ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ

ΕΥΘΕΙΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 400.

Τὸ τετράπλευρον, ὃ δύο τῶν πλευρῶν αἱ ἀπεναντίον, ἴσαι τε εἰσὶ, καὶ παράλληλοι, ἐστὶ παραλληλόγραμμον. Ἐν παντὶ δὲ παραλληλογράμμῳ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 64. Ἀχθήτω ἐπὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἡ διαγώνιος ΑΓ. Ἐὰν οὖν ἡ ΑΔ παράλληλος ᾖ τῇ πλευρᾷ ΒΓ, ἔσται ὑπὸ ΔΑΓ, ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΒ (§. 283.). Ἐνθεντοι καὶ ἐὰν ᾖ ΑΔ = ΒΓ, ἐπὶ τῶν τριγώνων ΔΑΓ, ΑΓΒ, αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπὸ τῶν ἴσων ἔσονται πλευρῶν περιεχόμεναι· ἐκοῦν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ΔΓΑ (§. 316.)· κἀντεῦθεν καὶ ἡ ΑΒ πλευρὰ παράλληλος τῇ ΓΔ (§. 280.).

Ἐὰν δὲ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον ᾖ, παρὰ τὰς εἰρημένας ΔΑΓ, ΑΓΒ, καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΔΓΑ ἔσονται ἴσαι· κἀντεῦθεν ἐπὶ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ ἡ πλευρὰ ΑΔ ἴση τῇ ΒΓ· καὶ ΑΒ = ΓΔ (§. 320.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 65. §. 401. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἐκ μορίων σύνθετος ᾖ ἀλλήλοις ἴσων· τῇ δ' ΑΓ ὁπωσοῦν ἀχθείσῃ παράλληλοι γραφῶσιν εὐθεῖαι, ἀφ' ἑκα-

58 τῶν διαιρέντων τὴν ΑΒ σημείων ἑκάςῃ, ἐπὶ δὲ εὐθεῖαν, τὴν ὡς ἔτυχε κειμένην ΓΔ ἅπασαι ἀπαντῶσαι· καὶ αὕτη παραπλησίως ἡ ΓΔ εἰς ἴσα μέρη ὑπ' ἐκείνων τμηθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθήτωσαν αἱ ΓΕ, ΖΗ τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι, καὶ παραλληλόγραμμα πληρώσουσι τὰ ΑΕ, ΘΗ· ἐν οἷς ἐπειδὴ ΓΕ = ΑΘ, καὶ ΖΗ = ΘΙ (§. 400) καὶ ΓΕ = ΑΘ = ΘΙ = ΖΗ. Τῶν δὲ δὴ παραλλήλων ΓΕ, ΖΗ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ΓΔ τεμνομένων, ἔςαι καὶ ὑπὸ ΕΓΖ = ΗΖΛ. Τῆς δ' αὐτῆς ΓΔ, καὶ τὰς παραλλήλους ΘΖ, ΙΛ τεμνούσης, καὶ ὑπὸ ΓΖΕ = ΖΛΗ (§. 282.). Ἐπὶ ἄρα τῶν τριγώνων ΓΕΖ, ΖΗΛ, ἐν οἷς αἵδε αἱ γωνίαι, πρὸς ταῖς ἴσαις πλευραῖς ΓΕ, ΖΗ, τὴν αὐτὴν ἐχήκασι θέσιν, καὶ αἱ πλευραὶ ΓΖ, ΖΛ, ἀλλήλαις ἔσονται ἴσαι (§. 320.). Τὸ δ' αὐτὸ ὡσαύτως δειχθήσεται, καὶ περὶ τῶν λοιπῶν τῆς ΓΔ εὐθείας μερῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 402. Ἐντεῦθεν δὴ, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ Σχ. 66. εἰς μέρη ὁποσαοῦν τοῦ ἀριθμοῦ α, ἀλλήλοις ἴσα διαιρεθήσεται, ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ σημείου Α πέρατος ἑνὸς τῆς ΔΓ, κἂν αὐτῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, εὐθείας, ἧ ἂν πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθείη, τῆς ΑΔ τοσάκις τεθείσης, ὁπόσαι τοῦ ἀριθμοῦ α ἔνεισι μονάδες. Τῶνδε γὰρ τῶν μερῶν ἐὰν τὸ ἔχατον τερματίζηται ἐπὶ τὸ Γ, ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. Ἀχθεισῶν δὲ ἀφ' ἑκάςου τῶν σημειωθέντων σημείων ἐπὶ τῆς ΑΓ, εὐθειῶν παραλλήλων τῇ ΓΒ, ἡ ΑΒ τηνικαῦτα ὥσπερ ἦν προτεθὲν, διαιρεθήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ.67. §. 403. Τριῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐν ἄκροις, δυεῖν ἑτέρων εὐθειῶν τεθεισῶν ΗΘ, ΙΚ, αἱ ὑπὸ τῆς μεσέσης κατὰ τὰ σημεῖα Λ καὶ Μ τμηθήσονται· ἔσαι ΗΛ : ΗΘ = ΙΜ : ΙΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διαιρεθήτω γὰρ ΗΘ εἰς μέρη ἴσα, ὁσαδήποτε τὸν ἀριθμὸν, καὶ ἀχθήτωσαν διὰ τῶν κατὰ τὰ μέρη ἑκάτων σημείων εὐθεῖαι, ταῖς κατ' ἀρχὰς ἀχθείσαις ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ παράλληλοι, αἵτινες προεκβαλλόμεναι καὶ τὴν εὐθεῖαν ΙΚ εἰς μέρη ἀλλήλοις ἴσα τεμῦσιν (§. 401.). Ὁ τοίνυν μέγιςος ἀριθμὸς τῶν τῆς εὐθείας ΗΘ μορίων, τῶν ἐνόντων τῇ ΗΛ, ἀείποτε ἴσος ἔσαι τῷ μεγίςῳ ἀριθμῷ τῶν μορίων τῶν ἀπὸ τῆς ΙΚ, τῶν ἐνόντων τῇ ΙΜ· ὁποσοσῦν ἂν εἴη ὁ τῶν μορίων ἀριθμὸς, ἐν οἷς ὕτω διῃρημέναι εἰσὶν αἱ ΗΘ, ΙΚ. Αἱ ἄρα εὐθεῖαι ΗΛ, ΗΘ, καὶ ΙΜ, ΙΚ, ἀνάλογοι εἰσίν (§. 152.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 404. Τῇ αὐτῇ δείξει κατασκευάζεται ὅτι καὶ ΛΘ : ΗΘ = ΜΚ : ΙΚ. Ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ θεωρήματι ἀναλογίας ΗΛ : ΗΘ = ΙΜ : ΙΚ· ἕπεται ἂν καὶ ὅτι ΗΛ : ΗΘ − ΗΛ = ΙΜ : ΙΚ − ΙΜ (§. 171.) τυτέςιν ΗΛ : ΛΘ = ΙΜ : ΜΚ. Καὶ ἐν γένει ἄρα αἱ εὐθεῖαι, ἢ τὰ μέρη τῶν εὐθειῶν ΗΘ, ΙΚ, τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ παραπλησίως ἔχοντα θέσεως, πρὸς ἄλλα ὁποιαδήποτε τῶν αὐτῶν μέρη εὐθειῶν, τὰ ἐν ταῖς παραλλήλοις καὶ αὐτὰ ὡσαύτως ἔχοντα θέσεως, ἀνάλογον ἐςίν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 405. Ἔνθεντοι ἐὰν ἐν ταῖς παραλλήλοις Σχ. 68.
ΑΒ, ΓΔ, εὐθεῖαι δύο ΑΔ, ΒΓ ἀχθῶσιν, ἀλλήλας πῃ, οἷον κατὰ τὸ Ε, τέμνουσαι, ἔσται ΑΕ : ΑΔ = ΒΕ : ΒΓ. Καὶ ΑΕ : ΕΔ = ΒΕ : ΕΓ. Δύναται γὰρ καὶ τρίτη παράλληλος διὰ τοῦ Ε, ταῖς κατ᾽ ἀρχὰς τεθείσαις ΑΒ, ΓΔ ἀχθῆναι, ὑφ᾽ ἧς ἂν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΒΓ κατὰ τὸ Ε τέμνοιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 406. Οὕτω καὶ ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, Σχ. 69.
μιᾷ τινι τῶν πλευρῶν ΒΓ, παράλληλος εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ ΔΕ, ἀνάλογον γίνονται ΑΔ : ΑΒ = ΑΕ : ΑΓ. Καὶ ΑΔ : ΔΒ = ΑΕ : ΕΓ. Καὶ ΔΒ : ΑΒ = ΕΓ : ΑΓ. Δύναται γὰρ καὶ ταῖς δυσὶ ταύταις ΒΓ, ΔΕ, τρίτη παράλληλος ἀχθῆναι διὰ τοῦ Α, ἑκατέραν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, παρ᾽ αὐτὸ τὸ σημεῖον τέμνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 407. Ἐὰν ᾖ ΑΒ : ΑΔ = ΑΓ : ΑΕ, αἱ Σχ. 70.
ἀγόμεναι ΒΓ, ΔΕ, παράλληλοι ἔσονται. Εἰ γὰρ μή, ἔσω ἡ διὰ Δ εὐθεῖα ΔΖ παράλληλος τῇ ΒΓ. Καὶ ἔσται ΑΒ : ΑΔ = ΑΓ : ΑΖ· ὅπερ ἀνατρέπει τὸ ὑποτεθέν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 408. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τὴν τε- Σχ. 71.
τάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι α, β, γ. Καὶ δὴ γωνίας τῆς τυχούσης ληφθείσης Δ, γινέσθω ΔΕ = α, καὶ ΔΖ = β καὶ ΔΗ = γ, καὶ ἐπεζεύχθω Ε, Η, τὰ πέρατα τῆς πρώτης ΔΕ, καὶ τρίτης ΔΗ. Τῇ δὲ

ΕΗ διὰ Ζ παράλληλος ἀχθήτω ἡ ΖΘ· καὶ ἔσαι ΔΘ ἡ ζητουμένη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ γὰρ τοῦ ΔΖΘ τριγώνου τῇ ΖΘ πλευρᾷ, ἡ ΕΗ παράλληλος ἐσί. Διὸ δὴ ΔΕ : ΔΖ = ΔΗ : ΔΘ τουτέσιν α : β = γ : ΔΘ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 409. Ἐὰν ληφθῇ ΔΗ = ΔΖ, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται ὡσαύτως, εὑρίσκεται πρὸς δύο τὰς δοθείσας α, β, ἡ τρίτη ἀνάλογον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 410. Διὰ τῶν αὐτῶν καὶ εὐθεῖα ἐξευρεθήσεται, ἥτις ἂν ᾖ πρὸς εὐθεῖαν ἄλλην, ἤτοι δοθεῖσαν, ἢ πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθεῖσαν, ἐν λόγῳ συνθέτῳ, ἐξ ὁποσωνοῦν τὸν ἀριθμὸν λόγων, τῶν ἐν γράμμασι δεδομένων. Οἷον ἔσωσαν διδόμενοι λόγοι α : β, γ : δ, ε : ζ, η : θ, κειμένων δηλονότι τῶν γραμμάτων ἀντὶ γραμμῶν. Καὶ δὴ προσληφθείσης (εἰ μὴ δεδομένη τύχοι) πρὸς τὸ δοκοῦν τῆς εὐθείας Α, γινέσθω

$$\alpha : \beta = A : B$$
$$\gamma : \delta = B : \Gamma$$
$$\varepsilon : \zeta = \Gamma : \Delta$$
$$\eta : \vartheta = \Delta : E$$

Καὶ ἔσαι ὁ λόγος Α : Γ, σύνθετος ἐκ τῶν δύο α : β, καὶ γ : δ. Ὁ δὲ λόγος Α : Δ, ἐκ τῶν τριῶν α : β, γ : δ, ε : ζ. Ὁ δὲ λόγος Α : Ε, ἐκ τῶν τεσσάρων α : β, γ : δ, ε : ζ, η : θ. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς (§. 166.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 411. Ἐὰν οἱ λόγοι οὓς δεῖ συνθέσθαι, ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ἔσαι ὁ μὲν λόγος Α : Γ διπλασίων τοῦ α : β.

α : β. Ὁ δὲ Α : Δ, τοῦ αὐτοῦ α : β τριπλασίων. Ὁ δὲ Α : Ε τετραπλασίων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 412. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸν αὐτὸν λόγον διελεῖν, ὃν ἡ δοθεῖσα ἄλλη ΑΓ διῄρηται. Σχ. 71.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν Εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ὑφ᾽ ὁποιαδήποτε γωνίᾳ συντεταγμένων ΓΑΒ, ἀχθήτω ἡ ΓΒ, καὶ ταύτῃ παράλληλοι αἱ ΔΕ, ΖΗ, ΘΙ, δι᾽ ἁπάντων τῶν σημείων, καθ᾽ ἃ ἡ διῃρημένη ΑΓ διῄρηται. Αὗται γὰρ δὴ προεκβαλλόμεναι καὶ τὴν ΑΒ τεμοῦσι, κατὰ τὸ προτεθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ καὶ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα νοηθῇ ἠγμένη παράλληλος τῇ ΒΓ, δύο ὁποιαδήποτε μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας, ἐν ταῖς παραλλήλοις ἐναποληφθήσεται, ἐν αἷς καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ΑΓ μέρη τὰ ἐκείνοις ἀντιστοιχοῦντα ἐναπείληπται. Τὰ δὲ τοιάδε μέρη ἀνάλογόν ἐστιν (§. 404.).

ΤΜΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΣΧΗΜΑΤΩΝ
ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 413.

Σχ. 73. Σχήματα ἐπίπεδα εὐθύγραμμα ὅμοια καλεῖται, ὧν πρὸς ἄλληλα παραβαλλομένων, πᾶσαι μὲν αἱ γωνίαι ἴσαι, πᾶσαι δ' αἱ πλευραὶ, αἱ ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκείμεναι, ἀνάλογον. Οὕτως ἐὰν ἐπὶ τῶν τετραπλεύρων ΑΒΓΔ, αβγδ, ᾖ Α = α, Β = β, Γ = γ, καὶ Δ = δ· καὶ παρὰ ταῦτα, ΑΒ : αβ = ΒΓ : βγ, καὶ ΒΓ : βγ = ΓΔ : γδ, καὶ οὕτως ἑξῆς, ἔσαι τὰ τετράπλευρα ἀλλήλοις ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 414. Ἅπαντα τὰ κανονικὰ τῶν σχημάτων, οἷς ἰσάριθμοι αἱ πλευραὶ, ὅμοιά ἐστι· τουτέστι πάντα τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, καὶ τα τετράγωνα πάντα, καὶ τὰ πεντάγωνα, καὶ τὰ ἑξάγωνα, κτ. τὰ κανονικά. Καὶ δῆλον ἄρα ὡς καὶ οἱ κύκλοι πάντες ἀλλήλοις ὅμοιοι ἔσονται (§. 399.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 315. Ἐπειδὴ οὖν ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων, ὁ αὐτὸς ἐστὶ λόγος τῶν ὁποιωνδηποτοῦν πλευρῶν, τῶν ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκειμένων, ἔστω ὁ λόγος ὅδε πλευρᾶς πρὸς πλευρὰν Π : π, καὶ ἔσαι ἕκαστος τῶν λόγων ΑΒ : αβ, ΒΓ : βγ, ΓΔ : γδ, ΔΑ : δα, τῷ τοιῷδε λόγῳ Π : π, ἴσος. Ἔνθεντοι καὶ τῶν ἡγου-

ἡγουμένων, καὶ ἑπομένων εἰς κεφάλαια ἴδια προσαθροισθέντων, ἔσονται οἱ λόγοι $(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta) : (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta)$. Καὶ $(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A) : (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha)$ ἴσοι τῷ λόγῳ $\Pi : \pi$ (§. 174.). Τουτέστι $\Pi : \pi = AB\Gamma\Delta : \alpha\beta\gamma\delta = AB\Gamma\Delta A : \alpha\beta\gamma\delta\alpha$. Κἀν τοῖς ὁμοίοις ἄρα τῶν σχημάτων, τὰ μέρη τῶν περιμέτρων, τὰ ἐν ταῖς τῶν ἴσων γωνιῶν κορυφαῖς, ἐπίσης θέσεως ἔχοντα, ὡς αἱ ἐν αὐτοῖς εἰσὶ πλευραὶ, αἱ ἐν ταῖς ἴσαις τῶν γωνιῶν παρεγκείμεναι. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ ὁλοχερῶν τῶν περιμέτρων ἀληθεύσει λεγόμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 416. Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, δυσὶ γωνίαις ταῖς ἐν τῷ αβγ ἴσαι ὦσιν $A = \alpha$ καὶ $B = \beta$, τὰ τρίγωνα ἔσται ὅμοια. Σχ. 74.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ γὰρ δὴ τῶν τεθέντων καὶ $\Gamma = \gamma$ (§. 302.). Γινέσθω οὖν $B\Delta = \beta\gamma$, καὶ ἀχθήτω ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΓ, καὶ ἔσται γωνία $\Delta = \Gamma = \gamma$· τό, τε $EB\Delta = \alpha\beta\gamma$, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ προσεφαρμόζεσθαι (§. 320.). Ἐπειδὴ τοίνυν $BA : BE = B\Gamma : B\Delta$ (§. 406.), ἔσται καὶ $BA : \beta\alpha = B\Gamma : \beta\gamma$. Αἱ ἄρα πλευραὶ αἱ τὰς τῶν τριγώνων ἴσας γωνίας Β, β περιέχουσαι, ἀνάλογον εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως ἔχει δειχθῆναι πλευρῶν, τῶν τὰς ἴσας γωνίας περιεχουσῶν, ὅμοια ἔσται τὰ τρίγωνα (§. 413.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 417. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τινὶ τῶν πλευρῶν ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΔΕ, ἀποτμηθήσεται τὸ ΕΒΔ τρίγωνον, τῷ ὅλῳ ΑΒΓ ὅμοιον. Καὶ παρὰ τὰς ἀναλογίας ἄρα ἃς εἴδομεν (§. 406.), ἀληθὴς ἀεὶ καὶ αὕτη ΑΒ : ΑΓ = ΕΒ : ΕΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 75. §. 418. Ἔνθεν τοι ἐὰν ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ΑΒΓ τριγώνου προεκβεβλημένης, σταθῇ τρίγωνον ἄλλο τὸ ΔΕΖ, οὗ ἡ κορυφὴ Δ, ἰσῶ ἡ βάσις ὑποτείνει, ἐπὶ τῆς εὐθείας πίπτει ΑΔ, τῆς διὰ τοῦ Α παραλλήλου τῇ προεκβληθείσῃ βάσει ἠγμένης. Ἀχθῇ δέ τις καὶ ἑτέρα εὐθεῖα ΗΚ, τῇ αὐτῇ ΒΖ παράλληλος· ἐπειδὴ ΒΓ : ΗΘ = ΑΒ : ΑΗ, καὶ ΕΖ : ΙΚ = ΔΕ : ΔΙ. Καὶ δὴ ΑΒ : ΑΗ = ΔΕ : ΔΙ (§. 403.), ἔσται ΒΓ : ΗΘ = ΕΖ : ΙΚ. Ὅθεν ἐὰν ᾖ καὶ ΒΓ = ΕΖ, ἔσται ΗΘ = ΙΚ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 74. §. 419. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, γωνία τις Β ἴση ᾖ τῇ ἐπὶ ἑτέρου τινὸς τριγώνου αβγ, γωνίᾳ β· ὦσι δὲ καὶ αἱ ταύτας περιέχουσαι τὰς γωνίας πλευραὶ ἀνάλογοι, ὅμοια ἔσται τὰ τρίγωνα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Γινέσθω ΒΔ = βγ. Καὶ ἀχθήτω ΔΕ τῇ ΑΓ παράλληλος. Καὶ ἔσται τὰ ΑΒΓ, ΕΒΔ τρίγωνα ὅμοια (§. 417.)· καὶ ΒΓ : ΒΔ ἤτοι πρὸς βγ = ΒΑ : ΒΕ. Τίθεται δὲ ΒΓ : βγ = ΒΑ : βα, ἔσται ἄρα ΒΕ = βα. Ἐπεὶ δὲ οὕτως ἐπὶ τῶν αβγ, ΕΒΔ τριγώνων, αἱ ἴσαι γωνίαι Β, β, ὑπὸ ἴσων πλευρῶν περιέχονται· τὸ αβγ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ οὕτως ἐστὶν ἴσον, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ προσεφαρμόζεσθαι (§. 316.). Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον αβγ τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ὅμοιον ἐστίν.

ΘΕΩΡΗ-

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 420. Ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πλευραὶ ὦσιν ἀνάλογον, ταῖς ἐν τῷ τριγώνῳ αβγ, τὰ τρίγωνα ἔσαι ὅμοια. Σχ. 74.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν ᾖ ΑΒ : αβ = ΒΓ : βγ, γενομένων ΒΕ = βα, καὶ ΒΔ = βγ, ἔσαι ΑΒ : ΒΕ = ΒΓ : ΒΔ. Ἡ δὲ ΕΔ τῇ πλευρᾷ ΑΓ παράλληλος (§. 407.). Διὸ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον, τῷ ΑΒΓ ὅμοιον. Καὶ ΒΓ : ΒΔ, ἤτοι πρὸς βγ = ΓΑ : ΔΕ (§. 417.). Τίθεται δὲ καὶ ΒΓ : βγ = ΓΑ : γα. Ἄρα καὶ ΔΕ = γα. Αἱ ἄρα τοῦ ΒΔΕ πλευραὶ, ταῖς τοῦ βγα ἴσαι. Καὶ τόγε τρίγωνον αβγ, τῷ τριγώνῳ ΕΒΔ οὕτως ἴσον, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ ἐφαρμόζεσθαι. Ἄρα καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 421. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὧν αἱ τὴν ἑτέραν τῶν ὀξειῶν περιέχουσαι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσὶν, ὅμοια ἐσί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῶν ΑΒΓ, αβγ, ὧν ὀρθαὶ μὲν αἱ Γ, γ, καὶ μὲν δὴ καὶ ΑΒ : αβ = ΑΓ : αγ, γινέσθω ΒΔ = βα, καὶ ἀχθήτω ΔΕ ἐπὶ τῆς ΒΓ κάθετος, ἣ δὴ παράλληλος μὲν ἔσαι τῇ πλευρᾷ ΑΓ, ὅμοιον δὲ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον συσήσει τῷ ΑΒΓ (§. 417.)· ἔσαι οὖν ΑΒ : ΒΔ, ἤτοι πρὸς βα = ΑΓ : ΔΕ. Ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας πρὸς τὴν προτέραν παραβαλλομένης, εὔδηλον ὅτι ΔΕ = αγ. Τὸ ἄρα τρίγωνον ΔΒΕ τῷ τριγώνῳ αβγ, οὕτως ἴσον ἐσὶν, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ ἐφαρμόζεσθαι (§. 349.)· ταύτῃτοι καὶ τόδε τὸ αβγ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὅμοιον ἔσαι. Σχ. 76.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 422. Κἀκ τούτων οὖν ἐν γένει φανερὸν ὅμοια καθίςασθαι τὰ τρίγωνα, τῶν μὲν γωνιῶν δι᾽ ὧν διορίζονται, ἴσων λαμβανομένων, τῶν δὲ πλευρῶν τῶν ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκειμένων ἀνάλογον, καθ᾽ οἷον δήτινα τῶν ὑποδειχθέντων ἐξ ἀρχῆς τρόπων (§. 316. 320. 323. 349.) τῆς τούτων κατασκευῆς τελουμένης· τουτέςιν, εἴτε ἐκ γωνίας μιᾶς καὶ δυεῖν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καλασκευαζομένου· εἴτε ἐκ δυεῖν γωνιῶν καὶ πλευρᾶς μιᾶς· εἴτε ἐκ πλευρῶν τριῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 423. Τῶν ὁμοίων τριγώνων οὕτω συναπτομένων, ὡς ἀείποτε ἐν δυσὶ τριγώνοις κοινήν τινα χωρεῖν τὴν πλευρὰν, πρὸς ἣν ὁμοίως τὰ τρίγωνα κείμενα ᾖ· ἐὰν ἅπασαι αἱ τούτων ὁμόλογοι πλευραὶ, πλευραὶ γίγνωνται τῶν εὐθυγράμμων ἐπιπέδων σχημάτων, ἔςαι τὰ τοιάδε σχήματα ὅμοια.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςωσαν ἐν Σχήμασιν 77. καὶ 78. τὰ ὅμοια τρίγωνα τοῖς αὐτοῖς γράμμασιν ἐπισημειούμενα. Καὶ ληφθεισῶν οὖν τινῶν, τῶν ἐν τοῖσδε τοῖς τριγώνοις ὁμολόγων πλευρῶν, γινέσθω σχήματα τὰ ΑΒΓΔΕΖΗ καὶ αβγδεζη. Φημὶ δὴ ὅτι ταῦτα ὅμοια ἐςίν. Εἰσὶ γὰρ αἱ τῶνδε τῶν σχημάτων γωνίαι, αἱ τοῖς αὐτοῖς γράμμασιν ἐπισεσημειωμέναι, ἴσαι· ὡς, ἤτοι ἴσαι ταῖς γωνίαις τῶν ὁμοίων τριγώνων, ταῖς πρὸς τὰς ἀνάλογον πλευρὰς, ἐπίσης θέσεως ἐχούσαις, ἢ γοῦν ἐκ τῶν τοιῶνδε γωνιῶν προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει ἀναφυόμεναι. Ὁ δὲ δὴ ταῖς ἐπὶ τούτων πλευραῖς ἀνήκει, ἔςιν $HZ : \eta\zeta = ZE : \zeta\epsilon = HE : \eta\epsilon = H\Lambda : \eta\alpha = AE : \alpha\epsilon = A\Delta : \alpha\delta = E\Delta : \epsilon\delta$. καὶ οὕτως ἑξῆς. Κἀκείνων ἄρα τῶν ἐν τοῖς

τοῖς τριγώνοις πλευρῶν ἐκλελεγμένων, αἱ πλευραὶ ἔσονται αἱ αὐταὶ καὶ τῶν σχημάτων ΑΒΓΔΕΖΗ, αβγδεζη, ἕπεται καὶ τὰς ἐν τοῖς σχήμασι πλευρὰς, τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως θέσεως ἐχούσας, εἶναι ἀνάλογον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 424. Διὰ δὴ τούτων, οἱῳδήποτε ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ σχήματι ΑΒΓΔΕΖΗ, ὅμοιον ἕτερον τὸ αβγδεζη κατασκευασθήσεται, τῶν τριγώνων τῶν πρὸς τὸ πρῶτον σχῆμα, ἐξ ὧν δηλαδὴ τὸ σχῆμα τόδε τὸ δοθὲν ἀνακύψει, πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθέντων. Δεῖ δὲ τὸν λόγον διδόμενον εἶναι τινὸς τῶν ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕΖΗ πλευρῶν, πρὸς τὴν ἐκείνῃ ὁμόλογον πλευρὰν τοῦ ἑτέρου σχήματος αβγδεζη, ὃ δέον κατασκευάσαι. Ἢ γοῦν τὸν λόγον, ὃν μία τις ἔχει πλευρὰ, ἑνός τινος τῶν ἐπὶ τοῦ προτέρου σχήματος καταγραφομένων τριγώνων, πρὸς μίαν τινὰ πλευρὰν, τὴν ἐν τῷ τριγώνῳ τοῦ κατασκευασθησομένου ἐκείνῃ οὖσαν ὁμόλογον· ἵνα ἀπὸ τῆς οὕτω διδομένης πλευρᾶς ἀρχὴν λάβοι ἡ κατασκευὴ τοῦ αβγδεζη, σχήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 425. Δύναται καὶ τρίγωνον ἅπαν ἐξ ἄλλων ἀνακύπτειν τριγώνων, συνθέσει τῇ τούτων, ἢ τινῶν ἀφαιρέσει ἀπὸ τῶν λοιπῶν. Ἀπλέξαιτο δὲ ἐκ δυοῖν ὀρθογωνίων, ἢ ἀμβλυγωνίων. Εἴπερ οὖν τρίγωνα δύο, ἐξ ὁμοίων τριγώνων ὡσαύτως παράγεσθαι δύνανται, ἐπιφέρειν ἔξεσαι παραπλησίως καὶ τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 426. Ὡς δ' ἂν τὸ ἔργον τῆς τοῦ αβγδεζη, κατὰ τὸ ΑΒΓΔΕΖΗ σχηματογραφίας οὕτω προέλθοι, ὡς ἓν μόνον τρίγωνον τὸ εζη, τοῖς λοιποῖς προσεπισεπιτεθεισόμενον ὑπολείπεσθαι, δυνήσεται τὸ σχῆμα ἐκπερανθῆναι τῆς μὲν ὑπὸ αηζ = ΑΗΖ, τῆς δὲ ὑπὸ δεζ = ΔΕΖ, καθισαμένων. Προσεκβληθεισῶν γὰρ τῶν πλευρῶν ηζ, εζ, ὥστε κατὰ τὸ ζ ἀλλήλαις συμπεσεῖν, τὸ προκύπτον τρίγωνον εζη, ὡς τῷ τριγώνῳ ΕΖΗ ὅμοιόν τε ἔσεται, καὶ ὁμοίως κείμενον, αὐτόθεν δῆλον (§. 416.). Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ ηζ καὶ εζ πλευραὶ, μετὰ τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν ἀπολαμβανομένης γωνίας ζ, διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ σχήματος γωνιῶν τε καὶ πλευρῶν διορίζονται, ἐν γένει ἔξεσαι ὑποσυνάψαι, ὅτι σχήματα δύο ἐπίπεδα εὐθύγραμμα αβγδεζη καὶ ΑΒΓΔΕΖΗ, ὅμοια ἔσαι, εἰ δῆλον εἴη ἁπάσας τὰς ἐν ἐκείνῳ γωνίας καθ᾽ ἣν ἔχουσι τάξιν, ἁπάσαις ταῖς ἐν τούτῳ ἴσας εἶναι πλὴν μιᾶς· τῆς ζ. Καὶ τὰς πλευρὰς ἁπάσας τὰς ἐν ἐκείνῳ, ᾗ τετάχαται, ταῖς πλευραῖς ταῖς ἐν τούτῳ ἀνάλογον εἶναι, πλὴν δυεῖν, ηζ, εζ, ὑφ᾽ ὧν ἡ ῥηθεῖσα γωνία ζ περιέχεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 427. Τοῦ δ᾽ αὐτοῦ αὖθις μέρους τοῦ σχήματος αβγδεζη, ἐκτετελεσμένου, ἐὰν ἡ ὑπὸ αηζ ἴση γένηται τῇ ΑΗΖ, ἀμελουμένων καὶ τῶν λοιπῶν ζ, καὶ ζεδ, διορισθῇ δὲ τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς ηζ διὰ τῆς ἀναλογίας ΑΒ : αβ = ΗΖ : ηζ, ἐπιζευγνυμένης τῆς εζ, τρίγωνον συστήσεται τὸ ηεζ, τῷ τριγώνῳ ΗΕΖ ὡσαύτως ὅμοιον (§. 419.), καὶ ὁμοίως κείμενον. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ πλευρὰ ζε, μετὰ τῶν γωνιῶν ζ, καὶ ὑπὸ ζεδ, ἐν αἷς ἡ ζε ἐναπολαμβάνεται, διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ σχήματος γωνιῶν τε καὶ πλευρῶν προσδιορίζεται· ἔξεσαι παραπλησίως, τὴν δυοῖν ἐπιπέδων εὐθυγράμμων σχημάτων αβγδεζη, ΑΒΓΔΕΖΗ ὁμοιότητα ὑποσυνάπτειν, εἰ δῆλον, ἁπάσας μὲν τὰς ἐν ἐκείνῳ γωνίας, ᾗ τετάχαται, ἴσας εἶναι πάσαις ταῖς ἐν τούτῳ, πλὴν δυεῖν ζ, καὶ ὑπὸ ζεδ· πάσας δὲ τὰς ἐκείνου πλευρὰς, ᾗ τετάχαται, χᾶται, ἀνάλογον εἶναι πάσαις ταῖς τέτε, πλιὼ μιᾶς, τῆς ζε, τῆς ἐν ταῖς κορυφαῖς τῶν γωνιῶν ζ καὶ ὑπὸ ζεδ ἀναπειλημμένης· ἃς δὴ γωνίας, ταῖς Ζ καὶ ὑπὸ ΖΕΔ ἴσας τυγχάνειν, ὃ προὔπέκειτο.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 428. Ἡ τε, πρὸς ὅμοιον τὸ δοθὲν, σχήματος κατασκευὴ, ἐπὶ τὰ εἰδικώτερα κατιέσι διαφόροις τρόποις ἂν ἔχοι ποικίλλεσθαι, ἢ ταῦτα, ἢ ἐκεῖνα τὰ τρίγωνα, πρὸς τὸ σχῆμα τὸ δοθὲν καταγράφεται· ἢ καθὸ τὰ τρίγωνα τε, ὅπερ ἂν δέοι κατασκευάσαι, σχήματος, ἐκείνοις ὅμοια καθίςαται, ἤτοι προσλήψει ἴσων γωνιῶν, ἢ πλευρῶν ἀναλόγων, ἢ πῇ μὲν γωνιῶν, πῇ δὲ πλευρῶν.

Ἐκ τῶν ἁπλεςάτων δὲ κατασκευῶν ἐςὶν, ἡ παρὰ τῷ δοθέντι σχήματι, ἢ ἐντὸς αὐτε, σημεῖοντι λαμβάνεσα οἷον τὸ Θ, κἀπὸ τεδε ἐπὶ πάσας ἁπασῶν τὰς κορυφὰς τῶν ἐν τῷ σχήματι γωνιῶν εὐθείας ἄγεσα, τὰς ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, καὶ τὰς λοιπάς. Ἔπειτα (Σχ. 86.) πρὸς τῷ θ σημείῳ τῆς θα, σιωιςῶσα γωνίας ταῖς πρὸς τῷ Θ ἴσας. Ἀπὸ δὲ τῶν περιεχεσῶν τάς δε τὰς γωνίας εὐθειῶν, μέρη ἀποτέμνεσα, ὧν ἕκαςον ἂν εἴη πρὸς τιὼ ἐπὶ τε δοθέντος σχήματος, ὡσαύτως ἡγμένιω, ὡς ἡ τε σχήματος πλευρὰ, ὃ δέον κατασκευάσαι, ἐςὶ πρὸς τιὼ ἐν τῷ δοθέντι σχήματι πλευρὰν τιὼ ὁμόλογον. Ἀμέλειτοι ἐὰν ὁ λόγος ἔτος ᾖ ὡς Π : π, ἐπάναγκες γενέσθαι Π : π = ΘΑ : θα = ΘΒ : θβ = ΘΓ : θγ· καὶ ἔτως ἐφεξῆς, κατὰ γωνίας ΑΘΒ, αθβ, ΑΘΓ, αθγ, καὶ ἑξῆς, ἀλλήλαις ἴσας. Τέτε γὰρ γενομένε τὸ αβγδεζη σχῆμα καταγραφήσεται, τῶν α, β, γ καὶ τῶν λοιπῶν, ἢ, δεῖ, ἐπιζευγνυμένων. Σχ. 79.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 429. Οἱ τῶν κύκλων τομεῖς, ὧν αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ἴσαι, ὅμοιοι εἰσίν· ὥσπερ δὴ καὶ

καὶ τὰ τμήματα, ὧν αἱ περιφέρειαι αἱ αὐταὶ εἰσὶ ταῖς τῶν εἰρημένων τομέων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 81. Ἔϛωσαν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, αβγ ἀλλήλαις ἴσαι. Κείσθω δὲ ἐντὸς τῆς ὑπὸ αβγ γωνίας, σχῆμα κατασκευάσαι τῷ τομεῖ ΑΒΓ ὅμοιον. Καὶ τοίνυν σημείου προσληφθέντος τοῦ Β, ἀχθείσης τε τῆς ΒΔ, γινέσθω αβδ = ΑΒΔ· καὶ ΑΒ : αβ = ΒΔ : βδ· τουτέϛιν, ἐπεὶ ΒΔ = ΑΒ, γινέσθω βδ = αβ. Καὶ ἔϛω τὸ δ σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ σχήματος ὃ δέον καταγράψαι. Ἀλλὰ γὰρ τούτου πρὸς ἅπαντα τὰ ἐν τῷ τόξῳ ΑΔΓ σημεῖα γεγονότος, ὁ τομεὺς καταγραφήσεται αβγ, ὃς τῷ τομεῖ ἑπομένως ΑΒΓ ὅμοιος ἔϛαι. Ὅτι δὲ τῶν ὑποτεινουσῶν ἠγμένων ΑΓ, αγ καὶ τὰ τμήματα ὅμοια γίνεται, ἐκ τῶν αὐτῶν δῆλον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 430. Τῶν ἄρα ὁμοίων τομέων τε καὶ τμημάτων αἱ περιφέρειαι, ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι εἰσίν· ἢ ὡς τῶν τμημάτων αἱ ὑποτείνουσαι (§. 415.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 431. Καὶ αἱ τῶν κύκλων δὲ ἡμιπεριφέρειαι, εἰσὶν ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι, καὶ αἱ διάμετροι. Καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ αἱ περιφέρειαι αἱ ὁλοσχερεῖς (§. 354.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 432. Ἐὰν αἱ τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ πρὸς ταῖς ἀναλόγοις πλευραῖς ὁμοίως κειμένων, ἐπὶ δυοῖν ὁμοίων σχημάτων κορυφαὶ δι' εὐθειῶν ὡσαύτως ἐπιζευχθῶσιν, εἰς ἄλλα μὲν διαιρεθήσεται τὰ σχήματα, ἀλλήλοις δὲ ὅμοια.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων ΑΒΓΔΕ, αβγδε, Σχ. 82.
ἔςωσαν οὕτως ἠγμέναι αἱ ΒΕ, βε. Ἐπεὶ δὲ φανερὸν ὡς αἱ πλευραὶ τοῦ σχήματος ΒΓΔΕ, ἀνάλογον εἰσὶν αἱ πᾶσαι πρὸς τὰς τοῦ βγδε, παρὰ τὴν ΒΕ, καὶ αἱ τοῦ προτέρου σχήματος γωνίαι, ἴσαι εἰσὶ ταῖς τοῦ δευτέρου, παρὰ τὴν ὑπὸ ΓΒΕ, καὶ ΒΕΔ, αἷς ἡ ΒΕ ἀναπολαμβάνεται, ἔσονται δήπου τὰ σχήματα ταῦτα ΒΓΔΕ, βγδε, τὰ ἀπὸ τῶν δοθέντων ἀποτετμημένα, ἀλλήλοις ὅμοια (§. 427.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 433. Ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων, αἱ εὐθεῖαι αἱ τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως ἐπιζευγνῦσαι, ΒΕ, βε, ἢ ΓΕ, γε, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν σχημάτων αὐτῶν πλευραί, αἱ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὁμοίως κείμεναι, ΑΒ, αβ, ἢ ΒΓ, βγ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 434. Τῶν δὲ σχημάτων ΒΓΔΕ, βγδε, ἅπερ οὕτως ἀπὸ τινων δοθέντων ἀποτεμνόμενα καθίςαται ὅμοια, παραπλησίῳ καὶ αὐτῶν ἐξῆς τῷ τρόπῳ διαιρουμένων, ἑκάτερον τέως εἰς τρίγωνα ἀναλυθήσεται, ἐξ ὧν τὰ ὁμοίως κείμενα, εἰσὶ καὶ ὅμοια· οἷον τὰ ΑΒΕ, αβε, καὶ ΒΓΕ, βγε, καὶ ΓΔΕ, γδε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 435. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων ΑΒΓ, Σχ. 83.
αβγ, αἱ πλευραὶ ΑΒ, αβ, πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως ἔχωσι θέσεως· ληφθέντος δὲ ἐπὶ μιᾶς τῶνδε τῶν πλευρῶν τοῦ Δ σημείου πρὸ τὸ [illegible], γένηται $AB : \alpha\beta = B\Delta : \beta\delta$. Ἔςαι καὶ (§. 173.) $(AB - B\Delta) : (\alpha\beta - \beta\delta) = AB : \alpha\beta$. Τουτέςιν $A\Delta : \alpha\delta = AB : \alpha\beta = B\Delta : \beta\delta$. Καὶ μενεῖ ἄρα τὰ σχήματα ὅμοια, ἐὰν ταῖς ἐν αὐτοῖς γωνίαις προσεπιγενέσθαι ὑποτεθῶσιν αἱ γωνίαι Δ, δ, ὧν ἑκατέρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴση τυγχάνοι· ἀντὶ δὲ τῶν πλευρῶν

τῆς μὲν ΑΒ, καταλαχθῶσι αἱ δύο ΑΔ, ΔΒ, τῆς δὲ αβ, αἱ δύο αδ, δβ. Τοιγαροῦν καὶ τὰ δειχθέντα ὁμοίως ἀληθεύσει, ἐὰν καὶ τὰ σημεῖα Δ, δ, καὶ ὅσα δήποτε ἄλλα τοιουτώδη, ὡς κορυφαὶ γωνιῶν ἐκληφθῶσιν, αἵτε ταῦτα ἐπιζευγνῦσαι εὐθεῖαι, νοηθῶσιν ὡς διαγώνιοι. Ἔσονται γὰρ δὴ καὶ αἱ διαγώνιοι αὗται, ταῖς ὁμολόγοις τῶν σχημάτων πλευραῖς ἀνάλογοι· καὶ τάγε σχήματα, εἰς ἅπερ τὰ δοθέντα ΑΒΓ, αβγ διατέμνουσιν, ἀλλήλοις ὅμοια παρέξονται. Ἐπιζεύγνυνται δὲ τοιαῦται διαγώνιοι ΔΓ, δγ ἢ, ΔΕ, δε, καὶ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἄλλαι μυρίαι, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Δ καὶ δ ἀρχόμεναι, ἐπὶ τὰ σημεῖα τῶν περιμέτρων ἐκπερατοῦνται, ὧν ἡ εὕρεσις τῇ τῶν Δ, καὶ δ ἐστὶ παραπλήσιος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 436. Ἐπειδὴ δὲ τῶν ὁμοίων σχημάτων οὕτως εἰς ὅμοια διαιρουμένων, αἱ ἐπ' ἐκείνων διαγώνιοι οὖσαι ἐπὶ τούτων καθίστανται πλευραί, τὸ περὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ εἰρημένον, τῶν κατὰ τὰ Δ καὶ δ διαιρεθεισῶν, καὶ περὶ τῶν διαγωνίων κρατήσει λεγόμενον, τῶν τὰ ἐπὶ τῶν περιμέτρων ὁμοίως κείμενα σημεῖα ἐπιζευγνυουσῶν. Ἀμέλει τοι ἐὰν ΑΒ, αβ τοιαίδε ὦσι διαγώνιοι, οἱωνδηποτοῦν σχημάτων ἀλλήλοις ὁμοίων, κἂν ταύταις δὲ ταῖς διαγωνίοις σημεῖα ληφθῇ τὰ Δ, δ, ὡς εἴρηται, ἐπιζευγνυμένων ἤδη καὶ τούτων μετὰ τῶν λοιπῶν σημείων, τὰ ἀνακύπτοντα σχήματα ὡσαύτως ὅμοια ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 437. Τὰ δὲ σημεῖα, οἷον τὰ Α, α, ἢ Δ, δ, τὰ ἤτοι ὄντα, ἢ νοούμενα ὡς κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν, τῶν ἐν ταῖς κατὰ τὰ ὅμοια σχήματα ὁμολογούσαις πλευραῖς ὁμοίως κειμένων, εἴτε αἱ ΑΒ, αβ πλευραὶ δήπου ὦσιν ἐν τοῖς προκειμένοις ὁμοίοις σχήμασιν, εἴτε ἄλλως καὶ διαγώνιοι, δύναται δὴ ἐπὶ τῶν προτεθέν-

των

των σχημάτων, σημεῖα λέγεσθαι ὁμοίως ἔχοντα θέσεως. Καὶ δυοῖν ἄρα σημείων ἐπὶ τοῦ ΑΓ σχήματος ληφθέντων ὡς ἔτυχεν, ἐὰν κἀπὶ τοῦ αγ, τοῦ ἐκείνῳ τῷ ΑΓ ὁμοίου σημεῖα δύο ληφθῇ ὁμοίως κείμενα, ἔσται τὸ μεταξὺ τῶν ἐπὶ τοῦ ΑΓ σημείων διάστημα, πρὸς τὸ διάστημα τῶν ληφθέντων ἐπὶ τοῦ αγ, ὡς Π : π· τουτέστιν· ΑΒ : αβ, ἢ ΒΓ : βγ. κ.ξ. Ἔνθεντοι ἐὰν σημεῖα τρία ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΓ, μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὄντα εὐθείας· καὶ ἐπὶ τοῦ αγ δὲ τρία ἐκείνοις ὁμοίως κείμενα· ἐπιζευχθῶσιτε διὰ τούτων κἀκείνων εὐθεῖαι, τρίγωνα ἀνακύψει ὅμοια. Ἐὰν δὲ ἑκατέρωσε σημεῖα τοιαῦτα τέτταρα προσληφθῇ, ἐξ αὐτῶν κατὰ τὸ δέον ἐπιζευγνυμένων, τετράπλευρα διαγραφήσεται ὅμοια. Ἐὰν δ' ἔτι πλείονα, σχήματα πολύγωνα οἱαδηποτοῦν ὅμοια. Αὕτη δὲ δὴ ἡ τῶν σχημάτων ὁμοιότης, τὰς τῶν γωνιῶν συνείληφεν ἰσότητας, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα, ἅττα ἄχρι τοῦδε κατείδομεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛʹ.

§. 438. Ἐὰν τὸ π γραμμὴν εὐθεῖαν ὑποσημαίνῃ, καὶ τὸ Π ἄλλην, ἥτις ἂν εἴη πρὸς τὴν π, ὡς ΑΒ : αβ, ἢ ΒΓ : βγ, κ.ξ. διαιρεθῇ δὲ τούτων ἑκατέρα ἡ Π καὶ π, εἰς μέρη ἴσα ἰσαρίθμως· ὅσα δήποτε μέρη τῆς εὐθείας Π, ἔνεισι τῇ ΓΕ, τοσαῦτα δὴ καὶ τῆς π, ἐνέσται τῇ γε (§. 165.). Τὸ δ' αὐτὸ κρατήσει καὶ ἢν ἀντὶ τῶν πλευρῶν ΓΕ, γε ἡλικαδήποτε ληφθῇ διαστήματα, μεταξὺ τῶν σημείων τῶν ὁμοίως ἐχόντων θέσεως, ὧν τὰ μὲν δύο ἐπὶ τοῦ ΑΓ σχήματος, τὰ δὲ λοιπὰ δύο ἐπὶ τοῦ αγ. Οὐδὲν ἄρα μᾶλλον τὰ ὅμοια τῶν σχημάτων τῇ πληθύϊ τῶνδε τῶν μορίων διακριθήσονται, ἢ τῷ τῶν γωνιῶν μεγέθει, ἃς προσεχῶς συνεωράκαμεν (§. 437.).