ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΠΕΡΙ
ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΠΛΕΥΡΩΝ
ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ
ΣΧΗΜΑΣΙΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 286.

Σχῆμα ἐστὶν ἤτοι ἐπιφάνεια, ἢ στερεὸν πανταχόθεν ἔχουσα, ἢ ἔχον πέρατα. Σχῆμα Ἐπίπεδον τὸ πανταχόθεν πεπερατωμένον ὑπὸ γραμμῆς, ἤτοι καμπύλης, ἢ ἐκ καμπύλων, ἢ ἐκ καμπύλων τε καὶ εὐθειῶν, ἢ τέως ἐξ εὐθειῶν μόνων, συγκειμένης. Ἡ δὲ γραμμὴ τῇ μὲν τοῦ σχήματος Περιφέρεια καλεῖται, τῇ δὲ Περίμετρος. Αἱ δὲ εὐθεῖαι, ἢ αἱ καμπύλαι ἐξ ὧν ἡ περίμετρος, ἑκάσται, τοῦ Σχήματος Πλευραί.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 287. Κοινὸν ἁπάσαις τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ταῖς περιμέτροις, τὸ ὑπ' εὐθείας διά τινος τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος σημείων ἀχθείσης τε καὶ προαχθείσης, κατὰ δισσὰ τοὐλάχιστον σημεῖα τέμνεσθαι. Καὶ δυοῖν δὲ σχημάτων τεμνόμεναι αἱ περίμετροι, κατὰ δισσὰ τοὐλάχιστον ὡσαύτως σημεῖα τμηθήσονται.

§. 288. Τῶν δὲ σχημάτων τὰ ἐπίπεδα, τὰ ἐν τοῖς αὐτοῖς δυνάμενα συνέχεσθαι πέρασιν· ἢ ὧν θάτερον οὕτω θατέρῳ παρατίθεσθαι δύναται, ὥστε τὰς περιμέτρους ἀλλήλαις προσεφαρμόζεσθαι, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καίτοι, τάγε μὴ ἐφαρμόζοντα οὐκ ἐν τοῖς ἀνίσοις τἀπλέον πάντα· ἡ γὰρ θατέρου

μέρους

μέρους ὑπεροχὴ τῇ ἐλλείψει θατέρου πολλάκις ἀντικαθίσαται.

§. 289. Τῶν δὲ μὴ μιᾷ καμπύλῃ περατουμένων σχημάτων, πλείοσι δὲ πλευραῖς, εἰσὶν αἱ γωνίαι ταῖς πλευραῖς ἰσάριθμοι· ὧν δὴ πλευρῶν εἴτις εὐθεῖα, τοῦ λοιποῦ αὕτη τῆς περιμέτρου ἐξ ἀνάγκης ἐλάσσων ἔσαι (§. 250.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 18. §. 290. **Κύκλος** ἐσὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς καμπύλης περιεχόμενον, ἧς ἡ φύσις τὸ καθ' ἕκασον τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων, ἀφ' ἑνός τινος σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος ἐπίσης ἀφίσασθαι. Τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο, οἷον τὸ Α, **Κέντρον** τοῦ κύκλου καλεῖται. Ἡ δὲ ΑΒ, ἡ τοῦ κέντρου ἀπὸ παντὸς τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας σημείων ἀπόσασις, **Ἀκτὶς**, ἢ **Ἡμιδιάμετρος**, ἢ **Διάσημα**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 291. Ἡ τοῦ **Κύκλου Περιφέρεια** ἑτέρα τις ἐσὶ γραμμὴ, ὡς λίαν ὑπουργοῦσα ἐν ταῖς τῶν προβλημάτων ἐπιλύσεσι, παρ' ἣν οὐδεμία τῶν καμπύλων ἄλλη ἐπὶ τῆς σοιχειώδους ταύτης Γεωμετρίας χώραν εἴληχεν. Ὅ,τι γὰρ ἐν ταύτῃ τελεῖται, διὰ γραμμῆς εὐθείας, καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τελεῖται. Διὸ καὶ ἡ τοῦ κύκλου καταγραφὴ ἐν τῷ δοθέντι κέντρῳ καὶ διασήματι, τὸν αὐτὸν αἰτεῖται τρόπον, ὃν καὶ τὸ εὐθεῖαν γραμμὴν ἄγεσθαι, ὥσπερ εἴρηται (§. 254.).

§. 292. Τοῦ δὲ κύκλου καταγραφέντος, εὐθεῖα τῇ δοθείσῃ ΑΒ ἴση, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τίθεται κατὰ πᾶν μέρος. Δι' οὗ δὴ μόνου καὶ ἡ εὐθείας ἐπ' εὐθείᾳ πρόσθεσις τελεῖται, καὶ ἡ τῆς ἐλάσσονος ἀπό γε τῆς μείζονος ἀφαίρεσις.
Σχ. 19. Κέντρῳ καὶ γὰρ τῷ Β, ὃ πέρας τῆς εὐθείας ἐσὶν ΑΒ,

ΑΒ, διαςήματι δὲ τῷ ΒΓ = Δ, ἐὰν ἡ περιφέρεια καταγραφῇ, καὶ πρὸς ταύτην προαχθῇ ἡ ΑΒ, ἔςαι καὶ ἡ ΒΕ = Δ. Ἔνθεν τοι ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ = ΑΒ + Δ. Καὶ ΑΓ = ΑΒ − ΒΓ = ΑΒ − Δ.

§. 293. Αὕτη δὲ ἡ τῆς περιφερείας χρῆσις, τὸ καὶ τὸν κύκλον ἡμᾶς ἐνταῦθα ὁρισμῷ ἀποδοῦναι ἀπήτησεν· ἢ γὰρ ὁ κύκλος χῆμα, μετὰ τῶν αὐτοῦ μερῶν τῶν δυσὶν, ἢ πλείοσι γραμμαῖς ἐκπερατουμένων, ἐν τοῖς ἐφεξῆς τέως θεωρηθήσεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ·

§. 294. Σχῆμα ἐπίπεδον, οὗ αἱ πλευραὶ πᾶσαι εὐθεῖαι, Εὐθύγραμμον λέγεται. Τὰ δὲ λοιπὰ Καμπυλόγραμμα, τὰ εἴθ' ὑπὸ καμπύλης, ἢ καμπύλων περατούμενα, εἴθ' ὑπὸ καμπύλων καὶ εὐθειῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ·

§. 295. Τοῦ ἐπιπέδου καὶ εὐθυγράμμου χήματος, τρεῖς τοὐλάχιςον αἱ πλευραὶ, τῶν δὲ τριῶν καὶ πλείονες τῷ χήματι προσεῖναι δύνανται, ἐν παντὶ ἀριθμῷ.

§. 296. Κατασκευάζεται δὲ ἅπαν χῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον προσληφθεισῶν ὁπωσοῦν παρὰ μίαν ἁπασῶν αὐτοῦ τῶν πλευρῶν, καὶ τούτων οὕτω συναφθεισῶν, ὡς ἑκάςην μετὰ τῆς προσεχοῦς αὐτῇ γωνίαν περιέχειν, πρὸς τὸ δοκοῦν καὶ ταύτην προσληπτέαν· ἔπειτα δὲ τῶν ἄκρων σημείων τοῦ μέρους τῆς οὕτω καταγραφείσης περιμέτρου ΑΒΓ, Σχ.20. δι' εὐθείας τῆς ΑΓ συνημμένων. Τὴν γραμμὴν ΑΓ ταύτην τὸ λοιπὸν τῆς περιμέτρου μέρος διατέμνειν οὐ δεῖ, εἰ μοναδικόν τις ἔχειν ἐθέλοι τὸ χῆμα, καὶ μὴ ἐκ πλειόνων χημάτων συγκείμενον.

§. 297. Ἀχθείσης δὲ τῆσδε τῆς ΑΓ, ταῖς τοῦ χήματος γωνίαις δύο προσεπιγίνονται Α καὶ Γ, ταῖς δὲ

πλευ-

πλευραῖς μία ἡ ΑΓ. Τούτων δὲ πάντων τὸ μέγεθος ἀπὸ τῶν προσληφθεισῶν ἤρτηται πλευρῶν τε καὶ γωνιῶν, ὑφ' αἷς αἱ πλευραὶ τῆς συναφείας ἔτυχον. Καὶ τινων οὖν ἐξ αὐτῶν τρεπομένων, τὰ πολλὰ τρέπεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 298. Σχῆμα τὸ ἐπίπεδον καὶ εὐθύγραμμον, οὗ τρεῖς αἱ πλευραὶ, Τρίπλευρον καλεῖται, ἢ Τρίγωνον· οὗ δὲ τέτταρες Τετράπλευρον, ἢ Τετράγωνον· οὗ δὲ πέντε Πεντάγωνον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐν γένει δὲ τὰ εὐθύγραμμα τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα, καλοῦνται Πολύγωνα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ.21. §. 299. Γίνεται τὸ τρίγωνον, δυεῖν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπὸ τῇ τυχούσῃ γωνίᾳ Β, πρὸς ἀλλήλας ἐπίκλισιν λαβουσῶν, συναπτομένης καὶ τῆς ΑΓ· ὅθεν αὐτίκα δῆλον, τὰς ἐν αὐτῷ πλευρὰς, πῇ μὲν ἀλλήλαις ἴσας δύνασθαι εἶναι, πῇ δ' ὁπωσοῦν ἀνίσους.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 300. Τὸ τρίγωνον οὗ ἅπασαι αἱ πλευραὶ ἀλλήλαις ἴσαι, Ἰσόπλευρον λέγεται. Οὗ δὲ αἱ δύο μόναι ἀλλήλαις ἴσαι, Ἰσοσκελές. Τούτου δὲ Σκέλη μὲν τὰ ἴσα, Βάσις δὲ ἡ τρίτη. Οὗ δ' ἂν ἅπαντα ἄνισα εἴη, τὸ τοιοῦτο Πλάγιον, καὶ Σκαληνόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ.22. §. 301. Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἁπασῶν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΓΑΒ + Β + Γ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἐστί.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς ΒΑ πλευρᾶς προαχθείσης, νοείσθω ὑπὸ ΔΑΕ ἴση τῇ γωνίᾳ Β, καὶ ἔσται ΑΕ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ παράλληλος (§. 279.)· ἥτε ὑπὸ ΕΑΓ, ἴση τῇ Γ (§. 282.). Ἔνθεν τοι Β + ΒΑΓ + Γ = Β + ΒΑΓ + ΓΑΕ. Ἀλλὰ μὴν ΒΑΓ + ΓΑΕ = ΒΑΕ. Ἄρα Β + ΒΑΓ + Γ = Β + ΒΑΕ. Αἱ δὲ Β καὶ ΒΑΕ, τὸ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν συναποτελοῦσι κεφάλαιον (§. 284.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 302. Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου δύο γωνιῶν, διορίζεται ἡ τρίτη, καὶ ἐκ τῆς μιᾶς τῶν τριῶν ὁποιασοῦν, τὸ δυεῖν ἄθροισμα τῶν λοιπῶν. Καὶ ἐπέσται ἄρα, ὥσπερ ἐκ τῶν δύο ἅμα τὴν τρίτην, οὕτως ἀνάπαλιν ἐκ ταύτης, ἐκείνας ἅμα, ἡλίκαι προσευρεῖν. Ἔστω ΑΒΓ, τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου Σχ. 23.
δύο γωνιῶν τὸ ἄθροισμα· προεκβληθείσης δὲ τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Δ, ἔσται ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ἡ τρίτη (§. 275.). Καὶ ἐὰν ὑπὸ ΑΒΔ, τινὶ τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γωνιῶν ἴση ᾖ, ἔσται ὑπὸ ΑΒΓ τῶν λοιπῶν τὸ ἄθροισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 303. Ἐάν τις τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γωνιῶν ὀρθὴ ᾖ, ἔσται δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν ἄθροισμα ἴσον ὀρθῇ· καὶ τούτων ἑκατέρα ὀρθῆς ἐλάσσων καθ᾽ ἑαυτήν, ἤτοι ὀξεῖα. Οὐδ᾽ ἂν γένοιντο ἐν τῷ τριγώνῳ γωνίαι ὀρθαὶ πλείους μιᾶς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 304. Ἐὰν δέ τις τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γωνιῶν, ὀρθῆς ᾖ μείζων, ἤτοι ἀμβλεῖα, τὸ ἐκ τῶν λοιπῶν ἄθροισμα, ὀρθῆς ἐλάσσονα, ἤτοι ὀξεῖαν παρέξεται. Διὸ τοσῷδε μᾶλλον ἑκατέρα ἐκείνων ἐν τῷ μέρει ὀξεῖα ἔσται. Οὐδ᾽ ἂν ἐγγένοιντο ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ τριγώνῳ,

γώνῳ, ἀμβλεῖαι δύο· ἐδὲ μὲν ἓν ἀμβλεῖατε καὶ ὀρθή.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 305. Τὸ ἐκ δυεῖν ὁποίωνδήποτε τῦ τριγώνυ γωνιῶν ἄθροισμα, δυεῖν ὀρθῶν ἔλαττον ἐστί· τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ μιᾶς ὀρθῆς ἔλαττον τυχὸν, ἡ λοιπὴ τρίτη ἀμβλεῖα ἔσαι· ἴσον δὲ ὂν ὀρθῇ, ὀρθή· μεῖζον δὲ ὀρθῆς, ὀξεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 306. Παντὸς τριγώνυ ΑΒΓ, μιᾶς τῶν πλευρῶν ΒΓ κατὰ τὸ Δ προεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ΑΓΔ, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, Α, καὶ Β
Σχ. 24. ἅμα ληφθείσαις ἴση ἐσίν. Ἐπειδὴ γὰρ ΑΓΔ + ΑΓΒ = 2Ο = Α + Β + ΑΓΒ. Ἄρα τῆς κοινῆς ΑΓΒ ἐκ μέσε ληφθείσης ΑΓΔ = Α + Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 307. Ἐπὶ παντὸς σχήματος ἐπιπέδε εὐθυγράμμε, τὸ κεφάλαιον ἁπασῶν τῶν γωνιῶν, ἴσον ἐσὶ δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς γωνίαις, ὅσαι εἰσὶ τῷ σχήματι αἱ πλευραὶ, πλὴν τεσσάρων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 25. Ὁποιονῦν ληφθὲν σημεῖον Θ, τῶν ἐντὸς τῦ σχήματος ΑΒΓΔΕΖΗ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῦ ἀχθεισῶν τῶν ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, κτλ. ἐφ᾽ ἁπάσας τὰς τῶν γωνιῶν κορυφὰς, τοσαῦτα τὸν ἀριθμὸν προκύψει τρίγωνα, ὅσαι τῷ σχήματι αἱ πλευραὶ, ἐφ᾽ ὧν ἁπάντων τὸ τῶν γωνιῶν ἄθροισμα, τὸ κεφάλαιον συναποτελεῖ δὶς τοσέτων ὀρθῶν (§. 301.). Ἀλλ᾽ αἱ περὶ τὸ Θ γωνίαι, αἱ τῷ σχήματι μὴ προσανήκεσαι, ἅμα ληφθεῖσαι, ὀρθαῖς τέτλαρσιν ἴσαι εἰσί (§. 175.) Τέτων ἄρα ἀφαιρεθεισῶν, αἱ κατὰ τὰ τρίγωνα λοιπαὶ γωνίαι, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον τῷ ἀθροίσματι

τῶν

τῶν τοῦ σχήματος γωνιῶν, δὶς τοσαύτας ὀρθὰς συναποτελοῦσιν, ὅσαι τῷ σχήματι αἱ πλευραὶ, πλὴν τεσσάρων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 308. Ἐπὶ παντὸς τετραπλεύρου, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν, τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσον ἐστίν. Ἐπὶ δὲ τοῦ πενταγώνου ἕξ. Ἐπὶ δὲ τοῦ ἑξαγώνου ὀκτώ· καὶ οὕτως ἐφεξῆς, δυεῖν ὀρθῶν ἑκάστῃ πλευρᾷ προσεπιγραφομένων, καθ' ὅσον ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς προσαύξει ἐπὶ τοῦ σχήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 309. Τὸ ᾧπερ ἔνεστι γωνία ὀρθὴ, τρίγωνον Ὀρθογώνιον καλεῖται. Τὸ δ' ᾧπερ ἀμβλεῖα, Ἀμβλυγώνιον. Ἐν ᾧ δ' ἂν τούτων οὐδετέρα ἐνείη, πᾶσαι δ' ὀξεῖαι, Ὀξυγώνιον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 310. Τὸ τετράπλευρον οὗ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ παράλληλοι, Παραλληλόγραμμον λέγεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 311. Ἐπὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τῶν γωνιῶν ἀεὶ αἱ τυχοῦσαι δύο, αἷς ἡ πλευρὰ κοινὴ, οἷον Α, Β, τῷ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν ἀθροίσματι ἴσαι εἰσίν. (§. 284.) Σχ. 26.

§. 312. Κἀντεῦθεν ἕπεται τὰς ἐπὶ τοῦ παραλληλογράμμου ἀπεναντίον κειμένας τῶν γωνιῶν, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, ἤτοι $Α = Γ$ καὶ $Β = Δ$. Καὶ γὰρ $Α + Β = Α + Δ$.

§. 313. Καὶ ἐὰν μία κατὰ τὸ παραλληλόγραμμον Α, γωνία ὀρθὴ ᾖ, ἔσονται ὀρθαὶ πᾶσαι. Ἡ μὲν γὰρ Β, ὅτι $Α + Β = 2\,O$. Ἡ δὲ Γ καὶ ἡ Δ, ὅτι ταῖς ὀρθαῖς ἀντικείμεναι εἰσί.

§. 314. Ἐὰν δὲ μία ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ γωνία πλαγία ᾖ, πλάγιαι ἔσονται καὶ αἱ λοιπαὶ πᾶσαι. Εἰ γάρ τις ἐν αὐταῖς ὀρθὴ, καὶ ἡ κατ' ἀρχὰς ληφθεῖσα ὀρθὴ ἂν εἴη.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 315. Τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ πᾶσαι αἱ γωνίαι ὀρθαὶ, λέγεται Ὀρθογώνιον, τὸ δ' ὀρθογώνιον καὶ τὰς πλευρὰς ἔχον ἀλλήλαις ἴσας, καλεῖται **Τετράγωνον**.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 27. §. 316. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ μὲν Β γωνία, ἴση ᾖ τῇ ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ γωνίᾳ β. Αἵτε πλευραὶ ὑφ' ὧν αἱ ἴσαι γωνίαι περιέχονται, ἀλλήλαις ἴσαι, οἷον ΑΒ = αβ, καὶ ΒΓ = βγ, ἔσονται καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις. ΑΓ = αγ, καὶ αἱ γωνίαι ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν Α = α, καὶ Γ = γ· Καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐφαρμόσει γὰρ πλευρὰ ἡ βγ πλευρᾷ τῇ ΒΓ, τοῦ β σημείου ἐπὶ τοῦ Β πίπτοντος· ἐφαρμόσει δὲ καὶ ἡ κατὰ τὸ β γωνία τῇ κατὰ τὸ Β. Καὶ πλευρὰ δὲ βα, πλευρᾷ ΒΑ. Τοιγαροῦν καὶ πλευρὰ αγ, πλευρᾷ ΑΓ ἐφαρμόσει· καὶ γωνία ἡ κατὰ τὸ α γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ Α· καὶ ἡ κατὰ τὸ γ τῇ κατὰ τὸ Γ. Καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβγ, ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 317. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἐὰν ᾖ καὶ ΑΒ = ΒΓ, κἀντεῦθεν καὶ αβ = βγ· ὅπερ ἐστὶν, ἐὰν τὰ τρίγωνα καὶ ἰσοσκελῆ ᾖ, προσεφαρμόσαι δυνή-

σεται

σεται οὐ μόνον τῆς βγ ἐπὶ τῆς ΒΓ πιπτούσης, ἀλλ᾽ ἔτι δὴ καὶ τῆς βα ἐπὶ τῆς ΒΓ. Καὶ ἔσαι δὲ οὐ μόνη ἄρα ἡ γωνία Γ, ἴση τῇ γ· ἀλλὰ καὶ ἡ Α = γ. Ἔνθεντοι καὶ ἡ Γ = Α· τουτέσιν ἐπὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἔσονται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 318. Ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, οὗ βάσις] ἡ ΒΓ, μιᾶς τῶν γωνιῶν δοθείσης, δίδονται πᾶσαι. Ἐὰν γὰρ ἡ Β δοθῇ, δοθήσεται καὶ ἡ ταύτῃ ἴση Γ· κἀντεῦθεν καὶ ἡ τρίτη Α. Ἐὰν δὲ δοθῇ ἡ Α, δοθήσεται καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν Β + Γ, οὗ τὸ ἥμισυ ἐσὶ Β, ἢ Γ (§. 302.). Σχ. 28.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 319. Ἐπὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, πᾶσαι αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσί· διὸ καὶ τούτων ἑκάση, ὅσα καὶ δύο τριτημόρια ὀρθῆς δύναται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 320. Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, δυσὶ ταῖς τοῦ αβγ ἴσαι ὦσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ πλευρὰ πλευρᾷ, αἱ ἐπίσης ταῖς ῥηθείσαις γωνίαις προσκείμεναι· ἔσονται δὴ καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι, ἀλλήλαις ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ τὸ ὅλον τρίγωνον τῷ ὅλῳ τριγώνῳ. Σχ. 29.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔσω γωνία Α ἴση γωνίᾳ α, καὶ Β = β, ἔσαι καὶ ὑπὸ ΒΓΑ = γ (§. 302.). Ἔσω καὶ πλευρὰ ΒΓ = βγ πλευρᾷ, αἱ δὴ πλευραὶ ἐπίσης ταῖς ἴσαις γωνίαις προσκείμεναι εἰσί· Φημὶ δὴ ὅτι καὶ ΒΑ = βα. Εἰ μὴ γάρ, ἔσω ΒΔ = βδ. Ἐπειδὴ οὖν καὶ Β = β, καὶ ΒΓ = βγ, ἔσαι καὶ ὑπὸ ΔΓΒ = γ (§. 316.). Ἀλλὰ καὶ ΑΓΒ = γ. Ἄρα ΔΓΒ = ΑΓΒ· ὅπερ ἀδύναἀδυνάτον. Ἔστιν ἄρα ΑΒ = αβ, κἀντεῦθεν καὶ ΑΓ = αγ. Καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον τῷ τριγώνῳ αβγ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 28. §. 321. Παντὸς τριγώνου ΑΒΓ, οὗ αἱ δύο τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ πλευραὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ΑΒ = ΑΓ. Καὶ ἔσαι ἰσοσκελές. Ἐντὸς γὰρ τῶν αὐτῶν περιγραφήσεται ὅρων τὸ τοιόνδε τρίγωνον ἀναστραφὲν, ὡς (τοῦ σημείου Α κατὰ χώραν μένοντος) τὸ μὲν Γ ἐπὶ τὸ Β πεσεῖν, τὸ δὲ Β ἐπὶ τὸ Γ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 322. Διὸ τὸ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 323. Τὰ τρίγωνα ὧν ἴσαι αἱ πλευραὶ ἑκάστη ἑκάστῃ, ἴσατε ἐστὶ, καὶ ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 30. 31. Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΒΔ, ὧν ἴσαι αἱ πλευραὶ ΑΒ = ΑΒ, ΑΓ = ΑΔ, καὶ ΒΓ = ΒΔ, οὕτω διατεταγμένα ὡς ἐπὶ τοῦ σχήματος φαίνεται. Καὶ ἀχθήτω ΓΔ. Ἔστι τοίνυν τῶν τριγώνων ἑκάτερον ΓΑΔ, ΓΒΔ ἰσοσκελές. Διὸ καὶ ὑπὸ ΑΓΔ = ΑΔΓ. Καὶ ΔΓΒ = ΓΔΒ (§. 317.). Ἄρα καὶ ὑπὸ ΑΓΒ = ΑΔΒ τὰ ἐκείνων κεφάλαια, ἢ αἱ διαφοραί. Καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΓΒ, ΑΔΒ, αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, ὑπὸ ἴσων περιέχονται πλευρῶν ΑΓ = ΑΔ, καὶ ΒΓ = ΒΔ· ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν (§. 316.).

ΠΡΟΒΛΗ-