ΤΜΗΜΑ ΕΚΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ
ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ
ΚΥΚΛΟΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 439.

Σχ. 84. 85. Ἐὰν διὰ τοῦ Α σημείου, τοῦ ἤτοι ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐκτὸς, ὡς ἔτυχε ληφθέντος εὐθεῖαι δύο ἀγόμεναι, τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε προσπίπτωσιν, ἔσται ΑΒ : ΑΔ = ΑΕ : ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΒΕ, ΔΓ, ἔσονται αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ΒΓΔ, ΒΕΔ, ὡς ἐπὶ τόξῳ τῷ αὐτῷ ΔΒ βεβηκεῖαι, ἀλλήλαις ἴσαι (§. 377.). Ἐπεὶ τοίνυν καὶ αἱ πρὸς τῷ Α γωνίαι τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΑΔΓ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὰ τρίγωνα ὅμοια ἐστί (§. 416.)· καὶ ΑΒ : ΑΔ = ΑΕ : ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 440. Εἰσὶν ἄρα αἱ ΑΔ, ΑΕ τῶν ΑΒ, ΑΓ μέσαι ἀνάλογοι. Τοῦ δὲ σημείου Α ἐκτὸς μὲν τοῦ κύκλου πίπτοντος, ἡ τούτων διαφορὰ, ἐντὸς δὲ, τὸ τούτων ἄθροισμα, ἴσον ἐστὶ τῇ ὑποτεινούσῃ ΔΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 85. 86. §. 441. Τοῦ δὲ Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου πίπτοντος, ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ ΔΕ ἀπομειοῦται, τῆς κατὰ τὸ Α

γωνίας

γωνίας ἐπαυξανούσης, ἀναιρεῖται δὲ πάμπαν τῆς ΑΔ τοῦ κύκλου ἐφαπτομένης (§. 373.). Ἐνταῦθα δὲ δὴ εἰς ταυτὸ συνιόντων τῶν σημείων Δ καὶ Ε, γίνεται ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ· ἤτε ΑΔ μέση ἔσται ἀνάλογος τῶν ΑΒ, καὶ ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 442. Τοῦ δέ τοι Α ἐντὸς πίπτοντος τοῦ κύκλου, Σχ. 84.
δυνατὸν τὴν ΔΕ οὕτως ἀχθῆναι, ὥστε κατὰ τὸ Α 87.
διχῆ τεμνομένην, παρέχειν τὴν ΔΑ = ΑΕ. Κἀνταῦθα οὖν ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΔ = ΑΕ : ΑΓ, εἰς τήνδε τραπήσεται ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ· ὡς εἶναι καὶ οὕτως αὖθις τὴν ΑΔ, τῶν ΑΒ, ΑΓ μέσην ἀνάλογον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 443. Δυεῖν δοθεισῶν εὐθειῶν φ καὶ ρ, δύο ἄλλας προσευρεῖν ἐν ἐκείναις μέσας ἀνάλογον, ὧν ἡ διαφορὰ ἡ δεδομένη π.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι δύο πέρατος ἄτερ, πρὸς Σχ. 88.
ὀρθὰς τεμνόμεναι. Ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς τομῆς Α, ἐπὶ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τεθείσθω ΑΒ = π, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας ΑΓ = φ, καὶ ΑΔ = ρ· αὗται δηλαδὴ ἐπὶ τὰ πρὸς ἀλλήλας ἀντίθετα. Δίχα οὖν τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε, ἤτε ΓΔ κατὰ τὸ Ζ· καὶ πληρούσθω δὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ. Καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΓ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω, ἡ καὶ διὰ τοῦ Δ διήξουσα, καὶ τὴν ΑΒ προεκβληθεῖσαν τέμνουσα κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ Κ. Καὶ ἔσονται οὖν αἱ ΑΘ, καὶ ΑΚ αἱ ζητούμεναι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ΗΕ ἀπὸ τοῦ κέντρου, κάθετος ἐφίσταται ἐπὶ τὴν ΘΚ ὑποτείνουσαν, ἐστὶ ΘΕ = ΕΚ. (§. 359.)

(§. 359.). Ἀλλὰ καὶ ΕΒ = ΕΑ. Ἄρα ΘΛ = ΒΚ. Ἡ ἄρα τῶν ΑΚ, ΒΚ εὐθειῶν διαφορὰ ΑΒ ἢ π, ἡ αὐτὴ ἔσαι τῇ τῶν εὐθειῶν ΑΚ, ΛΘ. Ἔσι δὲ παρὰ ταῦτα καὶ ΑΓ : ΑΘ = ΑΚ : ΛΔ (§. 439.)· τουτέσι, φ : ΑΘ = ΑΚ : ρ. Γέγονεν ἄρα τὸ προβληθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 444. Ἐὰν ΑΘ ῥηθῇ χ, ἔσαι ΑΚ = $\chi + \pi$, καὶ ἡ ἀναλογία οὕτως ἐκτεθήσεται $\varphi : \chi = (\chi + \pi) : \rho$. Ἐὰν δὲ ΑΚ ῥηθῇ χ, ἔσαι ΛΘ = $\chi - \pi$, καὶ ἡ ἀναλογία οὕτω καταγραφήσεται, $\varphi : (\chi - \pi) = \chi : \rho$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 445. Ἐὰν δὲ ᾖ $\varphi = \rho$, ἔσαι ΑΓ = ΑΔ, καὶ τόγε τοῦ κύκλου κέντρον πεσεῖται κατὰ τὸ Ε. Ἐὰν δὲ ἡ διαφορὰ π, ἤτοι ἡ ΑΒ ἐκλίπῃ, πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ τῶν ἐν τῷ Α΄. πορίσμ. ἀναλογιῶν, εἰς τήνδε $\varphi : \chi = \chi : \rho$ μεταβαλουσῶν, ἔσαι χ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν φ καὶ ρ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 446. Ἐὰν ἑκάση τῶν τριῶν εὐθειῶν π, φ, ρ, ἴση ληφθῇ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ α, ἡ ὑποτεθεῖσα δίδοσθαι (§. 444.) ἀναλογία $\varphi : \chi = (\chi + \pi) : \rho$, ἀμειφθήσεται εἰς ταύτην $\alpha : \chi = (\chi + \alpha) : \alpha$. Ἐν ᾗ χ = ΑΘ. Τοιγαροῦν ἡ ΑΘ, εἴτ᾽ οὖν ἡ χ, ἴσων ληφθῶσιν ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ = α, ἀεὶ εὑρεθῆναι δυνήσεται. Ἀφαιρεθέντων δὲ τῶν ὅρων τοῦ λόγου $\alpha : \chi$, ἀπὸ τῶν ὅρων τοῦ λόγου $(\chi + \alpha) : \alpha$ τοῦ αὐτῷ ἐκείνῳ ἴσου, ἐπειδὴ ὁ λόγος τροπὴν οὐχ ὑφίσαται (§. 173.), ἔσαι $\alpha : \chi = \chi : \alpha - \chi$. Ἐν ᾗ δὴ ἀναλογίᾳ χ καὶ $\alpha - \chi$, μέρη εἰσὶ τῆς δοθείσης α. Ἔσιν ἄρα τὸ ὅλον α, πρὸς τὸ οὕτως εὑρεθὲν μέρος χ, ὡς αὐτὸ τοῦτο τὸ μέρος χ, πρὸς μέρος θάτερον $\alpha - \chi$ τοῦ αὐτοῦ ὅλου α. Τοῦτο δὲ ἐσὶ γεωμετρικῶς φράσασι, τὸ τὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α, ἄκρον τε καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. Ἔστι δὲ, ὅτι $\alpha > \chi$, ἐξ ἀνάγκης καὶ $\chi > \alpha - \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 447. **Δυεῖν δοθεισῶν εὐθειῶν φ καὶ ϱ, ἑτέρας δύο ἐν ἐκείναις μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν, ὧν τὸ ἄθροισμα διδόμενον εἴη π.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι τέρματος ἄνευ, πρὸς ὀρ- Σχ. 89.
θὰς ἀλλήλας τέμνουσαι. Ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου καθ' ὃ τέμνονται Α, τιθέσθω ἐπὶ μὲν τούτων τῆς ἑτέρας ἡ $ΑΒ = \pi$, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας ἡ $ΑΓ = \varphi$, καὶ $ΑΔ = \varrho$· ἀμφότεραι δηλονότι αὗται ἐπὶ μέρη τὰ αὐτά. Καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μὲν ΑΒ κατὰ τὸ Ε, ἡ δὲ ΓΔ κατὰ τὸ Ζ. Πληρωθέντος δὲ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΗ, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΓ, κύκλου γεγράφθω περιφέρεια, ἡ διελευσομένη καὶ διὰ τοῦ Δ. Αὕτη μὲν οὖν ἐὰν καὶ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τέμῃ κατὰ τὰ Θ καὶ Κ, ἔσονται αἱ ΑΘ, καὶ ΑΚ αἱ ζητούμεναι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ΗΕ ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν κύκλον κέντρου Η ἐπὶ τῆς ΘΚ ἐφέστηκε κάθετος, ἔστι $ΘΕ = ΕΚ$. Ἀλλὰ καὶ $ΕΑ = ΕΒ$. Ἄρα καὶ $ΑΘ = ΚΒ$. Ἐπειδὴ δὲ τῶν ΑΚ, ΚΒ ἄθροισμα ἡ ΑΒ, ἔσται ἡ αὐτὴ ΑΒ, ἤτοι ἡ π, ἄθροισμα ὡσαύτως καὶ τῶν ΑΘ, ΑΚ. Ἔστι δὲ παρὰ ταῦτα $ΑΓ : ΑΘ = ΑΚ : ΑΔ$ (§. 439.) τουτέστι, $\varphi : ΑΘ = ΑΚ : \varrho$. Γέγονεν ἄρα τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 448. Ἐὰν ΑΘ ῥηθῇ χ, γίνεται $ΑΚ = ΘΒ = \pi - \chi$· ἡ δὲ ἀναλογία ὧδε ἐκδηλωθήσεται $\varphi : \chi =$

$(\pi - \chi) : \rho$. Οὐδέτι ἐνταῦθα τὸ σιώολον τραπήσεται ἐὰν καὶ ΑΚ ῥηθῇ χ. Καὶ γὰρ καὶ οὕτως ΑΘ γίνεται $\pi - \chi$, ἥτε ἀναλογία, $\phi : (\pi - \chi) = \chi : \rho$ οὐδέντι πλέον, ἢ τῇ ἐναλλὰξ τῶν μέσων ὅρων μεταθέσει, τῆς προτέρας διαφέρουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 449. Ἐὰν δὲ ἡ $\phi = \rho$, ἐκλιπούσης τῆς ΓΔ, ἡ ΑΔ ἐφάψεται τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς ΗΖ διαμέτρου προεκβαλλομένης, τῶν λοιπῶν ἁπάντων σωζομένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 450. Ἐὰν δὲ αἱ ΑΓ καὶ ΑΔ ἐπίσης ἐπαύξωσιν, ἀφισαμένου τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΑ, τὰ σημεῖα Θ, Κ, ἀμοιβαδὸν ἀλλήλοις προσεγγιοῦσι, τῆς ὑποτεινούσης ΘΚ ὑπομειουμένης, καὶ τῶν ΓΑ, ΔΑ, ἐπιμεγεθυνομένων, ὥστε τὰ σημεῖα τέως εἰς ταυτὸ συμπεσεῖν ἐκεῖνα τῆς ΘΚ ἀποιχομένης. Τηνικαῦτα δὲ μίατις εὑρεθήσεται ἡ μεταξὺ ΑΓ, καὶ ΑΔ μέση ἀνάλογος· ἡ δὲ, ἴση ἔσται τῇ ΖΗ. Τὸ δ' ἀπ' ἐντεῦθεν, ἐὰν αἱ ΔΑ, ΓΑ προσεπαυξηθῶσιν, ἡ ΑΒ οὐδὲ ἐφάψεται ὅλως τοῦ κύκλου, ἀλλ' ἔσονται αἱ ΑΘ, ΑΚ, μεταξὺ τῶν δύο ΑΓ καὶ ΑΔ, μέσαι ἀνάλογοι, ὧν ἂν τὸ ἄθροισμα εἴη τὸ ΑΒ, ὅλως ἀδύνατοι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 451. Ὑπὲρ ἀριθμὸν ἐστὶ τὰ διὰ τῶν μέσων τούτων (§. 443. 447.) ἐπιλυόμενα προβλήματα, διὸ οὐδὲ παρελθεῖν ἔδοξεν ἡμῖν ἐνταῦθα τὸν τρόπον τῆς αὐτῶν εὑρέσεως. Ἀλλ' ἄλλοις μὲν ἄλλως τὸ πρᾶγμα τελεῖται, καίτισιν οὕτω καὶ προβάλλεται, ὡς αὐτὰ ταῦτα τυγχάνειν τὰ προτεθέντα χαλεπὸν εἶναι καὶ συμβαλέσθαι· ἡ μέντοι μέθοδος ἧπερ αὐτοὶ ἐχρησάμεθα προβαλόμενοίτε καὶ ἐπιλυσάμενοι, ἁπασῶν ἡμῖν ἔδοξεν εἶναι ἡ ἁπλουστάτη.

ΠΡΟΒΛΗ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 452. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τὴν μέσην ἀνάλογον ἐπιτομώτερον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπ' εὐθείας τῶν δοθεισῶν ΑΒ καὶ ΒΓ κειμένων, ἡμικυκλίου τε ἐπὶ τῆς ΑΓ καταγραφέντος, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῆς ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης, ἔσαι ΑΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΓ. Σχ. 90.

Ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι ὦσιν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ πέρατος Α ἠγμέναι ΑΒ, ΑΓ, τῶν αὐτῶν γινομένων ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἔσαι ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπιζευχθείσης τῆς ΔΓ, ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὑπὸ ΑΔΓ ὀρθὴ ἔσαι (§. 378.)· ὀρθαὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Β γωνίαι· ἥτε κατὰ τὸ Α, ἐπὶ ἀμφοῖν τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΑΔΓ κοινή. Ἐπεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ὅμοια, ἔσαι ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ. Ὅ το Β'. ἰῶ.

Ἀλλὰ καὶ τὰ ὀρθογώνια ΑΔΓ, ΔΒΓ, ὅμοια ἐσὶ, διὰ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν κατὰ τὸ Γ. Ἄρα καὶ τὸ ΑΒΔ, τῷ τριγώνῳ ΔΒΓ, ὅμοιον. Καὶ τοίνυν ΑΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΓ· ὅπερ ἰῶ τὸ Α'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 453. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ, ἐπὶ τὴν μεγίστην τῶν πλευρῶν ΑΓ, κάθετος εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ ΔΒ, τὸ τρίγωνον εἰς ἄλλα δύο διαιρεθήσεται ΑΒΔ, ΔΒΓ, καὶ ἀλλήλοις ὅμοια καὶ τῷ ὅλῳ ΑΔΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 454. Πᾶσαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ, ἐν λόγῳ εἰσὶ τῶν περιφερειῶν τῶν ταῖς Σχ. 91.

 αὐτῶν

αὐτῶν μὲν κορυφαῖς Β ὡς κέντροις, τῇ δ' αὐτῇ, ἢ ταῖς ἴσαις ἡμιδιαμέτροις καταγραφομένων, καὶ ὑπὸ τῶν σκελῶν ἐναπολαμβανομένων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔϛωσαν αἱ περιφέρειαι αὗται ΕΖ, ΕΗ. Φημὶ δὴ ὅτι ὑπὸ ΑΒΓ : ΑΒΔ = ΕΖ : ΕΗ. Τῆς γὰρ περιφερείας ΕΗ εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις ὁποσαδήποτε διαιρεθείσης, ἀφ' ἑκάϛυτε τῶν κατὰ τὰς γενομένας διαιρέσεις σημείων, εὐθειῶν ἀχθεισῶν πρὸς τὸ Β, ὑφ' ὧν καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία εἰς ἰσαρίθμυς τε καὶ ἀλλήλαις ἴσας γωνίας διαιρεθήσεται (§. 358.), ἔσονται ἐπὶ τῆς ΕΖ περιφερείας ἐκ τῶν τῦ τόξυ ΕΗ μερῶν τοσάδε, ὁπόσα μέρη τῆς ὑπὸ ΑΒΔ γωνίας, ἔνεϛι τῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ· ὁποσοσῦν ἂν καὶ εἴη ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τῆς ΕΗ. Τοιγαρῦν αἱ γωνίαι πρὸς τὰς περιφερείας ἀνάλογον ἔσονται (§. 152.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 455. Πᾶσα ἄρα γωνία ἔϛι πρὸς τὴν ὀρθὴν, ὡς ἡ ὑπὸ τῶν ἐκείνης σκελῶν καθ' ὅνπερ εἴρηται τρόπον ἐναπειλημμένη περιφέρεια, πρὸς τὸ τεταρτημόριον τὸ ὡσαύτως δὴ καταγεγραμμένον. Πρὸς δὲ δισσὰς ὀρθὰς, ὡς ἡ αὐτὴ ἐκείνη ἐναπειλημμένη περιφέρεια πρὸς τὴν τῦ κύκλυ ἡμιπεριφέρειαν. Διὰ τῦδε δὲ τῦ λόγυ, ὃν ἔχει τὸ τῆς περιφερείας μέρος πρὸς τὸ τεταρτημόριον αὐτῆς, ἢ τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ ὅλον, πᾶσα ἂν γωνία δοθείη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 456. Κἀντεῦθεν τὸ τόξον, ἤτοι τῆς ἀπὸ τῦ κορυφαίυ τῆς γωνίας σημείυ, ὡς ἀπὸ κέντρυ καταγραφομένης περιφερείας, τὸ ἐν τοῖς σκέλεσιν ἐναπειλημπειλημμένον μέρος, Μέτρον τῆς γωνίας εἶναι λέγεται. Τοῦ γὰρ τόξου οὕτω καταγραφέντος, ὁ τούτου πρὸς τὸ τεταρτημόριον, ἢ ὁ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος, ὅσον ἄλις ἐπ᾽ ἀκριβὲς ἔχει λαμβάνεσθαι, ἐὰν τὸ τεταρτημόριον εἰς μέρη ἴσα, ὅσον τε ἀπόχρη βραχέα ἐπιδιαιρεθῇ, καὶ τούτων δὴ τὸ τόξον συμπληρωθῇ, ὡς οἷόν τ᾽ ἐπ᾽ ἀκριβές, τῶν μορίων. Δοθέντος δὲ τοῦ λόγου τοῦδε, ἔπειτα καὶ αἱ γωνίαι οὐδέτι χεῖρον δοθήσονται, ἢ αἱ εὐθεῖαι δίδοσθαι εἰώθασι διά τινος μέτρου τοῦ αὐταῖς προσαρμοζομένου. Κυριώτατα δὲ τὸ τόξον καταμετρεῖν οὐχ οἷόν τε τὴν γωνίαν· ἐπεὶ μεγέθη ἄττα ταῦτα τῷ παντὶ ἀλλήλων ἐστὶ διαφέροντα. Οὐ γὰρ ἂν γωνία συντελεσθείη ποτέ, ὁπωσοῦν ἂν τὸ τόξον εἴτ᾽ ἐπαναληφθείη, εἴτε διαιρεθείη· ὁπότε δὴ τὸ κυρίως τε καὶ ἀληθῶς λεγόμενον μέτρον, τῇ αὐτοῦ, ἢ τῶν ἐπ᾽ αὐτῷ μορίων, ἐπαναλήψει τὸ μετρητὸν ἀείποτε ἐκμετρεῖν πέφυκεν. (§. 3.).