ΤΜΗΜΑ ΕΒΔΟΜΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΗΣ
ΠΑΡΑΘΕΣΕΩΣ
ΤΩΝ
ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 457.

Σχ. 92. Ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα τῶν σχημάτων, τὰ ἐν δυσὶν εὐθείαις παραλλήλοις ΑΒ, ΓΔ, ὕτω περιεχόμενα, ὥςε τύτων ἑκατέραν ἅπ]εσθαι, ὅμοια ἔσαι, ἐὰν ἀχθείσης ὁπωσῦν τῆς ΕΖ, ταῖς αὐταῖς ΑΒ, ΓΔ παραλλήλυ, τὰ τῆσδε τῆς εὐθείας μέρη ΗΘ, ΙΚ, τὰ ἐντὸς τῶν σχημάτων πίπ]οντα, ἴσα ἀλλήλοις ᾖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ γάρτοι ὕτως ἔχοντα σχήματα ἀφ᾽ ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἐξ ἴσυ ἐκτείνεται. Ἀπὸ δὲ τῆς ἰσότητος ἁπασῶν τῶν ἀχθῆναι δυναμένων εὐθειῶν ΗΘ, ΙΚ, ἕπεται τὰ αὐτὰ σχήματα, καὶ κατάγε τὸ μῆκος τῶν εἰρημένων παραλλήλων ἐξίσυ ἐκτείνεσθαι, κατὰ πᾶν ὁτιῦν σημεῖον τὸ τῶν παραλλήλων αὐτῶν ἐπίσης ἀπέχον. Οὐδέτερον ἄρα τῶν ῥηθέντων σχημάτων ὕτε μεῖζον ἂν εἴη, ὕτ᾽ ἔλατ]ον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 458. Σαφὴς ἡ πρότασις καὶ ἐναργής. Οὔκυν δὲ τὰ σχήματα ὑπείληφα συγκροτεῖσθαι ἐξ εὐθειῶν παραλλήλως παρακειμένων· τῦτο γὰρ δήπυ διὰ τὸ ἀπλατὲς τῆς εὐθείας ἄτοπον, ἀλλὰ ταῖς εὐθείαις εἰς

εἰς ἔλεγχον μόνον ἐχρησάμην τῆς τῶν σχημάτων πρὸς ἅπαν τὸ δοθὲν μέρος ἐκλάσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 459. Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒ, ΓΔ, καὶ δὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΕΖΗ, ΘΙΚ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἢ τῶν ἴσων βάσεων ΛΒ = ΜΔ = ΖΗ = ΙΚ, ςαθεῖσαι δυνάμενα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΑΝ, ΛΚ, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί, παραλληλόγραμμόν τε παραλληλογράμμῳ, καὶ τριγώνῳ τρίγωνον. Τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου διπλάσιον. Σχ. 93.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθείσης γὰρ ὁπωσοῦν τῆς ΟΠ, ἥτις ἂν εἴη ταῖς αὐταῖς ΑΝ, ΛΚ παράλληλος, γίνεται ΟΦ = ΡΣ, καὶ ΤΥ = ΧΠ (§. 418.). Ἄρα ΑΒ = ΓΔ, καὶ ΕΖΗ = ΘΙΚ (§. 457.). Ἐὰν οὖν ἡ ΘΝ τῇ βάσει ΙΚ γένηται ἴση, πληρωθῇ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ἀχθείσης τῆς ΝΚ, αὐτὸ τοῦτο τὸ παραλληλόγραμμον ΘΙΚΝ ἑκάςῳ τῶν προτέρων ΑΒ, ἢ ΓΔ ἴσον ἔςαι. Ἐπεὶ δὲ καὶ διπλάσιον τὸ αὐτὸ τοῦ ΘΙΚ τριγώνου, ἔςαι δὴ καὶ τὸ ΑΒ, ἢ ΓΔ τοῦ αὐτοῦ ΘΙΚ διπλάσιον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 460. Ἔνθεντοι ἐὰν ἡ ΑΒ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓ, ἡμίσεια ᾖ τῆς βάσεως ΔΕ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἐν ταῖς αὐταῖς ἀμφοῖν παραλλήλοις κειμένων, τὸ παραλληλόγραμμον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔςαι. Σχ. 94.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 461. Ἐὰν δὲ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις πλείονα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ, ΖΕΗ, ἐπὶ βάσεων ἴσων, ἢ ὁπωσοῦν ἀνίσων ςαθῇ τῶν ΒΓ, ΓΕ,

ΕΗ

ΕΗ, τῶν πάντων τὸ κεφάλαιον ἴσον ἔςαι τῷ ΑΒΗ τριγώνῳ, τῷ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐπὶ βάσεως τῆς ΒΗ συνισαμένῳ, ἥτις ἂν εἴη τῶν ΒΓ, ΓΕ, ΕΗ τὸ ἄθροισμα. Ἔςι γὰρ ΑΓΕ = ΔΓΕ, καὶ ΑΕΗ = ΖΕΗ. Ἐνθεντοι καὶ ΑΒΓ + ΔΓΕ + ΕΖΗ = ΑΒΓ + ΑΓΕ + ΑΕΗ = ΑΒΗ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 462. Ἡ τῶν παραλλήλων διάςασις, ἤτοι ἡ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τούτων ἐπὶ τὴν ἑτέραν κάθετος εὐθεῖα, Ὕψος εἴωθε καλεῖσθαι τοῦ παραλληλογράμμου, ἢ τοῦ τριγώνου, τοῦ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντος. Τούτου κειμένου τὸ θεώρημα, καὶ οὕτως ἂν ἀπαγγέλλοιτο· τὰ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ τρίγωνα ὧν ἴσαι αἱ βάσεις, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί· τὸ δὲ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τοῦ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἰσοΰψους. Δυνατὸν δὲ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων, καὶ τῶν τριγώνων, οἱανδήποτε τῶν πλευρῶν ἀντὶ βάσεως ἐκλαμβάνεσθαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 463. Τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ, ἢ τριγώνῳ, ὑπὸ δοθείσῃ τῇ γωνίᾳ, παραλληλόγραμμον, ἢ τρίγωνον ἴσον συςήσασθαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 96. Ἔςω τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, ἢ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία, ἐπὶ τὴν βάσιν προεκβεβλημένην ΒΓ μετενεχθεῖσα ἡ Ε. Καὶ γινέσθω ΕΖ = ΒΓ. Καὶ προαχθείσης τῆς ΑΔ, παραλλήλου τῇ βάσει ΒΓ, πληρούσθω ἤτοι τὸ τρίγωνον ΗΕΖ, ἢ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΕΖΘ. Τὸ γὰρ ΗΕΖ τρίγωνον, τῷ δοθέντι ΑΒΓ ἴσον ἔςαι· τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΗΕΖΘ, τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΓΔ. Ἦν δὲ τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἴσον παραλληλόγραμμον συςῆσαι δέοι, τῶν λοιπῶν ὡς

πρὶν

πρὶν γινομένων, δίχα τετμήσθω ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Ι, καὶ πληρέσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΕΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰσὶ γὰρ τὰ ταύτηγε συνισάμενα χήματα, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΑΘ, ΒΖ ὄντα, καὶ ἐπὶ βάσεων ἔσῶτα, ἐφ' αἷς ἴσα καθίσαται, ὡς ἔδει, τοῖς ἐξ ὑπαρχῆς (§. 459.). Ἔχει δὲ καὶ γωνίαν ἀπαντα τὴν δοθεῖσαν Ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 464. Διὰ δὴ τούτων, παντὶ τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ, ἢ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον κατασκευασθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 465. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ χήματι, τῷ ἐκ πλειόνων ἢ τριῶν πλευρῶν περιεχομένῳ, χῆμα ἕτερον ἴσον συςήσασθαι, οὗ ἂν ἡ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς μονάδι ἐλάσσων.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔςω δὴ τὸ δοθὲν χῆμα ΑΒΓΔ. Καὶ ἀποτμηθέντος ἀπ' αὐτοῦ οἱουδήποτε τριγώνου τοῦ ΑΒΔ, ἀχθήτω ΑΕ τῇ διαγωνίῳ ΒΔ, δι' ἧς τὸ τρίγωνον ἀποτέτμηται, παράλληλος· προεκβεβλήσθω δὲ ἡ τοῦ χήματος πλευρὰ ΓΔ, ἡ τῷ τριγώνῳ αὖθεν, ἢ ἔνθεν προσκειμένη, ἕως οὗ ἐκείνῃ προσπέσοι κατὰ τὸ Ε· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· τὸ γοῦν ΕΒΓ χῆμα, παρέχεται τὸ ἐπιταχθέν. Σχ. 97.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ ΕΒΔ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΔ (§. 459.). Ἔνθεν τοι $ΒΓΔ + ΕΒΔ = ΒΓΔ + ΑΒΔ$· τουτέςι τὸ ΕΒΓ χῆμα, ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· ὁ δὲ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τοῦ ΕΒΓ, μονάδι ἐλάσσων τοῦ τῶν πλευ-

πλευρῶν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ γὰρ ἀντὶ τῶν ΑΒ, ΑΔ πλευρῶν ἀντικατέστησαν αἱ ΕΒ, ΕΔ, τούτων ἡ δευτέρα τῇ ΓΔ οὕτω συνῆλθεν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ΓΔ + ΔΕ, ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων, οὐκ ἀντὶ δυεῖν πλευρῶν, ἀντὶ δὲ μιᾶς δεῖν ἐκλαμβάνεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 466. Τόνδε τὸν τρόπον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν διηνεκῶς ὑπομειουμένου, τέως ἄντις ἀφίκοιτο ἐπὶ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἴσον ἂν ᾖ τῷ σχήματι τῷ δοθέντι ἐξ ὑπαρχῆς, οἷα δὴ καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστῳ εἰς ὃ οὕτως ἐκεῖνο μεταμεμόρφωτο.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 467. Ἅπαν σχῆμα κανονικὸν, ἴσον ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση τῇ τοῦ σχήματος περιμέτρῳ· τὸ δὲ ὕψος, τῇ τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρῳ, ὃς ἂν τῷ σχήματι ἐγγράφοιτο.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 98. Ἔστω σχῆμα κανονικὸν τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ Ζ κέντρον τοῦ κύκλου, ὃς ἂν τῷ σχήματι τῷδε ἐγγράφοιτο. Ἀχθεισῶν δὲ τῶν ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ, κξ., διαιρεθήσεται δὴ τὸ σχῆμα εἰς τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, κξ. (§. 389.), ὧν ἐὰν βάσεις εἶναι τεθῶσιν αἱ τοῦ κανονικοῦ σχήματος πλευραὶ, ὕψος ἅπασι τὸ αὐτὸ ἔσεται, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος· τουτέστιν (§. 394.) ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ κύκλου, ὃς ἂν τῷ σχήματι ἐγγράφοιτο. Ἔσονται ἄρα (§. 461.) ἅπαντα ταῦτα τὰ τρίγωνα ἅμα ληφθέντα ἴσα τῷγε τῷ ΖΗΘ, οὗ βάσις μὲν ἡ ΗΘ, τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ· τουτέστιν ἡ τοῦ κανονικοῦ σχήματος περίμετρος, ὕψος δὲ, ἡ ῥηθεῖσα ἡμιδιάμετρος. Καὶ αὐτῷ τούτῳ ἄρα τῷ τριγώνῳ ΖΗΘ, τὸ κανονικὸν σχῆμα ἴσον ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 468. Ἕκαστον μέρος τῶν τοῦ κανονικοῦ σχήματος ΕΑΒΖ, ἴσον τῷ τριγώνῳ ΗΒΖ, οὗ τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος ἐστὶν ἐκείνῳ, βάσις δὲ ἡ ΗΒ, ἡ ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν πλευρῶν ΕΑ + ΑΒ, τῶν τῷ προτεθέντι μέρει ἀνηκουσῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 469. Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, τὸ δὲ ὕψος τῇ ἡμιδιαμέτρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ γὰρ κύκλος τοῦ αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, ἢ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένου κανονικοῦ σχήματος, τοσούτῳ ἧττον ἐστὶ διαφέρων, ὅσῳ δὴ ὁ τῶν πλευρῶν τοῦδε τοῦ σχήματος ἀριθμὸς μείζων ἐστίν· ἥτε διαφορὰ, τοῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμοῦ εἰς ἄπειρον ἐπηυξημένου, οἱασοῦν, ἥτις ἂν δοθείη, ποσότητος ἐλάσσων καθίσταται, τῆς τοῦ κανονικοῦ σχήματος περιμέτρου, τῇ τοῦ κύκλου τέως περιφερείᾳ εἰς ταὐτὸ συνιούσης (§. 398, 399.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 470. Τοιγαροῦν καὶ ὁ τοῦ κύκλου τομεὺς ἴσος ἔσται τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις τῷ τοῦ τομέως τόξῳ, τὸ δὲ ὕψος τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ἰσοῦται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 471. Εὐθείας ἄρα δοθείσης, ἥτις ἂν ἴση ὑπάρχοι τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, τρίγωνον, ἢ παραλληλόγραμμον τῷ κύκλῳ ἴσον ῥᾷστα καταγραφήσεται. Ἀλλὰ γὰρ οὐδεὶς ἐστὶ τρόπος γεωμετρικὸς δῆλος, τοῦ εὐθεῖαν ἀποδοῦναι γραμμὴν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ παρισουμένην. Καίτοι τινὲς φέρονται τρόποι οἷς τοῦτο τελεῖται, ἐν ἐξαπάτῃ μόλις που γινομένῃ ὑπὸ τὴν αἴσθησιν. Ἐρείδονται δὲ οἱ τρόποι

τοῖς ἀριθμοῖς, δι' ὧν ἡ Ἀριθμητικὴ τὸν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον, ὅσον ἄντις ἐπ' ἀκριβὲς βούλοιτο, καὶ πλέον δ' ἴσως ἤτις βουληθείη, παρίστησιν. Ἐκ γοῦν τῶν κατασκευῶν ἐκείνων, προκεί-
Σχ. 99. σθω αὕτη ἅλις προσφυῶς ἔχουσα. Περιφέρειά τις τετραχῇ διαιρείσθω. Ἀχθήτω δὲ ἡ τὸ τεταρτημόριον ὑποτείνουσα ΑΒ. Ἀχθεῖσα δὲ πενταχῇ διατμηθήτω, ὧν δὴ ἴσων μερῶν τὸ πρῶτον ἔστω ΒΓ. Καὶ ἔσται δὴ ἡ περιφέρεια ἴση τρισὶ διαμέτροις ΒΔ, καὶ προσέτι τῷ μορίῳ ΒΓ· τῆς ἐντεῦθεν συμβαινούσης ἐξαπάτης, ἢ τῆς ἀληθοῦς ἐλάσσων ἂν εἴη ἡ οὕτως ἐξευρεθεῖσα περιφέρεια, ἐν ἡμιμυριοστῷ μορίῳ τῆς διαμέτρου $\frac{1}{20000}$ ὑφισαμένης. Δυνατὸν δὲ, ἐν διαπλώματι ὡσαύτως ἅλις σμικροτάτῳ, ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος τίθεσθαι $= 7 : 22$, ἢ $1 : 3\frac{1}{7}$.

§. 472. Τῶδε δὴ, ἢ ἑτέρῳ ὁτῳοῦν τῷ τρόπῳ, τῆς εὐθείας εὑρεθείσης, ἥτις ἂν τῇ ὁλοχερεῖ περιφερείᾳ ἴση τυγχάνοι, ἀποδοθήσεται καὶ εὐθεῖα ἡ τῷ δοθέντι τόξῳ παρισουμένη, οὗ δηλονότι ὁ πρὸς τὴν περιφέρειαν δίδοται λόγος, ἐὰν γένηται ὡς ἡ ὁλοχερὴς περιφέρεια πρὸς τὴν ἐν μέρει, ἤτοι τὸ τόξον, οὕτως ἡ τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ ἴση εὐθεῖα, πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἴσην τῷ τόξῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 473. **Τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν ἴσα τὰ ὕψη, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἰσοΰψων τριγώνων λεγόμενον κρατεῖ.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 100. Ἔστω δὴ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσα τὰ ὕψη, οἷαιποτ' ἂν ὦσιν αἱ τούτων γωνίαι. Γινέσθω δὲ ΒΗ = ΕΖ. Καὶ ἤχθήτω διὰ τοῦ Η τῇ

πλαπλευρᾷ ΑΒ παράλληλος. Ἔσαι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗ, τῷ ΔΕΖ ἴσον. Καὶ δὴ ΑΒΗ : ΑΒΓ = ΔΕΖ : ΑΒΓ. Διαιρεθήτω τοίνυν ἡ ΒΓ, εἰς μέρη ὁσαδηποτοῦν τὸν ἀριθμὸν ἀλλήλοις ἴσα· διὰ δὲ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ αὐτῇ πλευρᾷ ΑΒ, αἷς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ, εἰς ἰσάριθμα παραλληλόγραμμα διανεμηθήσεται ἀλλήλοις ἴσα (§. 462.). Ἐπειδὴ οὖν ἐπὶ τῆς ΒΗ τοσάδε μέρη ἐμφιλοχωρεῖ τῶν ἀπὸ τῆς βάσεως ΒΓ, ὅσα μέρη τῶν τοῦ ΑΒΓ παραλληλογράμμου ἔνεσι τῷ ΑΒΗ. Ἔσαι ἄρα (§. 152.) ΑΒΗ = ΔΕΖ : ΑΒΓ = ΒΗ : ΒΓ.

Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν τριγώνων ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται, προσαρμοζομένης τῆς δείξεως τῷ Σχήματι 101.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 474. *Τὰ παραλληλόγραμμα ὧν ἴσαι αἱ βάσεις, εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἐπὶ ἴσων βάσεων τριγώνων λεγόμενον κρατεῖ.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔσωσαν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓ, Σχ. 102.
ΔΕΖ, ἴσαι αἱ βάσεις ΒΓ = ΕΖ· ὕψη δὲ τὰ ΑΗ, ΔΘ· καὶ συνεσάσθω ἐπὶ τῆς βάσεως βγ = ΒΓ ὀρθογώνιον τὸ αβγ, οὗ ἡ πλευρὰ αβ ἴση ᾖ τῇ ΑΗ· καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ὁμοίως εζ = ΕΖ τὸ δεζ, οὗ ἡ πλευρὰ δε = ΔΘ. Ἔσαι οὖν αβγ = ΑΒΓ, καὶ δεζ = ΔΕΖ (§. 462.). Ἔνθεντοι καὶ ΑΒΓ : ΔΕΖ = αβγ : δεζ. Ἀλλὰ μὴν ἐὰν αἱ τῶν ὀρθογωνίων αβγ, δεζ, ἴσαι πλευραὶ βγ, εζ, ἀντὶ ὕψους ληφθῶσιν, ἔσαι τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα αβγ : δεζ, ὡς αἱ λοιπαὶ πλευραὶ αβ : δε, ἢ ὡς ΑΗ : ΔΘ (§. 473.). Ἄρα καὶ ΑΒΓ : ΔΕΖ = ΑΗ : ΔΘ.

Σχ. 103. Καὶ περὶ τῶν τριγώνων δὲ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τῶν ἐπὶ ἴσων βάσεων, τὰ αὐτὰ ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται, ἐὰν ἀντὶ τῶν παραλληλογράμμων τρίγωνα ὀρθογώνια συσταθῇ τὰ αβγ, δεζ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 104. §. 475. Ὁ τῶν παραλληλογράμμων λόγος καὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ : αβγ, σύγκειται ἔκ τε τοῦ λόγου τῶν βάσεων ΒΓ : βγ, καὶ τοῦ τῶν ὑψῶν ΑΗ : αη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὑπὲρ τῶν παραλληλογράμμων, παραλληλογράμμου τρίτου προσληφθέντος τοῦ ΔΕΖ, οὗ τὸ μὲν ὕψος ΔΕ ἴσον ᾖ τῷ ὕψει ΑΗ, ἡ δὲ βάσις ΕΖ = βγ, ἔσται· ΑΒΓ : ΔΕΖ = ΒΓ : βγ (§. 473.).
καὶ ΔΕΖ : αβγ = ΑΗ : αη (§. 474.).

Ἄρα ΑΒΓ : αβγ σύγκειται πάντως ἐκ τῶν λόγων, ΒΓ : βγ, καὶ ΑΗ : αη (§. 166.).

Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν τριγώνων ὡσαύτως δειχθήσεται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ παραλληλογράμμου ληφθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 476. Καὶ δι' ἀριθμῶν ἄρα δηλουμένων τῶν λόγων οὓς αἱ βάσεις τε καὶ τὰ ὕψη ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὁ τῶν παραλληλογράμμων ἢ τριγώνων παραστήσεται λόγος, ἐὰν ᾖ δέον οἱ ἀριθμοὶ δι' ἀλλήλων ἐπιπολλαπλασιασθῶσιν (§. 178.)· οἷον ἔστω ΒΓ : βγ = 3 : 5 καὶ ΑΗ : αη = 4 : 7. Καὶ ἔσται ΑΒΓ : αβγ = 3 × 4 : 5 × 7 = 12 : 35. Εἴτε περὶ τῶν τριγώνων ὁ λόγος εἴη, εἴτ' οὖν καὶ περὶ τῶν παραλληλογράμμων.

ΠΟΡΙΣΜΑ

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 477. Ἐὰν δὲ γραμμὴ εὐθεῖα ζητῆται Φ, ἧς, πρὸς εὐθεῖαν ἄλλην δεδομένην, ἢ κατὰ τὸ δοκεῖν προσληπτέαν Π, ὁ λόγος εἴη ἴσος τῷ λόγῳ παραλληλογράμμου πρὸς παραλληλόγραμμον, ἢ τριγώνου πρὸς τρίγωνον· γινέσθω (§. 410.),

$$\mathrm{B\Gamma} : \beta\gamma = \Pi : \mathrm{X}.$$
$$\text{καὶ } \mathrm{AH} : \alpha\eta = \mathrm{X} : \Phi.$$

Καὶ ἔσται ἡ προσληφθεῖσα Π, πρὸς τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν Φ, ὡς ΑΒΓ πρὸς αβγ. Ἐὰν οὖν προσληφθῇ $\Pi = \mathrm{B\Gamma}$, ἔσται $\mathrm{X} = \beta\gamma$. Ἡ δὲ Φ, ἡ τετάρτη ἀνάλογος, πρὸς τὰς ΑΗ, αη, καὶ βγ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 478. Κἀντεῦθεν ἐὰν ᾖ $\mathrm{B\Gamma} : \beta\gamma = \alpha\eta : \mathrm{AH}$· τουτέστιν ἐὰν τὰ τῶν παραλληλογράμμων, ἢ τριγώνων ὕψη, πρὸς τὰς βάσεις ἀντιπεπονθότα ᾖ, τὰ παραλληλόγραμμα ἴσα ἔσται (§. 186.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 489. Καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ τετραγώνου ΔΕΖ, μέση ἀνάλογος ᾖ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓ, τῷ ὀρθογωνίῳ τὸ τετράγωνον ἴσον ἔσται. Ἔστι γὰρ τούτου τεθέντος $\mathrm{A}\beta : \Delta\mathrm{E} = \mathrm{EZ} : \mathrm{B\Gamma}$· τουτέστιν ἀντιπεπόνθασι τὰ ὕψη ταῖς βάσεσιν. Σχ. 105.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε.

§. 490. Ἐντεῦθεν καὶ τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ, ἢ οἱῳδηποτοῦν παραλληλογράμμῳ, τετράγωνον ἴσον συσταθήσεται· ληφθείσης ἀντὶ πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου εὐθείας, ἥτις ἂν τῆς ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ βάσεως καὶ τοῦ ὕψους, μέση εἴη ἀνάλογος (§. 452.). Τῷ δὲ τριγώνῳ τετράγωνον ἴσον τεθήσεται, ἐὰν εἰς πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ληφθῇ εὐθεῖα, ἥτις ἂν τῆς τοῦ τριγώνου ἡμιβάσεως, καὶ τοῦ ὕψους μέση εἴη ἀνάλογος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛʹ.

§. 481. Ἐὰν ᾖ τῶν παραλληλογράμμων, ἢ τῶν τριγώνων τὰ ὕψη ὡς αὐτῶν αἱ βάσεις, ἔσται τὰ παραλληλόγραμμα, ἢ τὰ τρίγωνα, ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν βάσεων, ἢ τῶν ὑψῶν αὐτῶν (§. 167.). Πάντα ἄρα τὰ τετράγωνα ἐστὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν ἰδίων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

Σχ. 106. §. 482. Τῶν ἴσων παραλληλογράμμων, ἢ τριγώνων αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη ἀντιπεπόνθασι· τουτέστιν ἐὰν ΑΒΓ = αβγ, ἔσται ΒΓ : βγ = αη : ΑΗ (§. 187.)· ἐστὶ γὰρ ἐνταῦθα ὁ λόγος ὁ σύνθετος, ἐκ τῶν λόγων ΒΓ : βγ, καὶ ΑΗ : αη, λόγος ἰσότητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 107. §. 483. Ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ἀπὸ ΒΓ, τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶ τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ΒΑ, καὶ ΑΓ, ἅμα ληφθεῖσιν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Συνεστώτων τῶν τετραγώνων ΒΔΕΓ, ΑΖ καὶ ΑΗ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἀχθήτω ΑΘ κάθετος πρὸς τὴν ΒΓ, ἥτις δὴ προεκβληθεῖσα ἕως ἐπὶ τὸ Κ, διελεῖ τὸ ΒΕ τετράγωνον, εἰς ὀρθογώνια δύο, τὸ μὲν ΒΔΚΘ, τὸ δὲ ΘΚΕΓ. Ἔστι δὲ ΒΘ : ΒΑ = ΒΑ : ΒΓ, ἢ ΒΔ. Καὶ ΘΓ : ΓΑ = ΓΑ : ΒΓ, ἢ ΓΕ (§. 452.). Τὸ ἄρα τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΑ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΒΔΚΘ. Καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ΑΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΘΚΕΓ (§. 479.). Διὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, ΑΖ + ΑΗ, ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ὀρθογωνίων, ἢ τῷ τετραγώνῳ ΒΔΕΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 484. Ἐντεῦθεν εὑρεθήσεται τετράγωνον, τὸ δυσὶ τοῖς δοθεῖσι τετραγώνοις ἴσον, ᾧπερ ἔπειτα ὁποιονοῦν τετράγωνον ἕτερον προστεθεῖναι δύναται, καὶ τούτῳ αὖθις ἕτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ τετράγωνον προκύψῃ, τὸ ἅπασι τοῖς δοθεῖσιν ὁποσοισοῦν ἴσον. Ἐὰν γὰρ τὰ δύο πρῶτα τετράγωνα ἢ ΑΖ, ΑΗ, συναφθεισῶν πρὸς ὀρθὴν τῶν ἐπ' αὐτοῖς πλευρῶν, ἀχθήσεται ἡ ΒΓ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ τοῖς δυσὶν ἐκείνοις ἅμα ληφθεῖσιν ἴσου. Τεθείσης δὲ τῆς δε τῆς πλευρᾶς ἀντὶ τῆς ΑΓ, καὶ ἀντὶ τῆς ΑΒ πλευρᾶς τινος προσληφθείσης ἑτέρας, ἑνὸς τῶν συντεθεισομένων τετραγώνων, ἤτοι τοῦ τρίτου, προελεύσεται ἀντὶ τῆς ΒΓ, ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ τοῖς τρισὶν ἅμα ληφθεῖσιν ἴσου. Οὕτω τοίνυν προϊοῦσι, παρέσαι τέως τὰ δοθέντα τετράγωνα, εἰς τετράγωνον ἓν συναγαγεῖν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 485. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οὗ πλευρὰ ἡ ΑΒ, ἀφελεῖν δέῃ τετράγωνον οὗ πλευρὰ ΓΔ· ζητῆται δὲ ἡ πλευρὰ τετραγώνου τοῦ τῷ λοιπῷ ἴσου· ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικυκλίου καταγραφέντος, προσηρμόσθω τῇ περιφερείᾳ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ὑποτείνουσα ἡ ΑΕ = ΓΔ, καὶ ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΕΒ ἔσαι ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ ζητουμένου· τὸ γὰρ ἀπὸ ταύτης τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ, τὸ ἄθροισμα παρέχεται, ὃ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί. (§. 379.). Σχ. 108.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 486. Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν πλευρῶν, τῶν μεταξὺ, ἢ ἀπεναντίον τῶν ἴσων γωνιῶν κειμένων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 109. 110. Ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, αβγ, εἰσὶν αἱ γωνίαι Β, β, καὶ Γ, γ ἴσαι. Ἐὰν οὖν ληφθῶσιν ΒΓ, βγ ὡς βάσεις, καταχθεισῶν ἐπ' αὐτὰς καθέτων, εἰς δήλωσιν τῶν ὑψῶν ΑΔ, αδ, ἔςαι καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, αβδ ὅμοια, καὶ ΑΔΓ, αδγ (§. 416.). Ἔνθεντοι καὶ ΒΔ : βδ = ΑΔ : αδ. Καὶ ΔΓ : δγ = ΑΔ : αδ· ὅθεν καὶ ΒΔ + ΔΓ : βδ + δγ = ΑΔ : αδ· ἢ ΒΔ − ΔΓ : βδ − δγ = ΑΔ : αδ (§. 173.). Τοιγαροῦν ἑκατέρωσε ΒΓ : βγ = ΑΔ : αδ. Τουτέςι τὰ τῶν τριγώνων ὕψη ἔςαι, ὡς τούτων αὐτῶν αἱ βάσεις. Καὶ τὰ ἄρα τρίγωνα, ἐν λόγῳ ἔςαι διπλασίονι τῶν βάσεων, ἢ γοῦν τῶν πλευρῶν ΒΓ, βγ, τῶν ἐν ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκειμένων (§. 481.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 111. §. 487. Ἅπαντα τοίνυν τὰ ὅμοια σχήματα, ΑΒΓΔ, αβγδ, εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν εὐθειῶν ΑΒ : αβ, ἢ ΑΓ : αγ, τῶν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ὁμοίως θέσεως ἐχουσῶν. Διαιρεθέντων γὰρ τῶν σχημάτων (§. 432.) εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἔςαι ὁ λόγος ἑκάςου τῶν τριγώνων τῶν ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ, πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἐκείνῳ ὅμοιον, τὸ ἐν τῷ σχήματι αβγδ, διπλασίων τοῦ λόγου Αβ : αβ, ἢ ΑΓ : αγ. Ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ἁπάντων τῶν ἐν τῷ πρώτῳ σχήματι, τουτέςιν αὐτὸ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ, ἤτοι πρὸς τὸ αβγδ, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔςαι (§. 174.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 488. Ἔσονται ἄρα τὰ ὅμοια σχήματα, ἐν διπλασίονι λόγῳ καὶ τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐπιζευγνυουσῶν οἱαδήποτε σημεῖα, τὰ ἐν τοῖς σχήμασιν αὐτοῖς

ὁμοίως

ὁμοίως ἔχοντα θέσεως· οἷαι δὴ παρὰ τὰς ΑΓ, αγ, καὶ ἄλλαι εἰσὶν ἀπειράριθμοι (§. 437.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 489. Τὰ κανονικὰ ὅμοια σχήματα, καὶ τούτων ἔτι τὰ μέρη τὰ ὅμοια, εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν κύκλων, τῶν οἷς ἐκεῖνα ἐγγράφεται, ἢ περὶ οὓς περιγράφεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 490. Οἱ δὲ κύκλοι εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ἡμιδιαμέτρων. Καὶ ὡσαύτως δὲ, καὶ οἱ τομεῖς οἱ ὅμοιοι, καὶ τὰ τμήματα τὰ ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 491. Εἰσὶ δ' οἱ ὅμοιοι τομεῖς, καὶ τὰ ὅμοια τμήματα, ἐν διπλασίονι λόγῳ καὶ τῶν τὰ ἐκείνων τόξα ὑποτεινουσῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ.

§. 492. Ὁ δὲ διπλασίων λόγος τοῦ λόγου ὡντινωνοῦν εὐθειῶν Α καὶ Β, ἐπείπερ ἀείποτε τῷ λόγῳ τῶν τετραγώνων ἴσος ἐστὶν, ὧν αἱ τοιαίδε εὐθεῖαι εἰσὶ πλευραὶ (§. 481.)· ἔσται δὴ καὶ πάντα τὰ ὅμοια σχήματα, ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπ' αὐτοῖς πλευρῶν, ὧν ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσίν· αἵτε κύκλοι ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῶν, ἢ τῶν ἡμιδιαμέτρων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 493. Δυοῖν δοθέντων σχημάτων ὁμοίων, ὁμοιόν τε, καὶ ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον, σχῆμα προσαναγράψαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 112. Δεδόσθω σχήματα ὅμοια τὰ ΑΒΓΔ, αβγδ, ἃ τὸν εἰρημένον τρόπον συνάψαι δέον· ληφθεισῶν οὖν, τῶν, αἵπερ ἂν τύχοιεν, ἐπὶ τοῖς σχήμασι πλευρῶν ΑΒ, αβ, τῶν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὁμοίως θέσεως ἐχουσῶν, συνεστάσθω ἐξ αὐτῶν τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΕΖΗ, ἐν ᾧ ΕΖ = ΑΒ, καὶ ΖΗ = αβ. Ἐπὶ δὲ δὴ τῆς μεγίστης τοῦδε τοῦ τριγώνου πλευρᾶς ΕΗ, συνεστάσθω σχῆμα τὸ ΕΗΘΙ, ἑνὶ τῶν δοθέντων ΑΒΓΔ ὅμοιον, ὥστε τὴν ΕΗ πλευρὰν πρός γε τὰς τοῦδε τοῦ σχήματος γωνίας, τὰς ἴσας ταῖς τοῦ ΑΒΓΔ, οὕτω θέσεως ἔχειν, ὡς ἡ ΑΒ κεῖται πρὸς αὐτὰς τὰς ἴσας γωνίας τὰς ἐπ' αὐτῷ. Καὶ ἔσται ἄρα τὸ ΕΘ = ΑΓ + αγ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τετραγώνου, ὧδέ πως $ΑΒ^τ$ ἐπισημειουμένου, ὑποσημαίνοντος δὲ καὶ τοῦ $αβ^τ$, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αβ τετράγωνον, ἔσται $ΑΒ^τ : αβ^τ = ΑΓ : αγ$ (§. 492.). Ἔνθεν τοι $Αβ^τ + αβ^τ : ΑΒ^τ = ΑΓ + αγ : ΑΓ$ (§. 171.). Ἐπειδὴ τοίνυν ΕΖ = ΑΒ, καὶ ΖΗ = αβ· καὶ $ΕΖ^τ + ΖΗ^τ = ΕΗ^τ$ (§. 483.)· ἔσται καὶ $ΑΒ^τ + αβ^τ = ΕΗ^τ$. Καὶ $ΕΗ^τ : ΑΒ^τ = ΑΓ + αγ : ΑΓ$. Ἀλλὰ καὶ $ΕΗ^τ : ΑΒ^τ = ΕΘ : ΑΓ$ (§.492.). Ἄρα καὶ $ΕΘ : ΑΓ = ΑΓ + αγ : ΑΓ$, καὶ $ΕΘ = ΑΓ + αγ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 494. Παραπλησίως καὶ κύκλος δυσὶ κύκλοις ἴσος συνίσταται, ἀντὶ τῶν πλευρῶν, ἢ τῶν διαγωνίων, παραλαμβανομένων τε καὶ ζητουμένων τῶν διαμέτρων καὶ ἡμιδιαμέτρων. Τῇ δὲ ἐπαναλήψει τῆς κατασκευῆς παραχθήσεται δὴ καὶ κύκλος, ὁ ὅσοις ποτ' οὖν δοθεῖσιν ἅμα ἴσος. Ἐξ ὧν οὐ δυσχερῶς καὶ ὁ τρόπος ἐκπορισθήσεται, τοῦ καὶ τῶν δοθέντων

ὁμοίων

ὁμοίων σχημάτων τῇ διαφορᾷ, σχῆμα ἴσον κατασκευάζειν ἐν ὁμοιότητι (§. 485.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 495. Ἡμικυκλίου ζητουμένου, δυσὶ τοῖς δοθεῖσιν ἡμικυκλίοις ΑΒΓ, ΓΔΕ ἴσου, ἐὰν αἱ τούτων διάμετροι ΑΓ, ΓΕ πρὸς ὀρθὴν γωνίαν συναφθῶσιν, ἡ ἐπιζευγνῦσα αὐτὰς ΑΕ, ἡ τοῦ ζητουμένου ἔσαι διάμετρος. Ἡ δὲ τοῦ περὶ τήνδε τὴν διάμετρον καταγραφομένου ἡμικυκλίου περιφέρεια, διὰ τῆς κορυφῆς Γ τῆς ὀρθῆς γωνίας διήξει (§. 379.). Καὶ ἔσαι οὕτω τῷδε τῷ ἡμικυκλίῳ, καὶ τοῖς δυσὶν ἐλάττοσιν ἡμικυκλίοις κοινὰ τὰ τμήματα ΑΖΓ, ΓΗΕ. Καὶ ἐὰν ἄρα ταῦτα, ἔνθεν μὲν ἀπὸ τῶν ἡμικυκλίων ΑΒΓ, ΓΔΕ, ἔνθεν δὲ ἀπὸ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΕ τοῦ ἐκείνοις ἴσου, ἀφαιρεθῇ, ὑπολειφθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν μηνίσκων ΑΒΓΖ + ΓΔΕΗ = τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ. Καὶ τόδε ἡμῖν περίεσι παράδειγμα πάντη Γεωμετρικῶς τοῦ τετραγωνισμοῦ σχήματός τινος καμπυλογράμμου. Ἐὰν δὲ αἱ διάμετροι ΑΓ, ΓΕ ἴσαι ληφθῶσιν, ὡς τὰ ΑΖΓ. ΓΗΕ τεταρτημόρια τυγχάνειν, οἱ μηνίσκοι ἀλλήλοις ἴσοι γενήσονται, ἑκάτερός τε τούτων χωρὶς, ἴσος ἔσαι τῇ ἡμισείᾳ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ· τουτέσι τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμίσεια ἡ ΑΓΕ, ἐγγράφοιτο. Σχ. 113.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 496. Δυοῖν δοθέντων ἐπιπέδων σχημάτων εὐθυγράμμων ἀνομοίων Α καὶ Β, τρίτον Χ συσήσασθαι θατέρῳ μὲν τῷ Α ἴσον, θατέρῳ δὲ τῷ Β ὅμοιον.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν Α καὶ Β εἰς τρίγωνα πρῶτον (§. 466.) εἶτα εἰς τετράγωνα (§. 480.) ἀμειφθέντων, ἔσω Μ πλευρὰ

πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἴσου τῷ Α, καὶ Ν τοῦ ἴσου τῷ Β. Καὶ πλευρᾶς οὖν ἐκ τῶν τοῦ Β ληφθείσης ὁποιασοῦν τῆς Π, γινέσθω $N : M = \Pi : T$· παρὰ δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν Τ, ὡς ὁμόλογον τῇ Π, σχῆμα ὅμοιον συνεστάσθω τῷ Β (§. 424.). Ἔσται δὲ τὸ ζητούμενον Χ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $M^\tau = A$, καὶ $N^\tau = B$, ἐστιν $A : B = M^\tau : N^\tau$. Ἐπεὶ δὲ Β καὶ Χ ὅμοια, καὶ ἐπ' αὐτῶν Π, Τ πλευραὶ ὁμόλογοι· ἔσονται (§. 487.) $B : X = \Pi^\tau : T^\tau$· ὁ μὲν οὖν λόγος $A : X$, ἐκ τῶν λόγων $A : B = B : X$ συγκείμενος, καὶ ἐκ τῶν $M^\tau : N^\tau$, καὶ $\Pi^\tau : T^\tau$ συγκείσεται. Ἀλλ. $N : M = \Pi : T$. Ἄρα καὶ $N^\tau : M^\tau = \Pi^\tau : T^\tau$· ὁ δὲ λόγος $\Pi^\tau : T^\tau$ τῷ ἀνάπαλιν τοῦ λόγου $M^\tau : N^\tau$ ἴσος ἔσται (ἤτοι τῷ $N^\tau : M^\tau$). Ἔσται ἄρα ὁ ἐκ τῶνδε τῶν λόγων $M^\tau : N^\tau$ καὶ $\Pi^\tau : T^\tau$ συγκείμενος λόγος $A : X$, λόγος ἰσότητος (§. 186.) καὶ $X = A$.

ΤΜΗΜΑ