ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ Α΄.

ΠΕΡΙ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 247.

Στερεὸν, ἤτοι σῶμα γεωμετρικὸν ἐςὶ τὸ πανταχόθεν ἐκτεταμένον. Πέρατα δὲ αὐτοῦ, ἤτοι ὅροι αἱ Ἐπιφάνειαι. Τῶν δὲ ἐπιφανειῶν αἱ Γραμμαί. Τῶν δὲ γραμμῶν τὰ Σημεῖα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 248. Τοῦ Σημείου οὔτε μέγεθος, οὔτε μέρος οὐδέν. Γραμμῇ δὲ μῆκος μὲν ἐςὶ, πλάτος δὲ, ἢ βάθος, οὔ. Ἡ δ' Ἐπιφάνεια καὶ μῆκος ἔχει, καὶ πλάτος, βάθος δὲ οὔ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 249. Τὶς δὲ ἡ Εὐθεῖα γραμμὴ καλουμένη, δῆλον. Καμπύλη δὲ γραμμὴ, ἧς οὐδὲν μέρος εὐθεῖα. Αἱ λοιπαὶ δὲ, εἴτε ἐξ εὐθειῶν, εἴτε ἐκ καμπύλων, εἴτε ἐξ εὐθειῶν καὶ καμπύλων, σύνθετοί εἰσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 250. Μεταξὺ δυοῖν σημείων εὐθεῖα διατείνει μία μόνη, καὶ αὕτη βραχυτάτη ἁπασῶν τῶν ἀπὸ θατέρε σημεία ἐπὶ θάτερον ἀποτεινομένων.

§. 251. Εὐθεῖαι δὲ δύο, δυσὶ σημείοις διαπερατέμεναι τοῖς αὐτοῖς, προσεφαρμόζεσίτε ἀλλήλαις, καὶ ἴσαι εἰσίν· ἄνισοι δὲ, ὧν τῇ ἑτέρα, ἐκ ἂν σημεῖα τὰ αὐτὰ πέρατα γένοιτο, ἃ τῇ ἑτέρᾳ. Ἐξ ἔ ἕπεται, καὶ τὸ πάσας ἔχειν τὰς ἴσας εὐθείας ἀλλήλαις προσεφαρμόζεσθαι.

§. 252. Ἡ δὲ εὐθεῖα ἀφ᾽ ἑκατέρε τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς περάτων ἀεὶ προάγεσθαι δύναται τέρματος ἄνευ, προαγωγῇ μέντοι καθ᾽ ἑκάτερον τῇ αὐτῇ. Ἐπεὶ δὲ διοσαὶ εὐθεῖαι, αἱ τοῖς αὐτοῖς ἐνδιῆχθαι δυσὶ σημείοις νοέμεναι, ἀλλήλαις προσεφαρμόζεσι, ἡ ἡ ἑτέρα ἄρα ἐξ αὐτῶν προαχθεῖσα, ἐπὶ τὴν ἑτέραν, ὅσον ἂν δέοι προαχθεῖσαν, ἐπιπεσεῖται. Καὶ ἐκ ἄρα εὐθεῖαι δύο, μέρος ἑαυτῶν ἐν δυσὶ σημείοις ἐναπειλημμένον κοινὸν ἔχειν πεφύκασιν· ἐδὲ κατὰ πλείονα ἑνὸς σημεῖα δι᾽ ἀλλήλων τεμνόμεναι χωρεῖν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 253. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐςὶν, ἡ πανταχόθεν ἐπ᾽ εὐθείας ἔτω προσκεκλιμένη, ὥςε τὴν ἐν δυσὶ τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείων ἐναπειλημμένην εὐθεῖαν γραμμὴν, ὁπωσεν προαχθεῖσαν, ὅλην πίπτειν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Λέγεται καὶ Ἐπίπεδον. Ἐπιφάνεια δὲ καμπύλη, ἧς ἐδὲν μέρος ἐπίπεδον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 254. Οἱ μὲν ἐν Γεωμετρεντες δι᾽ εὐθειῶν, ἢ καμπύλων τῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφομένων, ἐπιλυόμενοι τὰ προβλήματα, εὐλόγως δὴ τὲς τὰ αὐτῶν ςοιχειωθησομένες αἰτεντα, εὐθείας τε ἄγειν ἑτοίμως ἔχειν, ἀχθείσας δὲ, καὶ περαιτέρω προάγειν

γειν τῶν κατ᾽ ἐπίνοιαν ἀνατυπϐμενων ὡς οἷόν τ᾽ ἐλάχιςα διαφερϐσαις, καὶ οἵαις δ᾽ ἂν καὶ πρός γε τὴν αἴσθησιν εὐθυνομέναις ἐξείη προχεῖσθαι, ὡς δὴ καὶ πάντη εὐθείαις ἔσαις κατὰ πᾶσαν ἀκρίβειαν.

§. 255. Δυεῖν δὲ διαφόρων εὐθειῶν ἐπὶ τϐ δοθέντος ἐπιπέδϐ, διὰ τϐ αὐτϐ σημείϐ ἠγμένων, ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας κατὰ τὸ ῥηθὲν σημεῖον ὅτω τμηθήσεται, ὡς μέρος μὲν ἐπὶ τάδε, μέρος δ᾽ ἐπ᾽ ἐκεῖνα τῆς τεμνϐσης ἀπολαμβάνεσθαι.

§. 256. Ἐὰν δὲ τῆς πρὸς τῷ Α, ὑπὸ τῆς ΑΒ τμηθείσης εὐθείας, ὁτιϐν μέρος ληφθῇ τὸ ΑΓ, αὕτη δὴ ἡ ἀπὸ τϐ Α ἐπὶ τὸ Γ προηγμένη, τῆς ΑΒ διηνεκῶς ἀποςήσεται. Γίνεται γὰρ ἡ ΓΔ, ἡ ἐλαχίςη τῶν ἀπὸ τϐ πέρατος Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ πιπτϐσῶν, ἀεὶ μείζων τε καὶ μείζων, ὅσῳπερ ἂν μᾶλλον ἡ ΑΓ προάγοιτο. Τῆς τε ΑΓ, ὅσον ἄλις προαγομένης, καὶ ἡ ΓΔ, ἐφ᾽ ὅσον αὖτις καὶ βϐλοιτο, μεγεθυνεται. Σχ. 6.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 257. Δυεῖν εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ ἀπὸ τϐ αὐτϐ σημείϐ ἀχθεισῶν, ἡ ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν κλίσις **Γωνία** καλεῖται ἐπίπεδός τε καὶ εὐθύγραμμος. Εἰσὶ γὰρ καὶ καμπυλόγραμμοι γωνίαι, καὶ ἐκ ἐπίπεδοι. Τὸ δὲ Β σημεῖον ἀφ᾽ ὅ ἂν, ἢ πρὸς ὅ, αἱ Σχ. 7.
ΒΑ, ΒΓ εὐθεῖαι ἀχθεῖεν, **Κορυφὴ** λέγεται τῆς γωνίας. Αἱ δὲ εὐθεῖαι αὐταὶ ΒΑ, ΒΓ τῆς γωνίας **Σκέλη**, καὶ **Πλευραί**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 258. Τῇ δὲ γωνίᾳ μέγεθος ἀπονέμεται. Τὸ δὲ, ἐκ ἀπὸ τϐ μήκϐς ἤρτηται τῶν πλευρῶν, ἀλλ᾽ ἐκ τῆς κλίσεως μόνον τῆς ἑτέρας πρὸς τὴν ἑτέραν. Διὸ καὶ ἴσαι αἱ γωνίαι, αἳ ὅτως ἀλλήλαις προσαρμόζϐσαι, ὡς τῶν κορυφῶν συμπιπτϐσῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ, καὶ τῆς ἑτέρας τὰ σκέλη, ἐπιπίπτειν ἔχειν τοῖς τῆς

 ἑτέρας,

ἑτέρας, ὁποῖα δ᾽ ἂν ᾖ τὰ σημεῖα, ἐφ᾽ ἃ τὰ σκέλη ἀποτερματίζεται.

§. 259. Τῆς δὲ κατὰ τὴν γωνίαν ΑΒΓ κορυφῆς, τῇ κατὰ τὴν ΔΒΓ κορυφῇ ἐπιπιπτούσης, καὶ τοῦ σκέλους ΒΓ ἐκείνης, τῷ σκέλει ταύτης ΒΓ, ἐὰν τὸ λοιπὸν ΑΒ, τῷ λοιπῷ ΔΒ, μὴ συμπίπτῃ, μείζων μὲν εἰρήσεται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΒΓ, ἧς τὸ ΒΔ σκέλος, ἧττον τοῦ σκέλους ΒΓ ἀφέστηκεν. Αἱ γὰρ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΒΓ, ὧν ἡ ἑτέρα οὐκ ἐφαρμόζει τῇ ἑτέρᾳ, ἄνισοι εἰσίν· ἐξ οὗ ἕπεται ἁπάσας τὰς ἀλλήλαις ἴσας γωνίας ἔχειν καὶ προσεφαρμόζεσθαι.

§. 260. Πότερον δὲ ἐφαρμόσαι ἀλλήλαις ἔχουσι γωνίαι δύο ἐπίπεδοί τε καὶ εὐθύγραμμοι, ἢ οὐκ ἔχουσιν· εἰ δ᾽ ἐκεῖνο, ποτέρα τούτων ἡ μείζων, ἢ ἡ ἐλάσσων, εὖ μάλα ἂν ἐπιγνοίη πᾶς τις οὕτω συλλογισάμενος.

Σχ. 8. Τῶν προτεθεισῶν γωνιῶν τῆς μὲν ὑπὸ ΔΕΓ καταγεγράφθαι νοουμένης, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μὲν ἐκείνῃ ἐπιπέδου, οὕτω δέ τοι κινεῖσθαι ὑποτιθεμένης, ὡς ταύτης τὸ σκέλος ΒΓ ἀπὸ τοῦ ἐκείνης ΕΓ μηδέποτ᾽ ἀφίστασθαι· προσίτω ἔπειτα ἡ Β κορυφὴ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, τῇ Ε τῆς ὑπὸ ΔΕΓ. Ἐὰν οὖν τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ε προσπελάζοντος, ἡ ΑΒ πλευρὰ τῇ ΔΕ μὴ προσαντήσῃ, πρὶν ἡ κατὰ τὸ Β κορυφὴ, ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Ε κατὰ τὸ ἀκριβὲς γένοιτο, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, τῆς ὑπὸ ΔΕΓ μείζων οὐκ ἔσται· ἀλλ᾽ ἤτοι ταύτης ἐλάσσων, ἢ αὐτῇ ἴση. Καὶ ἐλάσσων μὲν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, τῆς ὑπὸ ΔΕΓ, ἐὰν τοῦ Β σημείου, ἐπὶ τὸ Ε γενομένου, ἡ ΑΒ, πλευρὰ κατὰ τὸ πρὸς Β μέρος προαχθεῖσα, διατέμνῃ προαχθεῖσαν τὴν ΔΕ· ἴσαι δὲ ἔσονται αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ, ἐὰν τοῦ Β πίπτοντος ἐπὶ τὸ Ε, ἡ πλευρὰ ΑΒ, μηδαμῶς οὕτω τέμνῃ τὴν ΔΕ, ἀλλ᾽ ἐπὶ τῆς αὐτῆς πίπτῃ. Ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ συναντήσῃ, πρὶν ἢ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἵκοιτο, ἡλίκον ἂν καὶ ᾖ τὸ διάστημα ΕΒ, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία,

γωνία τῆς ὑπὸ ΔΕΓ μείζων ἐστί. Εὔδηλον γὰρ ἐντεῦθεν, ὡς εἴπερ ἡ ΑΒ τῇ ΕΔ δεῆσαν προηγμένη, προσαντήσειε ποι, οἷον κατὰ τὸ Ζ, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, οὔτε τῇ ὑπὸ ΔΕΓ ἐφαρμόσαι δυνήσεται, οὔτε τῷ ἐν αὐτῇ μέρει.

§. 261. Ἐὰν οὖν διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Ζ, ὃ ἂν ἔξω ᾖ τῆς ΕΓ, διαχθῶσιν εὐθεῖαι δύο ΕΖ, ΒΖ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄμφω ΕΓ εὐθείας προσπίπτουσαι, ὥστε διστὰς ἀνακύπτειν γωνίας κατὰ μέρη τὰ αὐτὰ, τὴν μὲν ἐντὸς ὑπὸ ΖΕΓ, τὴν δὲ ἐκτὸς ὑπὸ ΖΒΓ, ἡ ἐκτὸς ἤδε τῆς ἐνδοτέρας ἐκείνης ἀεὶ μείζων ἐστί.

§. 262. Ἐὰν δὲ ἡ ΔΕ προαχθεῖσα προσπέσῃ τῇ πλευρᾷ ΑΒ, τοῦ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ σωζομένου μεγέθους, τὸ διάστημα ΕΒ αὔξειν ἢ μειοῦσθαι δυνήσεται, οὕτως ὥστε καὶ τὴν ΕΔ προαχθεῖσαν, ᾗ δέοι, τῇ ΑΒ ὁμοίως ᾗ δέοι προαχθείσῃ, προσαπαντᾶν. Κατὰ γὰρ τὸ Ζ φέρε σημεῖον ἡ ΕΖ ἀπαντῶσα, ᾗ προαχθείη, τὴν ΑΒ τεμεῖ, ἐντός τε τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας πίπτουσα, ἀπὸ τῆς ΑΒ γραμμῆς μᾶλλόν τε καὶ μᾶλλον ἀεὶ ἀποστήσεται (§. 256.)· ὅθεν ἐπιδήλως ἀναφαίνεται, εἴτε τῆς Β κορυφῆς, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, ὁπωσοῦν τῷ σημείῳ Ε προσιούσης, εἴτε καὶ τοῦδε ἀπωτέρω γινομένης, ἀεὶ τὴν ΕΔ προαγομένην, τῇ πλευρᾷ ΑΒ προσπίπτειν. Ἐπεὶ δὲ τούτου δὴ ἔτι καὶ ἔτι γινομένου ἡ ΕΒ ἐφ' ὁποσονοῦν μέγεθος καταστῆναι δυνήσεται, ἐντεῦθεν ἕπεται ἐκ τοῦ ἀκολούθου, ὡς εἴπερ ἡ ΕΔ, τέμνοι προαχθεῖσαν τὴν ΑΒ, ληφθείσης τῆς ΕΒ ὁποσησοῦν τὸ μέγεθος, καὶ ἡ ΑΒ, ἀπὸ τῆς ΕΔ προαχθείσης ἐξ ἀνάγκης τμηθήσεται, ὅσον ἂν καὶ προσαυξήσειε τῷ διαστήματι ΕΒ τὸ μέγεθος· εἰ μόνον τὰ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας ἀμεταποίητα σώζοιτο.

§. 263. Τούτοις τὸν νοῦν προσέχοντι ῥᾴδιον συνιδεῖν, ὡς ἐὰν κατὰ τὰ αὐτὰ εὐθείας τινὸς τῆς ΕΓ, δύο τεθῶσι γωνίαι, ὥσπερ ἤδη θέσεως ἔχουσιν αἱ ὑπὸ

ΔΕΓ, ΑΒΓ, ὧν ἡ ἐκτὸς μείζων τῆς ἐντὸς ὑπὸ ΔΕΓ· αἱ τῶνδε τῶν γωνιῶν πλευραὶ ΕΔ, ΒΑ, προαχθεῖσαι ἣν δέοι, συμπεσῦνται ἐξ ἀνάγκης, ὁποσῦν ἂν εἴη μεγέθυς ἡ ΕΒ, ἡ ἐν ταῖς τῶν γωνιῶν κορυφαῖς ἐναπειλημμένη. Συμπεσῦνται γὰρ αἱ ΑΒ, ΔΕ, τῆς κορυφῆς Β, καθάπερ ἐκτέθειται (§. 260.) τῇ Ε προσιέσης, πρὶν ἢ τὸ Β σημεῖον ἀφικέσθαι ἐπὶ τὸ Ε. Εἰ μὴ γάρ, ἐκ ἂν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, τῆς ὑπὸ ΔΕΓ μείζων ὑπάρξειεν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 264. Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ, εἰς εὐθεῖαν ἄλλω
Σχ. 9. ΓΔ ἐμπίπτυσα τὰς ἐφεξῆς δύο γωνίας ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσας ποιῇ, Ὀρθὴ ἑσᾶναι, ἢ **Κάθετος** ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ εἰρήσεται. Τῶν δὲ γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ τῶν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν περιεχομένων τῆς τε καθέτυ, καὶ τῆς ἐφ᾽ ἣν ἐφέσηκεν, ἑκατέρα **Γωνία ὀρθὴ** ὀνομάζεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 265. Ἐφ᾽ οἱασδήποτε εὐθείας ΓΔ, εὐθεῖα ἄλλη κάθετος ςαθῆναι δύναται, διὰ παντὸς ἀγομένη σημείυ Α, ἢ Β, τῦ ἐπιπέδυ ἐν ᾧ ἡ ΓΔ ἧκται. Καὶ τύτυ δή, πρός τε διαφερύσας εὐθείας, ἀπό τε διαφόρων ἐπ᾽ εὐθείας τῆς αὐτῆς σημείων, γινομένυ, ἅπασαι αἱ ἀνακύπτυσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ τῆς ὀρθῆς ἄρα μείζων, ἢ ἐλάσσων, ἐδεμιᾷ τῶν ὀρθῶν ἴση ἔςαι, ἐδ᾽ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, ὧν ἑτέρα ἐφ᾽ ἑτέρας ςαθείη κάθετος.

§. 266. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, εὐθεῖα
Σχ. 10. ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, ἀχθῇ δὲ διά τινος τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείων τῦ Δ, ἢ τῦ Γ, εὐθεῖα ἄλλη ΔΕ, ἢ ΓΖ, ἡ ἀχθεῖσα αὕτη ΔΕ, ἢ ΓΖ, ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετος ἐκ ἔςαι· ἐδὲ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΔΒ (§. 259.), ἐδ᾽ ἡ ὑπὸ ΓΖΒ (§. 261.) τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ὀρθῇ ἴση ἐςί.

Δύο

Δύο ἄρα εὐθεῖαι, αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν ΑΒ κάθετοι, οὐδέποτε ὑπ' ἀλλήλων τμηθήσονται, κἂν ἀπὸ τῆς ΑΒ προεκβληθῶσιν ἐπ' ἄπειρον.

§. 267. Εἴωθε δὲ μέτρου δίκην ἡ ὀρθὴ γωνία παραλαμβάνεσθαι, πρὸς ὅπερ ἂν τὰ τῶν λοιπῶν γωνιῶν μεγέθη παραβαλλόμενα ἐπικρίνοιτο. Διὸ καὶ συνεχέστερον ταῖς ἄλλαις γωνίαις παρατεθησομένη, συντομίας χάριν διὰ τοῦ Ο ἐφεξῆς ἡμῖν ὑποσημανθήσεται· τὸ δὲ κεφάλαιον τὸ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν, διὰ 2Ο· τὸ δ' ἐκ τεττάρων, διὰ 4Ο· καὶ τὰ λοιπά.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 268. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ εἰς εὐθεῖαν ἄλλην τὴν ΓΔ οὕτω προσπίπτουσα, ὡς τὰς ἐφεξῆς γωνίας ὑπὸ Σχ. 11. ΑΒΓ, ΑΒΔ ἀνίσους ποιεῖν, πρὸς τὴν ῥηθεῖσαν ΓΔ Πλαγία ἔσται· αἵτε ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ γωνίαι Πλάγιαι· ἐπεὶ δὲ τούτων ἡ μὲν ΑΒΓ μείζων τῆς ὀρθῆς ΕΒΓ, ἡ δὲ ΑΒΔ ἐλάσσων, ἡ μὲν μείζων Ἀμβλεῖα, ἡ δ' ἐλάσσων Ὀξεῖα ὠνόμασται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 269. Ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖα, τὴν ὑπὸ ΕΒΓ ὀρθὴν τοσῷδε ὑπερβάλλει, ὅσω γε ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὀξεῖα, ἡ ἐπὶ τῆς ΓΔ εὐθείας ἐκείνη ἐφεξῆς οὖσα, τῆς ὀρθῆς ΕΒΔ ἐλλείπει. Τῆς οὖν ὑπερβολῆς τὴν ἔλλειψιν ἀντικαθισώσης, τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κεφάλαιον, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἐστίν.

§. 270. Ἔνθεντοι ἐὰν ΓΒ, ΒΔ τὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΓΒΔ μέρη, γωνίαν νοῆται περιέχειν τὴν ὑπὸ ΓΒΔ, ἔσται δὴ ἡ τηλικαύτη γωνία, ὡς τῷ ἐκ ταῖν δυοῖν ΑΒΓ, ΑΒΔ κεφαλαίῳ ἐξισουμένη, καὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση. Τῶν δὲ λοιπῶν γωνιῶν ἡτισοῦν, δυεῖν ὀρθῶν ἤτοι ἐλάσσων, ἢ μείζων.

§. 271. Ἡ δυεῖν ὀρθῶν μείζων γωνία, ἔποτε ἐν χρήσει εἴωθε γίγνεσθαι, εἰμήτις ἄλλως χρεία τόδε ποτὲ ἐπιτάξειε. Καὶ ἀποχρώσης τοίνυν ὡς τὰ πολλὰ τῆς τῶν δυεῖν ὀρθῶν ἐλασσόνων γωνιῶν διασκέψεως, τὰς πλείες τῶν προτάσεων, ἐν αἷς περὶ τῶν γωνιῶν ὁ λόγος, κατ᾽ ἐκείνας δὴ τὰς γωνίας ἐνδεκτέον, αἳ δυεῖν ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσί. Καίπερ γὰρ δισσῶν ἐξαγομένων εὐθειῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σημείου, δύο ἀείποτε ἀνακύπτουσι γωνίαι, ὧν ἡ μὲν ἐλάσσων 2 Ο, ἢ γοῦν ἥκιστα μείζων· ἡ δὲ μείζων, ἢ γοῦν ἥκιστα ἐλάσσων· αὕτη γεμλὼ ἡ δευτέρα οὐδέποτε ἀντὶ τῆς πρώτης παραληφθήσεται, εἰμὴ παρὰ ταύτην, ἐκδοχὴν ἑτέραν ὁ νοῦς οὐκ ἐπιτρέπει ὁ τῆς προτάσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 12. §. 272. Εὐθεῖαι Παράλληλοι εἰσὶν, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἀγόμεναι, καὶ μηδέποτε ἀλλήλαις συμπίπτουσαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 273. Τοιαίδε αἱ ΑΒ, ΓΔ, αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν τρίτην ΕΖ οὖσαι πρὸς κάθετον, ἃς συμπεσεῖν μὴ ἔχειν ἐπὶ τὰ πρὸς Α, Γ προαχθείσας, κατείδομεν (§. 266.). Ἐὰν οὖν κἀπὶ τὰ πρὸς Β καὶ Δ προαχθῶσιν ἀντίθετα, ἡ ὑπὸ ΑΒΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἰσωθήσεται (§. 270.), καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΕ ὀρθῆς οὔσης, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ ὀρθὴ ἔσαι. Ἤτε ΒΗ πρὸς τὴν ΕΖ κάθετος, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΔΘ· οὐκ ἄρα οὐδ᾽ ἐπὶ τὰ πρὸς τάδε μέρη προαχθεῖσαι, αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθεῖαι, ἀλλήλαις συμπεσοῦνται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 13. §. 274. Ἐὰν πλείους εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τοῦ αὐ-

τοῦ

τοῦ ἀχθῶσι σημείου τοῦ Α· διαχθῇ δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ εὐθεῖά τις ἄλλη ἡ ΖΗ, αἱ ταύτῃ ἀνακύπτουσαι γωνίαι ὑπὸ ΖΑΒ, ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΗ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς ΖΗ εὐθείας μέρη, κεφάλαιον συναποτελοῦσιν ἴσον τῷ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν γωνιῶν. Ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα ΖΑΕ, ΕΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ τῶν γωνιῶν, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ΖΗ εὐθείας, κεφάλαιον, ἴσον τῇ ὑπὸ ΖΑΗ, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση ἐστίν (§. 270.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 275. Τὸ τοίνυν κεφάλαιον τὸ ἐξ ἁπασῶν τῶν γωνιῶν, ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΒ, τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσον ἐστί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 276. Κἀντεῦθεν ὁμοίως ἕπεται, καὶ ὅτι ἐὰν Σχ. 14.
τὴν αὐτὴν ΑΒ, εὐθεῖαι δύο ἄλλαι ΓΔ, ΕΖ πρὸς τοῖς Α καὶ Η σημείοις οὕτω τέμνωσιν, ὡς τὰς ὑπὸ ΔΑΒ, ΖΗΒ, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς εὐθείας ΑΒ, (ἤτοι τὴν ἐκτὸς ὑπὸ ΖΗΒ, τῇ ἐντὸς ὑπὸ ΔΑΒ) μὴ ἐξισοῦσθαι, αἱ ΓΔ, ΕΖ εὐθεῖαι, πρὸς θάτερα τῶν τῆς εὐθείας ΑΒ μερῶν συμπεσοῦνται. Ἐὰν γὰρ ἡ $ΔΑΒ < ΖΗΒ$, συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖναι ἐπὶ μέρη τὰ Δ, Ζ (§. 263.). Ἐὰν δὲ ἡ $ΔΑΒ > ΖΗΒ$, ἐπεὶ $ΔΑΒ + ΓΑΒ = 2O$, καὶ ὡσαύτως $ΖΗΒ + ΕΗΒ = 2O$· ἔσται ΓΑΒ, ἐλάσσων τῆς ΕΗΒ. Καὶ συμπεσοῦνται ἄρα αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι προαχθεῖσαι ἐπὶ θάτερα τὰ πρὸς Γ, Ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Σχ. 15. §. 277. Δυεῖν ἄρα εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπί τινος ἐπιπέδου διατεμνομένων, οὐκ ἂν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα τρίτη ἡ ΖΗ ἀχθείη, ἥτις μὴ τῇ ἑτέρᾳ τῶν προτέρων ΑΒ, ΓΔ, ἢ ἑκατέρᾳ συμπίπτοι προαχθεῖσα, ἣν δέοι, προαχθείσῃ. Ἐὰν γὰρ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἡ ΕΙ εὐθεῖα, ἡ τὴν ΖΗ, ὡς ἔτυχεν, οἷον κατὰ τὸ Θ τέμνουσα, ἐπάναγκες ἐστὶ θατέραν γοῦν τῶν ὑπὸ ΒΕΙ, ΔΕΙ, τῆς ὑπὸ ΗΘΙ, ἤτοι μείζονα εἶναι, ἢ ἐλάσσονα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 16. §. 278. Ἐὰν τέμνῃ εὐθεῖαν εὐθεῖα, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΒΕ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ κεφάλαιον, τῷ ἐκ τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΔΒΕ κεφαλαίῳ ἴσον. Τῆς οὖν κοινῆς ΑΒΔ ἑκατέρωθεν ἀρθείσης, ΑΒΓ = ΔΒΕ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

χ. 17. §. 279. Ἐὰν εἰς εὐθείας δύο τὰς ΑΒ, ΓΔ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ, ταῖς κατὰ τὰ Η καὶ Θ τομαῖς, τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΕΗΒ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ΕΘΔ ἴσην ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶν ὑπὸ ΑΗΖ, καὶ ΕΗΒ ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν (§. 278.), καὶ ΓΘΖ = ΕΘΔ, ἔσονται καὶ ὑπὸ ΑΗΖ, ΓΘΖ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐὰν οὖν αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι μὴ ὦσι παράλληλοι, συμπεσοῦνται προαχθεῖσαι,

θεῖσαι, ἤτοι ἐπὶ τὰ πρὸς Β, Δ, ἢ ἐπὶ τὰ πρὸς Α, Γ. Καὶ ἰὼ μὲν ἐπ' ἐκεῖνα, ἄνισοι ἔσονται αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΕΘΔ· ἢν δ' ἐπὶ ταῦτα, ἄνισοι ἔσονται αἱ ὑπὸ ΑΗΖ, ΓΘΖ (§. 261.). Οὐκ ἄρα συμπεσῦνται, ὅπως ἂν καὶ προαχθεῖεν, ἀλλὰ παράλληλοι ἔσονται (§. 272.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 280. Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΓΔ, ὡς εἴρηται τεμνομένων, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΗΖ, ΕΘΔ ἴσαι ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. Ἐπειδὴ γὰρ ΑΗΖ = ΕΗΒ, ἐὰν καὶ ΑΗΖ = ΕΘΔ, ἔσαι καὶ ΕΗΒ = ΕΘΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 281. Καὶ ἐὰν αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ αἱ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ὦσι, παράλληλοι ὡσαύτως ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. Ἐπειδὴ γὰρ ΑΗΘ + ΘΗΒ = 2Ο (§. 274.), ἔσαι ΑΗΘ + ΘΗΒ = ΘΗΒ + ΗΘΔ· καὶ τῆς κοινῆς ἐκ μέσυ γενομένης ΘΗΒ, ΑΗΘ = ΗΘΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 282. Ἡ εἰς τὰς παραλλήλες ΑΒ, ΓΔ, ἐμπίπ]ισα εὐθεῖα ΕΖ, καὶ ταύτας κατὰ τὸ Η καὶ Θ τέμνεσα, τὰς ὑπὸ ΕΗΒ, καὶ ΕΘΔ (τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη) ἴσας ἀλλήλαις ποιήσει. Σχ. 17.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ μὴ γὰρ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΕΘΔ ἴσαι, προαχθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπὶ τάδε, ἢ τάδε τῆς εἰς αὐτὰς ἐμπιπλέσης ΕΖ συμπεσῦνται (§. 276.). Καὶ ὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 283. Ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ, τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἴση, τῶν αὐτῶν τεθέντων, καὶ ὑπὸ ΑΗΖ, τῇ ἐναλλὰξ ἀντιθέτῳ ΕΘΔ ἴση ἐςί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 284. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ, τῇ ὑπὸ ΖΗΒ προςεθεῖσα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας συναποτελεῖ (§. 274.)· ἐὰν ἀντὶ ταύτης, ἡ ὑπὸ ΕΘΔ τῇ ὑπὸ ΖΗΒ ἐπιπροςεθῇ, τό προκύπτον κεφάλαιον ΗΘΔ+ΘΗΒ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἔςαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 285. Ἡ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων κάθετος, κἀπὶ τῆς ἑτέρας αὐτὸ τῦτο ἔςαι. Ἔνθεντοι καὶ εὐθεῖαι δύο, αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν τρίτην ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἐπιπέδυ παράλληλοι, καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσίν.