἀπόστασις αὕτη ἴση τῇ τοῦ τεταρτημορίου ἡμιδιαμέτρῳ ΓΒ, ἢ ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Σχ. 146. §. 574. Ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓ, ὃ περὶ τὴν ΑΓ διάμετρον πάντῃ περιαχθὲν τὴν σφαῖραν ἀπογεννᾷ, ἐὰν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ΔΒ, ΕΖ, ἐπὶ τὴν ΑΓ διάμετρον κάθετοι, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου παράλληλοι, ἑκάστη τῶνδε ἐν τῇ περιαγωγῇ κύκλον καταγράψει, ἐφ᾽ ὃν ἡ ΑΓ κάθετος ἐπιστήσεται· καὶ τοῦτον τοσούτῳ μείζονα, ὅσῳ ἡ ἡμιδιάμετρος ΔΒ, ΕΖ μείζων ἐστί. Τῶν δὲ εὐθειῶν ΔΒ, ΕΖ, ἡ ἧττον τοῦ κέντρου Η ἀπέχουσα μείζων. Ἔνθεντοι καὶ πάντων τῶν οὕτω καταγραφομένων μέγιστος ὁ κύκλος, οὗ τὸ ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου Η διατείνει. Οἱ λοιποὶ δὲ τοσούτῳ ἐλάσσονες, ὅσῳ δὴ μᾶλλον τοῦ κέντρου Η ἀπέχοντες. Οἱ δὲ δὴ κύκλοι οὗτοι καὶ πρὸς ἀλλήλους παράλληλοι ἔσονται, καθ᾽ ὃν δήπου λόγον ἐν γένει ἐπίπεδον ἐπιπέδῳ παράλληλον εἶναι λέγεται (§. 519.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 575. Τὰ δὲ ἐπίπεδα σχήματα, ἅπερ αἱ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΓ κάθετοι εὐθεῖαι ΔΒ, ΕΖ, ΗΘ, αἱ αἱ τῷ ἡμικυκλίῳ ΑΘΓ συμπεριαγόμεναι καταγράφουσι, τὰ αὐτὰ ἐστὶ τοῖς ἀνακύπτουσιν, ἐὰν ἡ οὕτω σχηματισαμένη σφαῖρα, δι' ἐπιπέδων τμηθῇ, οἷς ἡ αὐτὴ ΑΓ κάθετός ἐστι. Καὶ ἔσονται ἄρα ἅπαντα τὰ διὰ τῶν τοιῶνδε τῆς σφαίρας τομῶν ἀναφυόμενα σχήματα κύκλοι, ἴσοι, ἢ γοῦν ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους, ᾗπερ αἱ τῶν διατεμνόντων ἐπιπέδων ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου Η, ἴσαι ἢ ἄνισοι προσλαμβάνονται· καὶ τοσούτῳ δὴ ἐλάσσονες ὁπόσῳ ἡ ἀπόστασις μείζων. Πεσεῖται δὲ τῶνδε τῶν κύκλων ἁπάντων τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 576. Τῶν ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας σημείων ἕκαστον, ἀπὸ τοῦ Η κέντρου τοῦ ἡμικυκλίου, οὗ τῇ περὶ τὴν ΑΓ περιαγωγῇ ἀπογεννᾶται ἡ σφαῖρα, ἐπίσης ἀφέστηκεν. Καὶ τὸ αὐτὸ ἄρα σημεῖον Η, τὸ κέντρον ἔσται τῆς σφαίρας, καθ' ὃν δήπου λόγον καὶ κέντρον εἶναι τοῦ κύκλου λέγεται. Ἡ δ' ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἀγομένη εὐθεῖα, ἡ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡμιδιάμετρος. Ἡ δὲ δισσὰ τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας σημεῖα οὕτω συζευγνῦσα εὐθεῖα, ὡς καὶ διὰ τοῦ ἐν αὐτῇ κέντρου διήκειν, ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἐστί. Τῆς δὲ δὴ σφαίρας περὶ τὸ ἑαυτῆς κέντρον ὁπωσοῦν περιδινουμένης, ἕκαστον τῆς ἐπιφανείας μέρος, τὴν ἴσην ἐπέχον ἕτερον αὐτῆς μέρος θέσιν ἐπικαταλαμβάνει διαδεχόμενον· πᾶσά τε ἡμιδιάμετρος, τὴν ἴσην ἑτέρα τις ἡμιδιάμετρος ὡσαύτως. Ἥτε σφαῖρα τέως αὐτὴ ἑαυτῇ ἐφαρμόζει, ὅπως ἂν περὶ τὸ κέντρον τὸ ἴδιον περιστρέφοιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ'.

§. 577. Ἃ τοίνυν περὶ τῆς διαμέτρου ΑΓ τῆς σφαίρας παρατετήρηται, καὶ περὶ πῶν αὐτῆς κατατομῶν, διὰ τῶν ἐπὶ τῆς εἰρημένης διαμέτρου καθέτων ἐπιπέδων, αὐτὰ δὴ ταῦτα ἀληθεύσει, καὶ περὶ οἱασδηποτοῦν ἄλλης διαμέτρου λεγόμενα. Ἀμέλει τοι, ὅπως ἂν καὶ κατατμηθείη δι' ἐπιπέδου ἡ σφαῖρα, κύκλος ἀεὶ ἀνακύπτει, οὗ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς καθέτου ἐφεστώσης ἀπὸ τοῦ τῆς σφαίρας κέντρου, ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τὰ κέντρα ταῦτα ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα, τό, τε τῆς σφαίρας καὶ τὸ τοῦ κύκλου, οἷαι ΗΔ, ΗΕ, οὐδὲν ἀλλ' ἢ τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπόστασις, ἔσται ἀληθὲς ἐν γένει φάναι, ἅπαντα τὸν ἐκ κατατομῆς τῆς σφαίρας ἀπογεννώμενον κύκλον τοσούτῳ μείζονα τυγχάνειν, ὅσῳ δὴ ἐλάσσων ἡ τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπόστασις.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 578. Δύο δὲ κύκλοι ὧν τὰ ἐπίπεδα διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας δίεισιν, ἀλλήλοις ἴσοι εἰσί. Πίπτει γὰρ ἑκατέρου τὰ κέντρα ἐπὶ τοῦ τῆς σφαίρας κατὰ ταυτό. Αἵτε τῶν κύκλων ἡμιδιάμετροι ταῖς τῆς σφαίρας εἰσὶν αἱ αὐταί. Καὶ ἐν γένει οὖν ὁ κύκλος, οὗ τὸ ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου δίεισι τῆς σφαίρας, ἁπάντων τῶν ἐκ κατατομῆς τῆς αὐτῆς σφαίρας δυναμένων ἀνακύψαι κύκλων ὁ μέγιστος ἐστίν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 579. Ἡ διάμετρος ΑΓ Ἄξων καλεῖται τῶν κύκλων, οὓς αἱ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ΔΒ, ΕΖ, συνάμα τῷ ἡμικυκλίῳ ΑΒΓ συμπεριαγόμεναι καταγράφουσι· καὶ δὴ καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου αὐτοῦ, ὅπερ ἐκ περιαγωγῆς τοῦ ΑΗΘ τεταρτημορίου συνίσταται. Τὰ δὲ τοῦ ἄξονος πέρατα Α καὶ Γ, τῶν αὐτῶν τε κύκλων οἱ Πόλοι, καὶ τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου βάσεως, ἣν ἡ περιαγομένη ΗΘ καταγράψειεν.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 580. Ὁ δὲ ἄξων διὰ τῶν κέντρων διατείνει τῶν κύκλων οἷς ἀνήκων ἐςὶ, καὶ τοῖς κατ' αὐτὲς ἐπιπέδοις ἐφέςηκε κάθετος. Καὶ πάντες ἄρα οἱ τῆς σφαίρας κύκλοι, ὧν ἄξων ὁ αὐτὸς, παράλληλοι εἰσὶν (§. 519.). Ἐπειδὴ δὲ τῆς ΔΒ περὶ τὸν ἄξονα ΑΓ περιαγομένης, ἡ τῦ σημείυ Β ἀπόςασις ἀπὸ τῶν τῦ κύκλυ (ὗ τὴν περιφέρειαν τὸ Β τῇ τοιᾶδε περιαγωγῇ καταγράφει) πόλων Α καὶ Γ, ἐδόλως ἀμείβεται, εὔθεντοι καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν σφαῖραν ἐπιφανείας, περὶ τὸν ἕτερον τῶν πόλων Α ἢ Γ, δυνατὸν ὡσαύτως τὴν περιφέρειαν καταγραφῆναι, καθ' ὃν δὴ τρόπον καὶ ἐπὶ τῦ δοθέντος ἐπιπέδυ περὶ τὸ δοθὲν κέντρον κύκλος καταγράφεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 581. Ἐὰν τῦ ἀπὸ ἡμισφαιρίυ τομέως ΑΒΓΔ, καὶ τῦ ἀπὸ ὀρθῦ κυλίνδρυ ΕΖΗΘ, ὅμοιαίτε καὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν αἱ βάσεις ΒΓΔ, ΖΗΘ· ἡ δὲ τέτων καὶ ὕψη τὰ αὐτά. ΑΒ, ΕΖ, ἔςαι ὁ τῦ ἡμισφαιρίυ τομεὺς, πρὸς τὸν τῦ κυλίνδρυ, ὡς 2 πρὸς 3. Σχ. 147.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶν δὲ γὰρ δὴ τῶν ςερεῶν ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἐπιπέδυ ΧΨ καθεςώτων, ἔςω ΙΚΛΜ τομεὺς κώνυ ὀρθῦ, ὗ ἡ βάσις ΙΚΛ, τῇ βάσει παραπλησίως ΒΓΔ, ἢ ΖΗΘ, ὁμοίατε εἴη καὶ ἴση, τό, τε ΙΜ ὕψος, ἴσον τῷ ὕψει ΑΒ, ἢ ΕΖ, ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ ΧΨ κάθετον. Ἔςω δὲ παρὰ ταῦτα ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἐπιπέδυ ΧΨ, ὀρθὸν ἐφεςὼς ἐπίπεδον τὸ ΝΟ· ἐν ᾧ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΠΟ, ἥτις ἂν εἴη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΧΨ, ἴση τῷ ὕψει ΑΒ, καταγραφήτω τετράγωνον τὸ ΝΠΟΦ, καὶ ἐν τῷ τετραγώνῳ ἐγγεγράφθω κύκλυ τεταρτημόριον τὸ ΝΟΠ. Ἔσται τοίνυν ἡ ΝΠ ἐπὶ τοῦ ΧΨ ἐπιπέδου κάθετος, καὶ δὴ καὶ = ΑΒ. Ἤδη μὲν οὖν τετμήσθω τὰ στερεὰ ταῦτα, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου ταῖς αὐτῶν βάσεσι, τοῦ καὶ τὸ ΝΟ ἐπίπεδον κατὰ τὴν ΡΤ τέμνοντος. Καὶ ἔσονται δὴ αἱ κατατομαὶ δβγ, ηζθ, λικ, ἅπασαι ἀλλήλαις ὅμοιαι. Καὶ παρὰ ταῦτα καὶ βδ = ΡΣ, καὶ ζθ = ΡΤ = ΠΟ = ΠΣ, καὶ ιλ = ΡΥ = ΠΡ. Καὶ γὰρ βδ, ζθ, ιλ, ἤτοι ΡΣ, ΠΣ, ΠΡ, εἰσὶ πλευραὶ τῶν τομῶν ὁμόλογοι. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ ΠΡΣ τρίγωνον ἐστὶν ὀρθογώνιον, ἔσται $ΠΣ^τ = ΡΣ^τ + ΠΡ^τ$, (§. 483.). Τὸ δ' αὐτὸ ἀληθὲς καὶ ἦν ἀντὶ τῶν τετραγώνων, οἱαδήποτε σχήματα ὅμοια τεθείη, ὧν ἂν αἱ ὁμόλογοι τῶν πλευρῶν εἶεν ΠΣ, ΡΣ, ΠΡ (§. 493.)· ἔσται γὰρ ἀπανταχοῦ ηζθ = δβγ + λικ. Κἀντεῦθεν τὸ στερεὸν ΕΖΗΘ, ἴσον τοῖς δυσὶ στερεοῖς ΑΒΓΔ, καὶ ΙΚΛΜ ἅμα ληφθεῖσιν (§. 523.). Ἀλλὰ μὴν τὸ ΙΚΛΜ τριτημόριον ἐστὶ τοῦ ΕΖΗΘ (§. 567.), τὸ ἄρα ΑΒΓΔ, τριτημορίοις δυσὶ τοῦ ΕΖΗΘ ἴσον ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 582. Καὶ τὸ ἄρα ἡμισφαίριον ἴσον ἔσται, δυσὶ κυλίνδρου τριτημορίοις, οὗ ἡ μὲν βάσις τῇ τοῦ ἡμισφαιρίου βάσει, τὸ δ' ὕψος τῷ ὕψει, τουτέστι τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ἴσον. Ἤτε σφαῖρα ἴση δυσὶ τριτημορίοις κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας κύκλων ὁ μέγιστος, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 583. Τόνδε τὸν τρόπον ἐπὶ τοὺς κυλίνδρους, ἢ τὰ τῶν κυλίνδρων μέρη, τὰ τοῦ τοιοῦδε γένους στερεὰ ἀποκαθιστάμενα, καὶ τοῖς κυλίνδροις αὐτοῖς, ἢ τοῖς τούτων μέρεσιν εὐμαρῶς παραβάλλεται. Ἐπειδὴ γὰρ ἐν γένει ἐστὶν, $\frac{2}{3}Α : \frac{2}{3}α = Α : α$, ὅ,τίποτ' ἂν σημαίνῃ τὰ Α, α, (§. 164.), ἔσται τὰ ἡμισφαίρια ἐν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν λόγων τῶντε βάσεων αὐτῶν καὶ τῶν ὑψῶν· τουτέστιν ἐκ τοῦ διπλασίονος λόγου τῶν ἡμιδιαμέτρων, καὶ ἐκ τοῦ ἁπλοῦ τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῶν. Ἡλίκος ὁ τῶν ἡμιδιαμέτρων, ἢ τῶν διαμέτρων λόγος ἐστὶν ὁ τριπλάσιων (§. 551.). Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἔσονται καὶ αἱ σφαῖραι αἱ ὁλοχερεῖς· οἵτε τῶν ἡμισφαιρίων τομεῖς, οἷς αἱ βάσεις ὅμοιαι, καὶ οἱ τῶν σφαιρῶν, οἱ ἐκ δυοῖν ἡμισφαιρικῶν τομέων συγκείμενοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 584. Ἐν γένει δὲ τῶν τριῶν στερεῶν, ἃ τὸ σχῆμα παρίστησι, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τεμνομένων, τὸ Εζηθ τοῖς δυσὶν Αβγδ + Ιικλ ἴσον ἐστί. Καὶ ζΖΗΘ = βΒΓΔ + ικλΜ. Καὶ γὰρ καὶ τοῦτο ἐκ τῆς ἀποδείξεως ἑπόμενον ὡσαύτως ἐστίν.