ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 351.

Σχ. 44. Η δύο τῶν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας σημείων τὰ τυχόντα συνάπτουσα εὐθεῖα, Ὑποτείνουσα, ἢ Χορδὴ καλεῖται τῶν μερῶν ΑΓΒ, ΑΔΒ, εἰς ἅπερ αὐτὴ τὴν περιφέρειαν διαιρεῖ. Τὰ δὲ τῆς περιφερείας μέρη ταῦτα, τῆς αὐτῆς ὑποτεινούσης, ἢ χορδῆς ΑΒ, τόξα ὀνομάζεται. Ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ὑποτείνουσα ΓΔ, Διάμετρος τοῦ κύκλου ἀκούει, ἧς ἡ ἀκτὶς ἡμίσεια οὖσα, εἰκότως Ἡμιδιάμετρος εἴωθε λέγεσθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ. 45. §. 352. Ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΑΒ ὁπωσοῦν προαχθεῖσα, καινὴν αὖθις τομὴν τῷ κύκλῳ οὐκ ἀπεργάζεται. Εἰ γὰρ ἔτεμνεν ἔτι κατὰ σημεῖον ὁποιονοῦν τὸ Δ, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι τρεῖς εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ἀλλήλαις ἴσαι ἐτύγχανον ἄν, ὡς ἡμιδιάμετροι κύκλου τοῦ αὐτοῦ. Ἀδύνατον δὲ (§. 344.)· διὰ τὸ περατοῦσθαι ἐπ' εὐθείας ΑΒ τῆς αὐτῆς. Οὐκ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια κατὰ τρισσὰ σημεῖα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀχθῆναι δύναται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 46. §. 353. Τῶν μερῶν ἕκαστον ΑΓΒΑ, ΑΔΒΑ, εἰς ἃ ὁ κύκλος ὑπὸ τῆς χορδῆς διαιρεῖται, Τμῆμα καλεῖται, ἔλαττον μέν, ᾧ τὸ τοῦ κύκλου κέντρον οὐκ ἔνεστι·

ἔνεςι· μεῖζον δὲ ᾧ ἔνεςιν. Ἐὰν δὲ ἡ διάμετρος διάμετρον ἄλλω ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διατέμνῃ κύκλου, ἡ ΑΒ τὴν ΓΔ, τὸ ὑπὸ δυεῖν ἡμιδιαμέτρων ΑΕ, ΕΔ, καὶ τοῦ τόξου ΑΔ περατέμενον σχῆμα, ἢ τὸ ΑΓΒΔ, Τομεὺς προσηγόρευται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 354. Τὸ τμῆμα οὗ χορδὴ ἡ τοῦ κύκλου ἐςὶ διάμετρος, ἢ δυσὶ καὶ αὐτὸ ἡμιδιαμέτροις, καὶ μέρει τῆς περιφερείας περατέμενον, ἅμα καὶ τομεύς ἐςιν. Ἡ δὲ γωνία ἣν ἐν τῷδε τῷ τομεῖ αἱ δύο ἡμιδιάμετροι περιέχουσιν, ἴση τυγχάνει δυσὶν ὀρθαῖς.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 355. Οἱ κύκλοι ὧν αἱ ἀκτῖνες ἴσαι, καὶ αὐτοὶ ἴσοι. Καὶ οἱ τούτων τομεῖς, ὧν αἱ πρὸς τοῖς κέντροις γωνίαι ἴσαι. Καὶ αἱ περιφέρειαι, ἢ τὰ τόξα, ὑφ᾽ ὧν οἱ ἴσοι κύκλοι, ἢ τομεῖς τῶν κύκλων περατοῦνται. Ἐὰν δὲ τῶν ταῖς αὐταῖς ἀκτῖσι καταγεγραμμένων τομέων, ἄνισοι ὦσιν αἱ γωνίαι, οὔτε τομεῖς αὐτοὶ, καὶ τὰ τούτων τόξα, ἄνισα ἔσαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τῶν ἐν ἴσοις ἡμιδιαμέτροις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καταγραφέντων κύκλων, θατέρου τὸ κέντρον ἐπιπέσῃ ἐπὶ τὸ θατέρου, ἐφαρμόσουσι δὴ αἱ τούτων περιφέρειαι, ὅπως ἂν καὶ νοηθεῖεν οἱ κύκλοι οὗτοι περὶ τὰ αὐτῶν κέντρα περιαγόμενοι (§. 290.). Ἐὰν τοίνυν οὕτω περιαχθῶσιν, ὥς τινας τῶν ἐν αὐτοῖς ἀκτίνων ἐφαρμόσαι ἀλλήλαις, τὰ εἰρημένα πάντα ῥᾷςα καταφαίνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 356. Πᾶσα διάμετρος, δίχα τόντε κύκλον διατέμνει, καὶ τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν. Αἱ ἄρα ἐπὶ

τοῦ

τῦ κύκλυ διάμετροι αἱ πρὸς ὀρθὰς ἐπ' ἀλλήλας ἐφεςῶσαι, τόν τε κύκλον, καὶ τὴν αὐτῦ περιφέρειαν, εἰς τέτλαρα τεταρτημόρια διατέμνυσιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 357. Ἐὰν κύκλων δύο ἐν ἡμιδιαμέτροις ἴσαις καταγεγραμμένων, οἱ τομεῖς, ἢ τὰ τύτων τόξα ἴσα ᾖ, καὶ αἱ τῶν τομέων πρὸς τοῖς κέντροις γωνίαι ἴσαι ἔσονται. Ἐὰν γὰρ ἄνισοι, καὶ οἱ τομεῖς αὐτοὶ ἄρα, καὶ τὰ τύτων τόξα ἄνισα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 358. Τῦ κατὰ τὸν τομέα τόξυ εἰς μέρη ἴσα, ὁσαδήποτε τῷ ἀριθμῷ τμηθέντος, ἐὰν ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων ἐπὶ τὸ κέντρον ἀκτῖνες ἀχθῶσιν, εἰς τοσάδε μέρη ἴσα ἡ γωνία τμηθήσεται. Καὶ τῆς γωνίας εἰς μέρη ἴσα τμηθείσης, τῶν τε διατεμνυσῶν εὐθειῶν προεκβεβλημένων, εἰς μέρη τοῖς κατὰ τὴν γωνίαν ἰσάριθμα καὶ τὸ τόξον διαιρεθήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 359. Ἡ ἀπὸ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὴν ὁποιονδήποτε τῶν τῦ κύκλυ τόξων ὑποτείνυσαν κάθετος, δίχα τέμνει τὴν ὑποτείνυσαν. Ἤτε ταύτην δίχα τέμνυσα, καὶ διὰ τῦ κέντρυ διατείνυσα, ἐπ' αὐτὴν ταύτην κάθετος ἐφέςηκεν. Ἡ δὲ δὴ καὶ δίχα τέμνυσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφεςῶσα, ἣν προαχθείη διὰ τῦ κέντρυ διήξει. Προαχθεῖσα δὲ ἡ αὐτὴ ἑκατέρωθεν, καὶ τῆς ὑποτεινύσης τὸ τόξον ἑκάτερον διατέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 47. Ἐν τῷ κύκλῳ ὗ κέντρον τὸ Α, ἀχθήτω ὑποτείνυσα ἡ ΒΓ· ἀχθήτωσαν δὲ καὶ ἡμιδιάμετροι αἱ αἱ ΑΒ, ΑΓ καὶ ἔσται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσοσκελὲς, οὗ βάσις μὲν ἡ ΒΓ, γωνία δὲ ὑφ' ἣν ἡ βάσις ὑποτείνει ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· ἐκείνη ἡ ΑΕ εὐθεῖα ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Α, ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ κάθετος, ταύτην δίχα τεμεῖ (§. 336.). Καὶ ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ, διὰ τοῦ κέντρου διατείνειν, καὶ τὴν ὑποτείνουσαν δίχα τέμνειν ὑποτεθῇ, ἡ αὐτὴ, ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κάθετος ἐπιστήσεται (§. 335.).

Ἀλλ' ἐὰν ἡ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κάθετος, καὶ ταύτην διχοτομοῦσα εὐθεῖα, μὴ διήκῃ διὰ τοῦ κέντρου, κείσθω δὴ κατὰ τὴν ΕΖ· διαχθήτω δὲ καὶ ἡ ΑΕ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ μεσαιτάτω τῆς ὑποτεινούσης σημεῖον Ε· καὶ ἔσται δὴ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΑΕ αὕτη ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κάθετος· ὅπερ ἀδύνατον.

Τελευταῖον δὲ, ἡ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς ΑΒΓ δίχα τέμνουσα, δίχα τεμεῖ καὶ τὴν τοῦ τομέως γωνίαν ὑπὸ ΒΑΓ (§. 335.)· εἰ δὲ ταύτην, καὶ τὸ τόξον ἄρα ΒΔΓ δίχα τεμεῖ, ὥστε εἶναι ΒΔ = ΔΓ (§. 358.). Καὶ ἐὰν ἄρα ἡ ΑΕ ἕως ἐπὶ τὸ Η προεκβληθῇ, ἐπειδὴ ΗΒΔ = ΗΓΔ, ἔσται καὶ ΗΒΔ − ΒΔ = ΗΓΔ − ΓΔ· τουτέστιν ΗΒ = ΗΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 360. Ἔνθεντοι ἡ δοθεῖσα κύκλου περιφέρεια Σχ. 48.
ΑΔΒ δίχα τμηθήσεται, ἐὰν ἡ ταύτην ὑποτείνουσα ΑΒ, δι' εὐθείας ἐπ' αὐτὴν καθέτου τῆς ΓΔ δίχα τμηθῇ. Αὕτη γὰρ ἡ ΓΔ προεκβληθεῖσα, καὶ τὴν περιφέρειαν κατὰ τὸ Δ δίχα τεμεῖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 361. Καὶ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ κέντρου μὴ διδομένου, Σχ. 49.
ἐὰν προσαρμοσθῇ μὲν ὑποτείνουσα αὐτῷ ὁποιατισοῦν, ἡ ΑΒ, ἀχθῇ δ' ἐπὶ ταύτης καὶ εὐθεῖα ἡ ΓΔ, δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνουσα, ἡ αὐτὴ ΓΔ

προεκβληθεῖσα διὰ τοῦ κέντρου διατενεῖ. Καὶ δῆτα ἐὰν αὕτη κατὰ τὸ Ε σημεῖον δίχα τμηθῇ, τόδε τὸ σημεῖον, ἔσται τὸ τοῦ κύκλου κέντρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 362. Διὰ τριῶν δοθέντων σημείων, ἃ μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ᾖ, κύκλου περιφέρειαν καταγράψαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 50. Ἔστω τὰ δοθέντα τρία σημεῖα Α, Β, Γ· καὶ συνεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, καὶ ΒΓ· καὶ τούτων ἑκατέρας δίχα τμηθείσης κατὰ Δ καὶ Ε, ἤχθωσαν ἐπ' αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΔΖ, καὶ ΕΖ· προσεκβεβλήσθωσάν τε αἱ ἀχθεῖσαι, ὥστε συμπεσεῖν κατὰ τὸ Ζ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΑ κύκλος γεγράφθω.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθήτωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Διὰ γοῦν τὰς πρὸς τῷ Δ ὀρθὰς γωνίας, καὶ τὰς ΑΔ = ΔΒ, καὶ ΔΖ = ΔΖ, ἐπὶ τῶν ΑΔΖ, ΒΔΖ τριγώνων αἱ πλευραὶ ΑΖ, ΒΖ ἔσονται ἴσαι. Κατὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΖ ἐπὶ τοῦ ΒΕΖ τριγώνου, ἴση ἔσται τῇ πλευρᾷ ΓΖ, τῇ ἐπὶ τοῦ ΓΕΖ. Τοιγαροῦν ἡ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΑ, καταγραφομένη περιφέρεια, καὶ διὰ τῶν Β καὶ Γ σημείων διαχθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 363. Διὰ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ δισσαὶ κύκλων δυοῖν διαφέρουσαι περιφέρειαι οὐ διήξουσιν. Ἐὰν γὰρ διήκειν ὑποτεθῶσιν, ἡ ΑΒ κοινὴ ἑκατέραν ὑποτενεῖ, ἑκατέρας τε τὸ κέντρον ἔσται ἐπὶ τῆς ΔΖ (§. 359.). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ τῶν περιφερειῶν ἑκατέραν ὑποτενεῖ, καὶ ἄμφω ἄρα τὰ κέντρα

ἐπὶ

ἐπὶ τοῦ Ζ πεσεῖται. Προσέτι δὲ, ἐπεὶ δέον ἑκατέραν διὰ τοῦ Α διέρχεσθαι, ἔσται καὶ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν ἡμιδιάμετρος ἡ αὐτή. Καὶ οὐκ ἄρα διαφέρουσαι ἀλλήλων ἔσονται αἱ περιφέρειαι, ἀλλ᾽ ἐπὶ τὸ αὐτὸ συμπεσοῦνται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 364. Δοθήσεται ἄρα καὶ τὸ κέντρον, μέρους οὑτινοσοῦν τῆς περιφερείας δοθέντος, ἐὰν ἐν τρισὶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείοις πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθεῖσι, τὸ κέντρον προσευρεθῇ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 365. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ, ἢ τῶν ἴσων κύκλων, αἱ ἐπίσης τοῦ κέντρου ἀφιστάμεναι ὑποτείνουσαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀνίσως δ᾽ ἀφισταμένων, μείζων μὲν ἥτις ἧττον, ἐλάσσων δὲ ἥτις μᾶλλον ἀφέστηκε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τῷ κύκλῳ οὗ κέντρον Α, ἐπὶ τὰς ὑποτεινού- Σχ. 51.
σας ΒΓ, ΔΕ ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετοι αἱ ΑΖ, ΑΗ. Αἱ δὲ κάθετοι αἱ τῶν ὑποτεινουσῶν ἔσονται ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ταύτας δίχα κατὰ τὰ Ζ καὶ Η σημεῖα τεμοῦσι (§. 359.). Ἀχθήτωσαν δὲ καὶ αἱ ἡμιδιάμετροι ΑΒ, ΑΕ. Ἔσονται δὴ οὖν τὰ ΒΑΖ, ΕΑΗ τρίγωνα ὀρθογώνια, ὧν αἱ μέγισται τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΕ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐὰν οὖν καὶ $ΑΖ = ΑΗ$, ἔσται καὶ $ΒΖ = ΗΕ$, καὶ $ΓΒ = ΔΕ$ (§. 349.). Ἐὰν δὲ $ΑΖ > ΑΗ$, ἔσται καὶ $ΖΒ < ΗΕ$ (§. 348.). Τό, τε διπλοῦν ἐκείνης ΓΒ, ἧττον τοῦ διπλοῦ ταύτης ΕΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 366. Πᾶσα ὑποτείνουσα πίπτει τοῦ κύκλου ἐντός. Πᾶσα γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Α δυναμένη ἀχθλίψαι ἐπὶ τὸ τῆς ὑποτεινέσης μέρος ΒΖ, ἔλαττον ἔσαι τῆς ἡμιδιαμέτρε ΑΒ (§. 343.). Τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ περὶ τῆς λοιπῆς ἡμισείας ΖΓ ἀληθῶς εἰρήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 367. Ἐπὶ τῦ αὐτῦ κύκλε, ἡ μὲν τῶν ὑποτεινεσῶν μεγίςη, ἐςὶν ἡ διάμετρος, ὡς μηδεμίαν ἔχεσα ἀπὸ τῦ κέντρε ἀπόςασιν· αἱ δὲ λοιπαὶ, παραλλήλως ἄγεσθαι τινὶ διαμέτρῳ νοέμεναι, τοσῷδε ἐλάσσονες καθίςανται, ὁπόσῳ ἐλάσσονα ἀπὸ μὲν τῦ ἡμικυκλίε ἀπολαμβάνεσι τμήματα, ἀπὸ δὲ τῆς ἡμιπεριφερείας τόξα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Σχ. 52. §. 368. Τὰ δέ τοι τόξα, τὰ ἀπὸ δυοῖν τῦ αὐτῦ κύκλε παραλλήλων ὑποτεινεσῶν ΑΒ, ΓΔ ἀπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις ἐςίν. Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τῦ Ε κέντρε ἐπὶ τῆς ΑΒ ὑποτεινέσης κάθετος, καὶ προαχθήτω, εἰς ὃ τὴν περιφέρειαν τέμοι κατὰ τὸ Ζ· ἔσαι ἡ αὐτὴ ΕΖ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ κάθετος (§. 285.). Ἔνθεν τοι ΖΑ = ΖΒ, καὶ ΖΓ = ΖΔ (§. 359.). Καὶ τῶνδε ἀπ᾽ ἐκείνων ἀφαιρεθέντων, λοιπὸν ΑΓ = ΒΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 369. Τῦ αὐτῦ, ἢ τῶν ἴσων κύκλων, καὶ τῶν κατ᾽ αὐτὲς περιφερειῶν, αἱ ἴσαι ὑποτείνεσαι, τμήματά τε καὶ τόξα ἐναπολαμβάνεσιν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων κύκλων τόξα ἴσα ἐναπολειφθῇ, καὶ αἱ ὑποτείνεσαι τὰ τοιαῦτα τόξα ἔσονται ἴσαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 53. Ἐπὶ τῶν κύκλων, ὧν κέντρα Α καὶ Β, ἔςωσαν ὑποτείνεσαι ΓΔ, ΕΖ· καὶ ἡμιδιάμετροι ἀχθήτωσαν

σαν ΑΓ, ΑΔ καὶ ΒΕ, ΒΖ, αἱ πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι ἐσόμεναι. Ταύτῃ τοι δέ.

Ἐὰν Α΄. Ἡ ΓΔ ὑποτείνουσα τῇ ΕΖ ὑποτεινούσῃ ἴση ᾖ, ἔσονται καὶ τὰ τρίγωνα, καὶ αἱ γωνίαι ὑπὸ ΓΑΔ, ΕΒΖ ἴσαι. Τοιγαροῦν καὶ τὸ τόξον ΓΗΔ, τῷ τόξῳ ΕΙΖ ἴσον ἔσται. Καὶ ὁ τομεὺς δὲ ΓΑΔ τῷ τομεῖ ΕΒΖ (§. 355.). Κἀντεῦθεν τῶν ἴσων τριγώνων ἑκατέρωθεν ἀφαιρεθέντων, καὶ τὸ τμῆμα ΓΗΔ, ἴσον τῷ τμήματι ΕΙΖ. Ἐξ οὗ ἔτι ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ΓΘΔ τμῆμα, τῷ τμήματι ΕΚΖ.

Ἐὰν δὲ Β΄. Τὸ τόξον ΓΗΔ ἴσον ᾖ τῷ τόξῳ ΕΙΖ, ἔσται ἡ Α Γωνία ἴση τῇ Β (§. 357.). Καὶ εἰσὶν οὖν ἐπὶ τῶν τριγώνων ΓΑΔ, ΕΒΖ, ἐν οἷς αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι περιέχονται ὑπὸ πλευρῶν ἀλλήλαις ἴσων, καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ΓΔ = ΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 370. Διὰ δὴ τούτων ἀπὸ τῆς δοθείσης περιφερείας τόξον, τόξῳ τῷ δοθέντι ἐν περιφερείᾳ τῇ αὐτῇ, ἴσον ἀπολαμβάνομεν, τὴν τοῦτο ὑποτείνουσαν τῇ ἐκεῖνο ὑποτεινούσῃ ἴσην ποιούμενοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 371. Εὐθεῖα, ἡ διά τινος τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας σημείων οὕτω διήκουσα, ὡς τῷ κύκλῳ μηδαμῶς ἐμπίπτειν, ἅπτεσθαι τοῦ κύκλου λέγεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 372. Διὰ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τῆς περιφερείας σημείου, γραμμὴν εὐθεῖαν ἁπτομένην τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, οὗ κέντρον Σχ. 54.
τὸ Α, δοθὲν σημεῖον τὸ Β. Ἀχθήτω δὲ διά τε Α

καὶ Β εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ πρὸς αὐτὴν κατὰ τὸ Β κάθετος ἐφεςάσθω ἡ ΔΕ. Φημὶ δὴ ταύτην εἶναι τὴν κατὰ τὸ Β τοῦ κύκλου ἐφαπτομένην.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διήκει γὰρ ἡ ΔΕ διὰ τοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας Β σημείου. Ἐὰν μὲν ἐπὶ ταύτην ἡ τυχοῦσα ἄλλη ἀχθῇ ΑΖ, τριγώνου συνισαμένου ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΖ, ἡ ΑΖ μείζων ἔσαι τῆς τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρου ΑΒ (§. 341.), ὥςε τὸ ἐπὶ τῆς ΔΕ σημεῖον Ζ, πίπτειν τοῦ κύκλου ἐκτός.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 373. Τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον Β μοναδικὸν ἐςίν· οὐδ᾽ ἄντι μέρος τῆς περιφερείας δοθείη, ὅπερ ἂν τῇ εὐθείᾳ ΔΕ ἐφαρμόσειε.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 374. Ἐὰν εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτηται, ἡ ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένη ἡμιδιάμετρος, τῇ ἐφαπτομένῃ κάθετος ἐπισήσεται. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην κάθετος ἐπισῇ, ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἐπισήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ κύκλου ἔσω κέντρον τὸ Α, ἁπτέσθω δὴ ἡ ΔΕ εὐθεῖα κατὰ τὸ Β, καὶ ἔσω·

Α΄. Ἀγομένη ἡ ΑΒ, ἧς καθέτου μὴ οὔσης, ἔσω ἄλλη τις ἡ ΑΖ· καὶ ἔσαι ἡ ὑπὸ ΑΖΒ ὀρθὴ, ἥτε ΑΒ ἡμιδιάμετρος μείζων τῆς ΑΖ· τὸ ἄρα σημεῖον Ζ ἐντὸς τοῦ κύκλου πεσεῖται, ὃ τὸν τῆς ἐφαπτομένης ὁρισμὸν ἐςὶν ἀνατρέπον (§. 371.).

Β΄. Ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁπτομένην κάθετος, μὴ ἐπὶ τὸ κατὰ τὴν ἐπαφὴν σημεῖον

μεῖον τὸ Β, πίπτῃ, ἀλλ' ἐφ' ἕτερον τὸ Ζ, ἀχθήτω δὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἔσαι δὴ καὶ αὕτη πρὸς τὴν ἐφαπτομένην κάθετος· ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 375. Ἡ ἄρα εὐθεῖα, ἡ τοῦ κύκλου ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἁπτομένη σημείου, μοναδικὴ οὖσα ἐςίν. Εἴπερ γὰρ διὰ τοῦ Β καὶ ἑτέρα τις, παρὰ τὴν ΔΕ, τοῦ κύκλου ἤγετο ἁπτομένη, ἡ αὐτὴ ΑΒ ἐφ' ἑκατέρας ἂν κάθετος ἐπιςαίη· ὅπερ οὐκ ἔςιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 376. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐςὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤτοι ἐπὶ θάτερον τῶν τῆς γωνίας σκελῶν τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ τὸ κέντρον πεσεῖται, ἢ τῆς γωνίας ἐντὸς, ἢ ἐκτός. Καὶ δή·

Α'. Τοῦ κέντρου Α πίπτοντος ἐπὶ τοῦ σκέλους ΒΓ Σχ. 55. τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΒΓΔ γωνίας, τῆς ἐπὶ τῇ αὐτῇ περιφερείᾳ ΒΔ βαινούσης, ἐφ' ᾗ καὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ βαίνει γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, τὸ τρίγωνον ΔΑΓ ἔσαι ἰσοσκελὲς, καὶ ἡ κατὰ τὸ Γ γωνία, ἴση τῇ κατὰ τὸ Δ. Ἀλλὰ μὴν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ ἐκτὸς, ἴση ταῖς ἐντὸς Γ + Δ (§. 306.). Ἔσαι ἄρα καὶ ΔΑΒ = 2Γ.

Β'. Τοῦ κέντρου Α ἐντὸς τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ Σχ. 56. γωνίας ΒΓΔ πίπτοντος, καὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῷ κέντρῳ οὔσης, ἐὰν ἡ ΓΑ διὰ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσα προσεκβληθῇ ἕως ἐπὶ τὸ Ε, ἔσαι ΒΑΕ = 2ΒΓΕ· καὶ ΕΑΔ = 2ΕΓΔ. Ἐνθεντοι καὶ ΒΑΔ = 2ΒΓΔ.

Σχ. 57. Γ΄. Τοῦ κέντρου Α, ἐκτὸς τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΒΓΔ γωνίας πίπτοντος, καὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῷ κέντρῳ οὔσης· ἐὰν καὶ ἤδη ἡ ΓΑ ἀχθεῖσα προσεκβληθῇ ἕως ἐπὶ τὸ Ε, ἔσται ὑπὸ ΕΑΒ = 2ΕΓΒ· καὶ ΕΑΔ = 2ΕΓΔ· διὸ δὴ τῶν προτέρων ἀπὸ τῶν ὑστέρων ἀφαιρουμένων, ΒΑΔ = 2ΒΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 377. Ἐπειδὴ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, αἱ ἐπὶ ἴσων βεβηκεῖαι περιφερειῶν καὶ πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσαι γωνίαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶν (§. 357.), ἔσονται δὴ καὶ αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τῷ αὐτῷ, ἢ ἴσοις ἐπιβαίνουσαι τόξοις, ἀλλήλαις ἴσαι· οἷαι δὴ καὶ αἱ γωνίαι, αἱ ἐν τοῖς ἴσοις τοῦ αὐτοῦ κύκλου τμήμασι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 378. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία, ἐὰν τῇ ἡμιπεριφερείᾳ βεβήκῃ, ὀρθὴ ἔσται· ἐὰν δὲ τόξῳ τῆς ἡμιπεριφερείας μείζονι, ἀμβλεῖα· ἐὰν δ᾽ ἐλάσσονι, ὀξεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 379. Οὕτω καὶ ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τμήματι ἡμικυκλίου μείζονι, ὀξεῖα· ἡ δ᾽ ἐν ἐλάσσονι, ἀμβλεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

Σχ. 58. §. 380. Ἐὰν ᾖ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ὑπὸ ΒΓΔ, ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΕΔ βεβηκεῖα ἔσται. Καὶ ἴση ἄρα τῇ γωνίᾳ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι ΓΖΔ, τῇ τῷ αὐτῷ τόξῳ ΓΕΔ, καὶ αὐτῇ βεβηκείᾳ· ἢ καὶ τῷ ἡμίσει τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας Α, ἐὰν ᾖ καὶ αὐτὴ τῷ τόξῳ ΓΕΔ βαίνουσα.

ΠΡΟΒΛΗ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 381. Κατ' ἄκρον σημεῖον τὸ Β, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Κέντρε ὁτινοσῦν ληφθέντος τε Γ, περιφέρεια γεγράφθω, διήκεσα μὲν διὰ τε Β, τέμνεσα δέ πε καὶ τὴν ΑΒ, οἷον κατὰ τὸ Δ. Ἀχθήτω δὲ καὶ ΔΓ, καὶ προεκβληθήτω, ὥστε εἶναι ΓΕ = ΓΔ· καὶ ἐπεζεύχθω ΕΒ. Ἡ δὲ τῇ ΑΒ κάθετος ἔσαι. Σχ. 59.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία, ὡς ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἔσα, ὀρθή (§. 379.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 383. Διὰ τε ἐκτὸς τε κύκλε δοθέντος σημείε, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τε κύκλε ἐφαπτομένην.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω κύκλος ἔ κέντρον τὸ Α· τέτε δ' ἐκτὸς δοθὲν σημεῖον τὸ Β. Ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΑΒ, καὶ κύκλος ἕτερος γεγράφθω, ἔ διάμετρος ἡ ΑΒ, τέμνων τὸν πρότερον κατὰ δισσὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἀχθήτω δὲ ΒΓ καὶ ΒΔ. Ἑκατέρα γὰρ τε περὶ τὸ Α κύκλε ἐφάψεται. Σχ. 60.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ἀχθῶσιν αἱ ἡμιδιάμετροι ΑΓ, ΑΔ, εὔδηλον ὡς αἱ ἐν τοῖς ἡμικυκλίοις γωνίαι ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ ἔσονται ὀρθαί. Ἡ ἄρα ΒΓ εὐθεῖα, ἡ ἐπὶ τῆς ἡμιδιαμέτρε ΑΓ, πρὸς τῷ ἐπὶ τῆς περιφερείας Γ, κάθε-

κάθετος, τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφάψεται (§. 372.)· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΒΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 383. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΒ, ΑΔΒ αἱ ΑΓ, ΑΔ πλευραὶ ἴσαι εἰσίν· ἥτε ΑΒ ἑκατέρῳ κοινή· εἰσὶ δὴ καὶ ΓΒ, ΒΔ ἀλλήλαις ἴσαι· αἵτε πρὸς τῇ εὐθείᾳ ΑΒ ἑκατέρωθεν γωνίαι, αἱ κατὰ τὸ Β, καὶ τὸ Α (§. 349.) ὁμοίως ἴσαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 384. Σχῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον Κανονικὸν λέγεται, οὗ ἅπασαι αἱ πλευραὶ ἀλλήλαις τε ἴσαι, καὶ γωνίας ἴσας εἰσὶ περιέχουσαι. Τὰ δὲ λοιπὰ Ἀκανόνιστα καλεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ. 61. §. 385. Τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας εἰς μέρη ἴσα διαιρεθείσης, ἐὰν αἱ ὑποτείνουσαι τὰ τοιάδε μέρη ἀχθῶσιν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, σχῆμα κανονικὸν ἀνακύψει, οὗ τοσαίδε αἱ πλευραὶ, ὅσα τῆς περιφερείας τὰ μέρη εἰς ἃ διῄρηται. Τὰς δέτοι πλευρὰς τοῦ οὕτως ἐγγραφομένου τῷ κύκλῳ σχήματος, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, αὐτόθεν φανερόν. Ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι, ὡς ἄρα ἐν ἴσοις τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἅπασαι οὖσαι τμήμασι, καὶ αὐταὶ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν (§. 377.).

§. 386. Καὶ τόνδε δὴ τὸν τρόπον, εἴπερ οἷόν τε καθ᾽ ὀντιναοῦν ἀριθμὸν μορίων ἴσων ἀλλήλοις τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν διαιρεῖν, ἀείποτ᾽ ἂν παρείη, καὶ ἰσάριθμον ταῖς πλευραῖς κανονικὸν σχῆμα ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐγγράφειν. Ἀλλὰ γὰρ ἡ Στοιχειώδης Γεωμετρία, καθόλου τινὰ λόγον τοῦ τὴν περιφέρειαν εἰς ὅσα ἄντις βούλοιτο μέρη διατέμνειν, οὐδένα οἶδεν. Τὰς γὰρ τοιάσδε διαιρέσεις, διὰ κύκλου τε καὶ εὐθείας,