ΤΜΗΜΑ ΕΝΝΑΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΣΤΕΡΕΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 523.

Δυοῖν στερεῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, δι᾽ ἐπι- Σχ. 129.
πέδου παντὶ τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ΙΚ παραλλήλου τεμνομένων, ἐὰν τὰ ἐπ᾽ ἀμφοῖν προκύπτοντα καθ᾽ ἑκάστην ἀεὶ τομὴν δύο σχήματα βγδ, ζηθ, ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, τὰ στερεὰ ἴσα ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ τῶν δὴ τεθέντων ἕπεται, ὡς ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΛΜ, τὸ τῷ δοθέντι ΙΚ παράλληλον, τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔ ἅπτηται, τὸ αὐτὸ καὶ τοῦ στερεοῦ ΕΖΗΘ ἐφάψεται. Κἀντεῦθεν δῆλον τὰ δύο στερεὰ ἀφ᾽ ἑτέρου ἐπὶ θάτερον τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΙΚ, ΛΜ ἐπίσης ἐκτείνεσθαι. Ἡ δὲ τῶν σχημάτων ἰσότης τῶν ἐπιπέδων βγδ, ζηθ, ἃ τῇ αὐτῇ κατατομῇ ἐπ᾽ ἄμφω ὑποτίθεται ἀνακύπτειν, σαφῶς ἐλέγχει, καὶ τὴν κατ᾽ αὐτὰ τὰ ἐπίπεδα τοῖς στερεοῖς εἰς μῆκος τε καὶ εὖρος ἴσην περιοῦσαν ἔκτασιν, διὰ πάντων τῶν ἐν αὐτοῖς ἀντιστοιχέντων σημείων· ὥστε ἄνισα εἶναι οὐ δύναται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 524. Οὐκοῦν τὰ στερεὰ ἐκ σχημάτων συγκροτοῦμεν ἐπιπέδων, καθάπερ οὐδὲ τὰ ἐπίπεδα ἐκ γραμμῶν συγκεῖσθαι ἐλέγομεν (§. 457.), ἀλλὰ τῇ τῶν ἐπιπέδων ἰσότητι, εἰς ἔλεγχον τῆς τῶν στερεῶν προσχρώμεθα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 130. §. 525. Ἐὰν ᾖ σχῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔΕ, ἐπιπέδῳ τῷ ΛΜ παράλληλον· διὰ δὲ τινος τῶν ἐπὶ τοῦ σχήματος γωνιῶν, οἷον τῆς Α, ἀχθῇ ἡ ΑΖ τῷ ἐπιπέδῳ προσπίπτουσα κατὰ τὸ Ζ· τῇ δὲ, παράλληλοι ἀχθῶσιν αἱ ΒΗ, ΓΘ, ΔΙ, ΕΚ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΛΜ πίπτουσαι, ἐπιζευχθέντων τῶν σημείων Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, τὸ ὑπό τε τῶν σχημάτων ΑΒΓΔΕ, καὶ ΖΗΘΙΚ, καὶ δὴ καὶ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ, ΓΙ, ΙΕ, ΕΖ περατούμενον στερεὸν, **Πρίσμα** καλεῖται· οὗ τὰ μὲν σχήματα ΑΒΓΔΕ, καὶ ΖΗΘΙΚ αἱ **βάσεις**, τὰ δὲ λοιπὰ τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων εἰσὶν αἱ **πλευραί**.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 526. Αἱ ΑΒ, ΖΗ εὐθεῖαι, καθ' ἃς τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΖΒΗ ἐπίπεδον, τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΛΜ καὶ ΑΓ τέμνει, παράλληλοι εἰσίν. (§. 520.). Εἰσὶν ἄρα αἱ τοῦ πρίσματος πλευραὶ παραλληλόγραμμα, ταῖς πλευραῖς τῆς βάσεως ἰσάριθμα. Καὶ ἔστιν ΑΒ = ΖΗ, ΒΓ = ΗΘ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμεναι γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι· ΑΒΓ = ΖΗΘ, ΒΓΔ = ΗΘΙ, καὶ αἱ λοιπαὶ §. 510.). Ἔνθεντοι αἱ ἀπεναντίον τοῦ πρίσματος βάσεις ΑΓ, ΖΘ, ὅμοιαί τε καὶ ἴσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 527. Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ τυχόντος, παραλλήλου ταῖς βάσεσι, τὸ κατὰ τὴν τομὴν σχῆμα, ὅμοιον ταῖς βάσεσιν αὐταῖς ἔσται, καὶ ἴσον.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 528. Τὰ δ' ἄλλα ἐπὶ παντὸς πρίσματος ἡ ΑΖ, ἤτοι κάθετος ἐςὶν ἐπὶ τῶν βάσεων, ἢ πλαγιάζουσα. Καὶ εἰ μὲν ἐκεῖνο, καὶ αἱ λοιπαὶ ΒΗ, ΔΙ, ἐπὶ τὰς βάσεις κάθετοι ςήσονται (§. 515.)· αἵτε τοῦ πρίσματος παραλληλόγραμμοι πλευραὶ ὀρθογώνιοι ἔσονται, καὶ ταῖς βάσεσιν ὀρθαί (§. 514.). Ἢν δὲ ἡ ΑΖ πλαγιάζοι ταῖς βάσεσι, καὶ αἱ λοιπαὶ τοιαίδε εὐθεῖαι ΒΗ, ΔΙ, πλαγιάσουσιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 529. Τὸ δὲ πρίσμα, οὗ αἱ ΑΖ, ΒΗ εὐθεῖαι κάθετοι εἰσὶν ἐπὶ τῶν βάσεων, Ὀρθὸν καλεῖται· τὰ δὲ λοιπὰ Πλάγια.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 530. Καὶ τὸ πρίσμα οὗ αἱ βάσεις παραλληλόγραμμα εἰσὶ, λέγεται Παραλληλεπίπεδον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 531. Τὸ δὲ παραλληλεπίπεδον ὑπὸ ἓξ παραλληλογράμμων περατοῦται, ὧν τὰ δύο ἀεὶ τὰ ἀπεναντίον ἴσατε ἐςὶ, καὶ παράλληλα (§. 521.). Εἶεν δ' ἂν ἄλλως αὐτὰ ἤτοι ὀρθογώνια, ἐξ ἴσων ἢ ἀνίσων πλευρῶν, ἢ πλαγιογώνια (§. 528.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 532. Τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, οὗ αἱ βάσεις ὀρθογώνιοι, Παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον εἰρήσεται. Ἐὰν δὲ τὰ ὀρθογώνια πάντα οἷς περατοῦται, καὶ τετράγωνα ᾖ, Κύβος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 533. Ὁ κύβος ὑπὸ τετραγώνων ἓξ ἴσων ἀλλήλοις περατοῦται. Ἑκάςου δὲ τῶν εἰρημένων τετραγώνων ἡ πλευρὰ, καὶ τοῦ Κύβου ἔςαι πλευρά·

καὶ ταύτης δοθείσης, ἢ κατὰ τὸ δοκῦν ληφθείσης ὁ κύβος κατασκϛυασθήσεται, ἐὰν ἀντὶ, φέρε, ΑΓ, συςῇ τετράγωνον, ὃ ἡ αὐτὴ αὕτη εἴη πλϛυρὰ, ἀντὶ δὲ ΑΖ κάθετος ἀχθῇ τῷ ἐπιπέδῳ τῦ τετραγώνυ, τῇ τῦ κύβυ πλϛυρᾷ καὶ αὐτὴ ἴση· τὰ δὲ λοιπὰ τὸν αὐτὸν ἐκτελεσθῇ τρόπον, ὡς καὶ ἐπὶ παντὸς παραδέδοται πρίσματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 131. §. 534. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν εὐθυγράμμων χημάτων (§. 525.), ληφθῶσιν εἰς βάσεις κύκλοι ἴσοι, ὧν ἂν τὰ κέντρα ἐπιζϛυγνύοι εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ταῖς δὲ τύτων περιφερείαις ἐπιφάνεια προσεφαρμοσθείη καμπύλη, ἐφ᾽ ἣν, ἅπασα εὐθεῖα ΓΔ, τῇ ΑΒ παράλληλος, ἡ διάτινος σημείυ τῶν κατὰ τὴν περιφέρειαν τῆσδε, ἢ τῆσδε τῆς βάσεως, Γ ἢ Δ, διήκυσα, ὅλη πίπτοι· τὸ ςερεὸν τὸ ὑπὸ τῶν τοιῶνδε βάσεων καὶ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας περατύμενον, **Κύλινδρος** κληθήσεται. Ἡ δ᾽ ΑΒ ὁ τῦ Κυλίνδρυ **Ἄξων** ἔςαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 535. Ὁ Κύλινδρος ἐςὶ πρίσμα, ὗ ἡ βάσις χῆμα τυγχάνει κανονικὸν, ὑπὸ ἀπειραρίθμων πλϛυρῶν περατύμενον (§. 399.). Καὶ ἐὰν ἄρα δι᾽ ἐπιπέδυ τμηθῇ παραλλήλυ ταῖς βάσεσι, κύκλος προελϛύσεται, ταῖς βάσεσιν ἴσος (§. 527.). Ὁ δὲ τῦ κυλίνδρυ ἄξων, ἤτοι κάθετος ταῖς βάσεσιν ἐςὶν, ἢ πλάγιος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 536. Ὁ Κύλινδρος, ὗ ταῖς βάσεσιν ὁ ἄξων κάθετος **Ὀρθὸς** λέγεται. Ὁ δὲ καθ᾽ ὃν πλάγιος ἐκείναις, **Πλάγιος**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ·

§. 537. Ἐὰν θάτερον τῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας σκελῶν, περὶ θάτερον νοηθῇ περιάγεσθαι ἀκινητῶν, τομεὺς κύκλου, ἢ ἡμικύκλιον, ἢ κύκλος ὁλοχερὴς ἀνατυπωθήσεται. Εὔδηλον γὰρ ὡς τὸ κινούμενον σκέλος, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἀεὶ βήσεσθαι ἐπιπέδου (§. 507.), ἐν ᾧ ταύτηγε καταγράψει καμπύλην, τὴν ἐπίσης πανταχόθεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἀπέχουσαν. Δυνήσεται τοίνυν καὶ ὁ ὀρθὸς κύλινδρος, διὰ περιαγωγῆς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου γεννᾶσθαι, ὃ ἂν περὶ μίαν τῶν ἐπ' αὐτῷ πλευρῶν ἀκινητοῦσαν περιάγοιτο.

ΘΕΩΡΗΜΑ·

§. 538. Τὰ πρίσματα καὶ οἱ κύλινδροι ΑΒ, ΓΔ, ἐὰν ὦσιν ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις ΕΖ, ΗΘ, ἀλλήλοις ἐξισωθήσονται. Σχ. 132.

ΔΕΙΞΙΣ·

Τμηθέντος καὶ γὰρ τῶνδε τῶν στερεῶν ἑκατέρου δι' ἐπιπέδου παραλλήλου ταῖς βάσεσι, τομαὶ πανταχοῦ ἴσαι ἀλλήλαις ἀναφυήσονται (§. 527.). Τὰ ἄρα πρίσματα ἴσα ἐστὶ (§. 523.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α·

§. 539. Οἱ κύβοι ὧν αἱ πλευραὶ ἴσαι, ἴσοι. Καὶ τῶν ἴσων κύβων αἱ πλευραὶ ἴσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β·

§. 540. Παντὶ πρίσματι, ἢ κυλίνδρῳ, παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον ἴσον ἑνὶ κατασκευάσαι, ἐπὶ βάσεως πηλικησοῦν τὸ εὖρος δοθείσης. Ἔστω γὰρ ΑΒΓ πρίσμα τὸ δοθέν· εὖρος δὲ τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου βάσεως ΔΕ. Ἐὰν ἄρα κατ' ἐπίπεδον τὸ τῆς βάσεως ΑΒ, ὀρθογώνιον κατασκευασθῇ τὸ ΔΕΖ Σχ. 133.

τῷ

τῇ ΑΒ βάσει τοῦ πρίσματος ἴσον, τὸ ΔΓΘ παραλληλεπίπεδον, τὸ ἐπὶ τῆς ΔΕΖ βάσεως, καὶ ἐν ὕψει τῷ ΕΘ, ἴσῳ τῷ ὕψει τοῦ ΑΒΓ πρίσματος, τῷ δὲ τῷ ΑΒΓ ἴσον ἔσαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 541. Ἀμέλειτοι τοῦ πρίσματος, ἢ τοῦ κυλίνδρου ὕψος εἶναι λέγεται, ἡ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ἑτέραν τοῦ πρίσματος ἢ τοῦ κυλίνδρου βάσιν, ἀγομένη κάθετος, καὶ μέχρι τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἀπ' ἐναντίον βάσεως διήκουσα. Διὸ τῶν πρισμάτων τε καὶ κυλίνδρων, ὧν ἐν τοῖς αὐτοῖς αἱ βάσεις εἰσὶν ἐπιπέδοις, τουτέσι τῶν ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις περιεχομένων, τὸ ὕψος ἴσον ἐσί. Καὶ ὧν δ' ἀνάπαλιν τὸ ὕψος ἴσον, πρισμάτων λέγω καὶ κυλίνδρων, τούτων καὶ αἱ βάσεις ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις εἰσίν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 542. Τὰ πρίσματα καὶ οἱ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 134. Ἔσω ΑΒ βάσις τοῦ πρίσματος ΑΒΓ, ἴση τῇ τοῦ ΔΕΖ, οὗ ὕψος τὸ ΕΖ. Καὶ γινέσθω ΒΗ = ΕΖ. Τετμήσθω δὲ τὸ πρίσμα ΑΒΓ, κατὰ τὸ Η, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου ταῖς βάσεσιν. Ἔσαι δὲ δὴ τὸ ἀποτμηθὲν ΑΒΗΘ, ἴσον τῷ πρίσματι ΔΕΖ (§. 538.). Διαιρεθήτω τοίνυν ἡ ΒΓ εἰς μέρη ὁποσαδήποτε τὸν ἀριθμὸν ἴσα, ἀχθήτωτε δι' ἑκάσου τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, ἐπίπεδον τῇ βάσει ΒΑ παράλληλον. Καὶ ἔσαι τὰ πρίσματα, ἐν οἷς τὸ ΑΓ ταύτῃ κατατέμνεται ἀλλήλοις ἴσα. Ἐνέσαι δὲ τῷ ΑΗ τοσαῦτα ἐκ τῶν τηλικούτων πρισμάτων· τουτέσι τοσάδε τῶν μερῶν τοῦ ΑΓ πρίσματος, τῷ ΑΗ πρίσματι ἐνέσαι, ὅσα τῶν μερῶν τοῦ ὕψους ΒΓ, ΒΓ, ἐμπεριέχεται τῷ ΒΗ. Τοιγαρῦν καὶ ἔσαι ΑΒΗΘ : ΑΒΓ = ΒΗ : ΒΓ (§. 152.). Κἀντεῦθεν καὶ ΔΕΖ : ΑΒΓ = ΕΖ : ΒΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 543. **Τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα καὶ οἱ κύλινδροι, εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ὅπως ἂν πρὸς ἄλληλα παρατεθείη· κἄντε ὀρθὰ τὰ ςερεὰ ταῦτα ληφθείη, κἄντε πλάγια.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςω παραλληλεπίπεδα ὀρθογώνια ἰσοϋψῆ, τὰ ΑΒΓΔ, αβγδ· τὰς τῶν βάσεων πλευρὰς ΒΓ, βγ προσέτι ἴσας ἔχοντα. Ἔςαι δὲ καὶ τὸ ΒΔ ὀρθογώνιον ἴσον τῷ βδ ὀρθογωνίῳ. Ἡ δὲ βάσις ΑΒΓ, ἔςαι πρὸς τὴν βάσιν αβγ, ὡς ΑΒ : αβ (§. 474.). Ἐὰν ὖν ΒΔ, βδ ἀντὶ βάσεων ληφθῶσιν, ΑΒ, αβ εἰς ὕψη λογισθήσονται· ὁπότε καὶ σαφῶς ἔςαι ΑΔ : αδ = ΑΒ : αβ (§. 542.)· ἐκῦν ἔςαι ϗ ΑΔ : αδ = ΑΒΓ : αβγ. Ἐὰν ὖν ἀντὶ τῦ ΑΔ καὶ ἕτερόν τι πρίσμα ληφθῇ τὸ Π, ὖ ἡ μὲν βάσις Β, ἴση ᾖ τῇ βάσει ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος = ΓΔ· καὶ ἀτὶ δὲ τῦ αδ, ἕτερον ὡσαύτως τεθῇ τὸ π, ὖ ἡ μὲν βάσις β = αβγ, τὸ δὲ ὕψος = γδ. Ἔςαι δὴ Π = ΑΔ, καὶ π = αδ (§. 538.). Καὶ τύτων ἀντικαθεςώτων ἡ ἀναλογία ΑΔ : αδ = ΑΒΓ : αβγ, εἰς τήνδε μεταποιεῖται, Π : π = Β : β. Σχ. 135.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 544. **Ἅπαν πρίσμα, καὶ πᾶς κύλινδρος, πρίσματι, ἢ κυλίνδρῳ παραβάλλεται, συνθέσει τῶν λόγων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι, καὶ τοῖς ὕψεσιν.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Ληφθήτω δὴ εἰς παράθεσιν κύλινδρος ὁ ΑΒΓ, ὖ βάσις μὲν ἡ Β ὕψος δὲ τὸ Υ, πρὸς πρίσμα τὸ ΔΕΖ, Σχ. 135.

ΔΕΖ, οὗ βάσεις μὲν ἡ β, ὕψος δὲ τὸ υ. Νοείσθω δὲ καὶ τρίτον στερεὸν τοιουτῶδες, οἷον τὸ ΗΘΙ, οὗ ἡ μὲν βάσις Β, ἴση δηλαδὴ τῇ τοῦ στερεοῦ ΑΒΓ, ὕψος δὲ υ, ἴσον τῷ τοῦ στερεοῦ ΔΕΖ. Καὶ ἔσται·

$$ΑΒΓ : ΗΘΙ = Υ : υ \ (§.\ 542.).$$

$$\text{καὶ}\ ΗΘΙ : ΔΕΖ = Β : β \ (§.\ 543.).$$

Ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν. (§. 166.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 545. Ἐντεῦθεν ῥᾳδίως ὁ λόγος πρίσματος, ἢ κυλίνδρου πρὸς ἕτερόν τι τοῦ τοιούτου γένους στερεὸν εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ λόγος τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν διδόμενος ᾖ, εἴτε δι᾽ ἀριθμῶν, εἴτε καὶ δι᾽ εὐθειῶν. Ἐὰν μὲν γὰρ δι᾽ ἀριθμῶν προκέωνται οἱ τῶν βάσεων λόγοι καὶ τῶν ὑψῶν, καὶ πρίσμα πρίσματι ὅπως ἔχει, καὶ κύλινδρος κυλίνδρῳ, ἢ πρίσμα κυλίνδρῳ παραβαλλόμενα, δι᾽ ἀριθμῶν ἐκδηλωθήσεται (§. 178.). Ἐὰν δὲ διὰ γραμμῶν εὐθειῶν οἱ λόγοι οὓς συνθέσθαι δέον ἐκφέρωνται, διὰ γραμμῶν καὶ ὁ τῶν στερεῶν λόγος ἐκκείσεται (§. 410.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 137. §. 546. Ἐὰν δὲ, ἃ δεῖ παραθέσθαι, τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὀρθογώνια ᾖ, ΑΒΓΔ, αβγδ, ὁ τῶν βάσεων λόγος, συγκείσεται, ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν ΑΒ : αβ, καὶ ΒΓ : βγ (§. 475.). Διὸ καὶ ὁ τῶν παραλληλεπιπέδων αὐτῶν λόγος ἐκ τῶν τριῶν συγκείσεται τῶνδε· ΑΒ : αβ, ΒΓ : βγ, ΓΔ : γδ· οἳ καὶ εἰς ἐλάσσονας καταστήσονται, τῶν ἴσων ὅρων, εἴτινες ἂν τύχοιεν ἐν τοῖς ἡγουμένοις τε καὶ ἑπομένοις, παραλειπομένων (§. 181.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 547. Διὸ καὶ ὁ τῶν κύβων λόγος τριπλασίων ἐστὶ τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν. Ἵνα γὰρ ἐκ παραλληλεπιλεπιπέδυ γένηται κύβος, λαβεῖν ἐπάναγκες ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ. (§. 533.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 548. Ἐὰν αἱ τῶν πρισμάτων βάσεις ἀλλήλαις ὅμοιαι τύχωσιν, ὁ τέτων λόγος διπλασίων ἔςαι τῦ λόγυ τῶν πλδυρῶν, τῶν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως θέσεως ἐχεσῶν (§. 487.). Διὸ καὶ τῶν τοιέτων ὁ λόγος πρισμάτων, ἔκτε τῦδε τῦ διπλασίονος τῶν πλδυρῶν, καὶ ἐκ τῦ λόγυ τῶν ὑψῶν συγκείσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 549. Ἔνθεντοι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι, ἐν λόγῳ εἰσὶ σιωθέτῳ, ἔκτε τῦ διπλασίονος τῶν κατὰ τὰς βάσεις διαμέτρων, καὶ ἐκ τῦ λόγυ τῶν ὑψῶν (§. 490.).

ΠΟΡΙΣΜΑ ς'.

§. 550. Τὰ ἐπὶ ὁμοίων βάσεων πρίσματα, ὧν τὰ ὕψη ὡς αἱ τῶν βάσεων ὁμόλογοι πλδυραὶ, εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν ἐπ᾽ αὐτοῖς πλδυρῶν. Ὁ γὰρ τῶν βάσεων λόγος διπλασίων τῦ λόγυ τῶν τοιέτων πλδυρῶν. Προσεπιγίνεται δὲ τῷδε καὶ ὁ τῶν ὑψῶν, ὃς τῷ τῶν εἰρημένων πλδυρῶν ἴσος τίθεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 551. Καὶ πάντες οἱ κύλινδροι, ὧν τὰ ὕψη ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι, ἐν λόγῳ εἰσὶ τριπλασίονι τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ὑψῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 552. Τὰ δὲ ςερεὰ, ἅτινα ἂν ἐν λόγῳ τριπλασίονι ἢ τινῶν τῶν ἐπ᾽ αὐτοῖς πλδυρῶν, εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι οἱ ἀπὸ τῶν αὐτῶν πλδυρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ.

§. 553. Δύο ληφθέντων πρισμάτων, ἢ κυλίνδρων, ἢ πρίσματος καὶ κυλίνδρυ, ὧν βάσεις μὲν αἱ

Β, β,

Β, β, ὕψη δὲ τὰ Υ : υ, εἰ ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· τ8τέςιν ἐὰν ἦ Β : β = υ : Υ, τὰ ςερεὰ ἴσα ἔςαι. Εἴη γὰρ ἂν 8τως ὁ ἐκ τῶν λόγων σιώθετος Β : β ϗ Υ : υ, λόγος ἰσότηλος (§. 186.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.

§. 554. Καὶ ἐὰν τὰ τ8 τοιέτ8 γένες ςερεὰ ἴσα ἦ, Ἔςαι Β : β = υ : Υ· τ8τέςιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἀντιπεπονθεῖαι ἔσονται (§. 187.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 138. §. 555. Ἐπιπέδ8 σχήματος εὐθυγράμμ8 τ8 τυχόντος ληφθέντος ΑΒΓΔΕ, ἐὰν ἀπὸ τ8 ἐν μετεώρῳ σημεί8 Ζ, εὐθεῖαι ἀχθῶσι ΖΑ, ΖΒ, κξ. ἐπὶ πάσας τὰς γωνίας τ8 σχήματος, τὸ 8τως ἐκπεραιέμενον ςερεὸν, ὑπότε τ8 ῥηθέντος ἐπιπέδ8 ΑΒΓΔΕ, καὶ τῶν τριγώνων ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΔ, καὶ τῶν λοιπῶν. Πυραμὶς λέγεται, ἧς τὸ μὲν σχῆμα ΑΒΓΔΕ ἡ βάσις, τὰ δὲ τρίγωνα ΖΑΒ, ΖΒΓ, καὶ τὰ λοιπὰ, αἱ πλ8ραί.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 556. Αἱ τῆς πυραμίδος πλ8ραὶ ἰσάριθμοι ταῖς τῆς βάσεως. Ἐξ 8 καὶ τῶν πυραμίδων αἱ μὲν τρίπλ8ροι, αἱ δὲ τετράπλ8ροι, πεντάπλ8ροι, κλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 139. §. 557. Ἐὰν ἀντὶ τῆς εὐθυγράμμ8 βάσεως κύκλος ληφθῇ 8 κέντρον τὸ Α. Διὰ δέ τινος τῶν ἐν μετεώρῳ σημεί8 Β, καὶ τῆς τ8 κύκλ8 περιφερείας, ἐπιφάνεια καμπύλη διατείνῃ, ἐφ' ἣν αἱ εὐθεῖαι πίπτοιεν ἅπασαι ΒΓ, ΒΔ, ὁπόσαι ἂν ἀχθεῖεν ἀπὸ τ8 Β σημεί8 ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὸ ὑπὸ τ8 κύκλ8, καὶ τῆς τοιᾶσδε καμπύλης περατ8μενον ςερεὸν Κῶνος κληθήσεται, 8 ὁ κύκλος ΓΔ ἡ βάσις.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 558. Ἡ δὲ ΑΒ εὐθεῖα ἡ τὸ κέντρον τῆς βάσεως Α, τῇ τοῦ κώνου κορυφῇ Β συνεπιζευγνύουσα, ὁ Ἄξων τοῦ κώνου ἀκούεται· οὗ ὀρθοῦ μὲν ἐφισταμένου τῇ βάσει, Ὀρθὸς ὁ κῶνος· πλαγίως δὲ, Πλάγιος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 559. Ὁ δέ τοι κῶνος οἷά τις πυραμίς ἐστιν ἐκ Σχ. 140. πλευρῶν ἀπειραρίθμων συγκροτουμένη. Πᾶσαι δὲ αἱ ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ κώνου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅθεν καὶ ἡ γένεσις τοῦ ὀρθοῦ κώνου, τοῦ τυχόντος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, περὶ τὴν ἑτέραν ΒΑ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν, περιαγομένου (§. 537.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 560. Ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ κώνου, ἑκάστη τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν ΒΓ, πλευρὰ τοῦ κώνου καλεῖται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 561. Οἱασδήποτε πυραμίδος ΑΒΓΔΕΖ, δι᾽ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει τεμνομένης, τὸ ἀνακύπτον κατὰ τὴν τομὴν σχῆμα βγδεζ, ὅμοιον τῇ βάσει ἐστί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι γὰρ ἡ βγ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΒΓ, καὶ Σχ. 141. γδ τῇ ΓΔ (§. 520.). Ἄρα καὶ ὑπὸ $\beta\gamma\delta = B\Gamma\Delta$ (§. 510.). Καὶ οὕτω δι᾽ ὅλης τῆς περιμέτρου. Ἐν μὲν οὖν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἐστὶ $B\Gamma : \beta\gamma = A\Gamma : A\gamma$. Κἀν τῷ ΑΓΔ δὲ, $A\Gamma : A\gamma = \Gamma\Delta : \gamma\delta$ (§. 417.). Ἄρα $B\Gamma : \beta\gamma = \Gamma\Delta : \gamma\delta$. Τὰ δὲ σχήματα ἐν οἷς αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπὸ ἀναλόγων εὐθειῶν περιέχονται, ὅμοια ἐστίν.