ΤΜΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 206.

Στίχος ἐστὶν ἀριθμῶν πληθύς, κατά τινα κοινὸν νόμον ἀλλήλοις ἐφεπομένων. Λέγεται δὲ καὶ πρόοδος. Καὶ Ἀριθμητικὴ μὲν ἡ πρόοδος καθ᾽ ἣν τῶν ἡγουμένων ἀριθμῶν ἕκαστος, τοῦ ἀμέσως ἐφεπομένου ἐπίσης διαφέρων ἐστί. Γεωμετρικὴ δὲ καθ᾽ ἣν ὁστισοῦν τῶν ἡγουμένων ὅρων, πρὸς τὸν ἀμέσως αὐτῷ ἐφεπόμενον, τὸν αὐτὸν ἀείποτε λόγον ἔχων ἐστίν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 207. Παρὰ δὴ τούτους καὶ στίχοι ἕτεροι ὑπὲρ ἀριθμὸν ἂν συσταῖεν, ἐν οἱῳδήποτε νόμῳ τεθέντι, καθ᾽ ὃν ἂν χωροίη τὰ τῆς προόδου. Μεταξὺ μὲν οὖν τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ὅδε ὁ στίχος ἐστὶν 1, 2, 3, 4, 5, 6 κτξ. ἐν ᾧ οἱ ἐγκείμενοι ἀριθμοὶ φυσικῇ ἀλλήλους τῇ τάξει ἐπιδιαδέχονται, ἥ, τε ἐν δυσὶ τούτων ἑκάστοις διαφορὰ ἀμέσως ἐκτασσομένων, ἐστὶ 1. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ δὲ γένους καὶ ὁ στίχος 0, 2, 4, 6, 8, 10, κτξ. καὶ ὅδε 1, 3, 5, 7, 9, 11, κτξ. ἐν οἷς ἡ τῶν ἑξῆς ἀμέσως διαδεχομένων ὅρων διαφορὰ ἐστὶ 2. Καὶ ἄλλοι δὲ ἀνάριθμοι. Στίχοι δὲ γεωμετρικοὶ οἵδε· 1, 2, 4, 8, 16, 32, κτξ. Καὶ 1, 3, 9, 27, 81, 243, κτξ. Καὶ 2, 3, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{81}{8}$, $\frac{243}{16}$· καὶ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἄλλοι.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 208. Ἡ μὲν οὖν ἀριθμητικὴ πρόοδος δίδοται, ἑνός τινος τῶν κατ' αὐτὴν ὅρων διδομένου, καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ προσεχοῦς ὅρου διαφορᾶς διοριζομένης. Ἐντεῦθεν γὰρ τῆς διαφορᾶς προστιθεμένης, ἢ ὑφαιρουμένης, ἅπαντες παράγεσθαι οἱ ἑξῆς ὅροι δυνήσονται, οἵτε τῷ δοθέντι ὅρῳ ἑπόμενοι, καὶ οἱ τούτου ἡγούμενοι, προαγομένης κατὰ τὸ συνεχὲς ἑκατέρωθεν τῆς προόδου ἐπ' ἄπειρον· οὕτω δοθέντος τοῦ ὅρου 7, καὶ τῆς διαφορᾶς τεθείσης 3, προκύψουσιν ὅροι, οἱ μὲν τοῦ 7 μείζονες 10, 13, 16, 19, 22, κξ. οἱ δὲ ἐλάσσονες, 4, 1, − 2 − 5 − 8, κξ. Δυνατὸν δὲ τὸν διδόμενον ὅρον καὶ κλασματικὸν εἶναι, ἢ ἄλογον· ὁμοίως δὲ καὶ τὴν διαφοράν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 209. Ἔστω Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μέρος ἀριθμητικῆς προόδου εἰς ἄπειρον ἑκατέρωθεν προακλέας ὁποιασοῦν. Ἔσται δὲ ἡ τῶν ὅρων Α καὶ Γ διαφορά, ἐν οἷς ἂν ὅρος εἷς ὁ Β μεσολαβοίη, διπλῆ τῆς τῶν Α, καὶ Β, ἢ Β καὶ Γ. Ἡ δὲ τῶν ὅρων Α καὶ Δ, ἐν οἷς οἱ μεσολαβοῦντες δύο, τριπλῆ. Ἡ δὲ τῶν Α καὶ Ε, ἐν οἷς τρεῖς, τετραπλῆ. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 210. Ἔνθεντοι ἐὰν ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὑπεξενεχθῶσιν ὅροι τινες ὁποιοιποτοῦν, ὧν μέντοι ἀπὸ τοῦ προσεχοῦς εἴη ἐπίσης ἕκαστος ἀφιστάμενος, παρέξουσι δὴ καὶ οὗτοι παραπλησίαν τὴν πρόοδον· οἷον ἐπὶ τῆς προόδου, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, προσληφθέντων τῶν 1, 4, 7, 10, 13, 16.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§ 211. Δυοῖν ὁποιωνοῦν ὅρων δοθέντων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τῶν ἐν

τοῖς

τοῖς δοθεῖσι μεσολαβέντων, δοθήσεται καὶ ἡ πρόοδος· οἷον ἐὰν ᾖ αὕτη, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ κξ., ἧς οἱ ὅροι συνεχῶς μεγεθύνοιντο καθ' ὑπόθεσιν, τῷ λόγῳ τῆς ἀπὸ τοῦ ὅρου Α ἀποστάσεως· δοθῶσι δὲ οἱ ὅροι Α καὶ Ζ, ὅ, τε ἀριθμὸς τῶν ἐν τούτοις μεσολαβέντων = 4, ἔσται (§. 209.) $Β - Α = \frac{Ζ - Α.}{5}$ τοιγαροῦν δοθήσεται Β − Α. Διὸ τῆς τῶν ἔγγιστα ὅρων διαφορᾶς ταύτης τῷ πρώτῳ Α, προστεθείσης, προκύψει ὁ δεύτερος Β, κἀντεῦθεν καὶ ὁ Γ ὁμοίως, καὶ οἱ λοιποί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 212. Ἐντεῦθεν ἐμπαραβύεσθαι, καὶ ἡ ἀριθμητικὴ δυνήσεται πρόοδος. Τὸ δὲ ἐμπαραβύεσθαι, τὸ δυοῖν ἐστὶ μεταξὺ τῶν κατ' αὐτὴν ὁποιωνοῦν ὅρων, ὅρους ἄλλους ἐμπαρεισάγεσθαι, ὑφ' ὧν ἂν μετὰ τῶν προτέρων, καινή τις πρόοδος ἀριθμητικὴ ἀναφύοιτο. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀνιούσης προόδου Α, Β, Γ, ἣν ἀνετυπωσάμεθα, μεταξὺ δυοῖν ὅρων Α καὶ Β, δεήσῃ τρίτον ἐμπαραβύσαι, ἔσται ἡ τούτου ἀπὸ τοῦ Α διαφορά, ἥδε $\frac{Β - Α}{2}$, ἥτις τῷ ὅρῳ Α ἐπιπροστεθεῖσα, τὸν μέσον παρέξεται $= Α + \frac{Β}{2} - \frac{Α}{2} = \frac{Α}{2} + \frac{Β}{2}$, ἤτοι $\frac{Α + Β}{2}$, τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὅρων Α + Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ.

§. 213. Ἡ δὲ δὴ γεωμετρικὴ πρόοδος δίδοται, δοθέντος οὑτινοσοῦν τῶν ὅρων, καὶ τοῦ λόγου ὃν ἔχει πρὸς τὸν αὐτῷ ἔγγιστα. Τοῦ γὰρ τοιοῦδε λόγου διὰ πάσης τῆς προόδου τοῦ αὐτοῦ σωζομένου (§. 206.) δυνατὸν τὸν τῷ δοθέντι, ἢ εὑρεθέντι προσεγγίζοντα ὅρον, διὰ τοῦ τῶν ἀναλογιῶν κανόνος λαμβάνεσθαι· οἷον ἐὰν ὁ λόγος ᾖ 3 : 5, ὑποκέηται δ' ὅρος ὁ 45, ἔσται

ἔσται δὴ ὁ τούτῳ προσεχὴς $\frac{45 \times 5}{3} = 75$. Ὁ δὲ τούτῳ ἐφεπόμενος $\frac{75 \times 5}{3} = 125$. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς· τοῦ δὲ ὅρου 45 ἐπὶ τῆς προόδου ἡγεῖται $\frac{45 \times 3}{5} = 27$. Καὶ τούτου δὲ $\frac{27 \times 3}{5} = \frac{81}{5}$. Καὶ τούτου δ' ἔτι $\frac{243}{25}$. Καὶ ἔτι $\frac{729}{125}$, καὶ $\frac{2187}{625}$ κξ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 214. Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, γεωμετρικῆς τινος προόδου μέρος ᾖ, τῆς ἑκατέρωθεν ἐς ἄπειρον προελευσομένης, ἔσται ὁ λόγος Α : Γ διπλασίων τοῦ Α : Β· καὶ ὁ Α : Δ, τριπλασίων· καὶ ὁ Α : Ε, τετραπλασίων· καὶ οὕτως ἐφεξῆς (§. 167.)· ὡσαύτως δὲ, καὶ ὁ λόγος Ζ : Δ, διπλασίων ἔσται τοῦ Ζ : Ε, ἢ Β : Α· ὁ δὲ Ζ : Γ, τριπλασίων· ὁ δὲ Ζ : Β, τετραπλασίων· ὁ δὲ Ζ : Α, πενταπλασίων. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 215. Ἐπειδὴ δὲ οἱ τοῦ αὐτοῦ λόγου διπλασίονες, τριπλασίονες, καὶ ἁπλῶς οἱ ἰσοπολλαπλασίονες, ὁποῖοι δ' ἂν ὦσιν, ἀλλήλοις ἴσοι εἰσὶν (§. 82.), ἐὰν ἐκ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἐξαιρεθῶσιν ὅροι οἵτινεσοῦν, ἐπίσης ἀλλήλων ἀπέχοντες, δώσουσι δὴ καὶ οὗτοι πρόοδόν τινα γεωμετρικήν· οὕτως ἐὰν ἀπὸ τῆς προόδου $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ὑπεξαιρεθῶσιν οἱ παρ' ἕνα ἐναλλὰξ, ἀναφυήσεται καινή τις πρόοδος γεωμετρική, ἥδε· $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32.

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ.

§. 216. Δυοῖν δοθέντων ὅρων ὁποιωνοῦν, τῶν ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, συνάμα τῷ ἀριθμῷ τῶν ὅρων, τῶν ἐν αὐτοῖς διειλημμένων, διορισθήσεται καὶ τὰ-

τὰ τῆς προόδου, εὑρεθῆναι δὲ οὐ δυνήσεται, εἰ μὴ παρὰ τοῦ διὰ τῶν διπλασιόνων, τριπλασιόνων, καὶ ἁπλῶς τῶν ἰσοπολλαπλασιόνων ὁποιωνοῦν εἰδότος, τοὺς ἁπλοῦς τῶν λόγων ἐξευρίσκειν, ὧν ἐκεῖνοι πολλαπλασίονες εἰσί. τουτέστι τοὺς τῶν δοθέντων ὑποδιπλασίονας, ὑποτριπλασίονας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὁ δ᾽ αὐτὸς καὶ τὴν δοθεῖσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἐμπαραβύσει, ὁπόσοι ἂν ποτ᾽ αὐτῷ ἐπιταχθεῖεν, μεταξὺ δυοῖν ὁποιωνοῦν τῶν ἐν αὐτῇ ὅρων, τοσούτους ἐπεμβαλὼν ὅρους ἑτέρους (§. 192.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.

§. 217. Ἣν δὲ γεωμετρικὴν πρόοδον ἐμπαραβύσαι δέοι, ἑνὸς μόνου ὅρου, μεταξὺ δυοῖν ἑκάστων τῶν ἐν αὐτῇ ἐπεμβαλλομένου, τοῦτο διὰ τῶν ἀποδειχθέντων ῥᾷστα γενήσεται, μόνου τοῦ ἀναλόγου μέσου ἐκείνων μεταξὺ παρεισαγομένου (§. 193.). Οὕτω τὴν πρόοδον $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32 ἐμπαραβύσαι ἔνι, τῇ μεταξὺ τῶν ὅρων $\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{1}{2}$ παρεμπτώσει τοῦ ὅρου $\frac{1}{4}$, ὃς ἐκείνων ὁ μέσος ἐστὶν ὁ ἀνάλογος· μεταξὺ δὲ τῶν $\frac{1}{2}$ καὶ 2, τοῦ 1, τοῦ καὶ αὐτοῦ κατ᾽ ἀναλογίαν ἐν τούτοις μεσιτεύοντος. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Εἰ μὴ δόξειε μᾶλλον τοῦ λόγου τοῦ μεταξὺ τοῦ ἡγουμένου τε καὶ τοῦ ἑπομένου ἐπὶ τῆς προόδου τῆς ἤδη ἐμπαραβυσθείσης (ὃς ὧδε ἐστὶν 1 : 2) διὰ τοῦ πρώτως εὑρεθέντος ὅρου $\frac{1}{4}$, καὶ τοῦ ἡγουμένου $\frac{1}{8}$, ἢ τοῦ ἑπομένου $\frac{1}{2}$, ἤδη δοθέντος, εἶτ᾽ ἀπ᾽ ἐκείνου ἐφεξῆς τοῦ ὅρου τὴν πρόοδον προαγαγεῖν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 218. Ἐὰν ὁ λόγος A : B ἐξ ἄλλου ἀνακύπτων τοῦ α : β νοῆται, τούτου διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου, ἢ ὁπωσοῦν ἄλλως πολλαπλασιαζομένου, τὸ ἐπίσημον τοῦ ὑψώματος τοῦ λόγου A : B, πρός γε τὸν προσληφθέντα α : β, Λογάριθμος τοῦ λόγου ἐκείνου λέγεται τοῦ A : B· ὡς ἐὰν ὁ λόγος A : B διπλα-

διπλασίων ᾖ τοῦ α : β, ἤ, ἐὰν ἐκεῖνος τούτου δὶς ὑπέρτερος ᾖ, ἔσαι λογάριθμος τοῦ λόγου Α : Β, ὁ ἀριθμὸς 2. Ἐὰν δὲ Α : Β πενταπλασίων ᾖ τοῦ α : β· ἢ ἐὰν τὸ τοῦ Α : Β ὕψωμα πενταπλάσιον ᾖ τοῦ ὑψώματος τοῦ α : β, ἔσαι ὁ λογάριθμος τοῦ Α : Β, ὁ ἀριθμὸς 5. Καὶ οὕτω κἀν τοῖς λοιποῖς.

§. 219. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τοῦ λόγου Α : Β, τοῦ οὕτως ἐκ τοῦ α : β προκύπτοντος, ὁ μὲν Α ἀριθμὸς ᾖ, ὁ δὲ Β μονὰς, ὁ τοῦ λόγου τοῦδε Α : Β Λογάριθμος, καὶ τοῦ **ἀριθμοῦ Α Λογάριθμος** εἰρήσεται ὁ αὐτός.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 220. Ἔνθεντοι, ἐὰν ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου τῆσδε, Α : Β : Γ : Δ : Ε : Ζ ὁ λόγος ἑκάσου τῶν ὅρων πρὸς τὸν ἑπόμενον, Α : Β, ἢ Δ : Ε, ἢ Ε : Ζ, ὡς ἁπλοῦς νομίζηται, ἔσαι λογάριθμος τοῦ λόγου, παντὸς ἡγουμένου Α πρὸς τὸ, παρ᾽ ἕν, ἑπόμενον Γ, ὁ ἀριθμὸς 2. Καίγε ὁ τοῦ αὐτοῦ ὅρου Α, πρὸς τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ τρίτον Δ, ὁ 3 (§. 214.). Καὶ ἐν γένει ληφθέντος τοῦ λόγου δυοῖν ὡντινωνοῦν ἐπὶ τῆς προόδου ὅρων Α : Ζ, τῷ λογαρίθμῳ τοῦ τοιοῦδε λόγου Α : Ζ διασημανθήσεται, πηλίκος ὅρος τῶν ἐν τῇ προόδῳ, ὁ τοῦ λόγου ἑπόμενος ἐσὶν ἀπὸ τοῦ ἡγουμένου· ἤ, πηλίκοις ὅρων διασήμασιν ὁ Ζ ἀπὸ τοῦ Α ἀφέσηκε. Κἀντεῦθεν ἕπεται καὶ τὸ αὐτὸ ἔσεσθαι μέγεθος τοῦ λογαρίθμου τοῦ λόγου Ζ : Α, τῷ τοῦ ἀνάπαλιν Α : Ζ· οἱ γὰρ ἀπὸ Ζ πρὸς Α κατὰ τὴν πρόοδον ὅροι, τοῖς ἀπὸ Α πρὸς τὸ Ζ ἰσάριθμοι εἰσίν. Ἀλλ᾽ ἅπερ ἄρα ὁ ὅρος Ζ ἕπεται τῷ Α, ὁ Α δήπου τοῦ Ζ ἡγήσεται. Καὶ ἔσιν ἡ ὁδὸς καθ᾽ ἣν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Α ἐπάνιμεν, ὑπεναντία τῇ καθ᾽ ἣν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ζ προβαίνομεν. Τοιγαροῦν τῶν οὕτως ἐχουσῶν ποσοτήτων τῆς καταστάσεως διὰ τῶν σημείων τῶνδε +, −, διακρίνεσθαι φιλούσης (§. 42.). Ἐὰν ὁ λογάριθμος τοῦ λόγου Α : Ζ λέγηται + 5, ὁ τοῦ

τοῦ ἀνάπαλιν Ζ : Α ἔςαι − 5· καὶ καθόλου, οἱ δυοῖν λόγων λογάριθμοι, ὧν ἅτερος θατέρου ἀνάπαλιν ἐςὶ, μεγέθει μὲν οὐδαμῶς, μόνοις δὲ τοῖς σημείοις διοίσουσιν, οἷς τὰ θετικὰ τῶν ἀποφατικῶν ἀντιδιαςέλλεται. Διὸ καὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ λόγου Α : Β, ἢ Δ : Ε ὄντος + 1, ὁ τοῦ Β : Α, ἢ Ε : Δ, ἔςαι − 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 221. Ἐὰν ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου τῆς ἀπὸ μονάδος αὐξανούσης, ἑκάςῳ τῶν ὅρων ἀριθμοὶ προσεπιγραφῶσιν, ὡς ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς Σχήματος·

1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20

νοῆται δὲ ὁ ἑκάςου τῶν ἐπὶ τῆς προόδου ὅρων λόγος, πρὸς τὸν ἔγγυς ἡγούμενον ἁπλοῦς εἶναι, ἔςαι ὁ ἀριθμὸς ὁ τῷ ὅρῳ προσεπιγραφεὶς, λογάριθμος αὐτοῦγε τούτου τοῦ ὅρου, ἅτε δὴ λογάριθμος ὢν τοῦ λόγου, ὃν ὁ τοιόσδε ὅρος πρὸς τὴν μονάδα ἔχων διατελεῖ. Οὕτως οὖν ὁ λογάριθμος τοῦ ὅρου 2, ἐςὶ 1· ὁ δὲ τοῦ 32, ἐςὶ 5· ὁ δὲ τοῦ 524288, ἐςὶ 19.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 222. Τοῦ δὲ λόγου, ἑκάστου τῶν ἐν τῇ προόδῳ ὅρων πρὸς ἕνα τινὰ τῶν ἡγουμένων, ὁ λογάριθμος προκύψει, τοῦ κατὰ τὸν ἐλάσσονα τῶν ὅρων, ὃς ἐν τῇ προόδῳ ἡγεῖται, λογαρίθμου, ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν μείζονα, ὃς ἕπεται, ὑφαιρουμένου. Ἐὰν οὖν λ μὲν ᾖ τοῦ λογαρίθμου ἐπίσημον, Μ δὲ ὁ κατὰ τὴν πρόοδον μείζων ὅρος, Ε δὲ ὁ ἐλάσσων, ἔσται δή, $\lambda(M:E) = \lambda M - \lambda E$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 223. Τοῦ δὲ λόγου Ε : Μ, ὃς ἂν ᾖ τοῦ προτέρου ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος ἴσος ἐστὶ τῷ τοῦ Μ : Ε ἀποφατικῶς ληφθέντι (§. 220.), καὶ αὐτοῦ ὡσαύτως ὁ λογάριθμος προκύψει, ἐὰν ὁ τοῦ ὅρου Μ λογάριθμος τοῦ ἐν τῷ λόγῳ ἑπομένου, τῷ σημείῳ − μετὰ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐν τῷ λόγῳ ἡγουμένου Ε ὅρου, συναφθῇ· ὥστε γενέσθαι $\lambda(E:M) = \lambda E - \lambda M$. Ἡ γάρτοι διαφορὰ $\lambda E - \lambda M$, τῇ προτέρᾳ $\lambda M - \lambda E$, ἴση μὲν ἐστίν, ἀλλ᾽ ἐπεὶ $\lambda M > \lambda E$, τὸ μὲν $\lambda E - \lambda M$ ἀποφατικὸν ἔσται, τὸ δε $\lambda M - \lambda E$, θετικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 224. Ἔνθενδε τῶν ἐν (§. 221.) προσληφθέντων, ὁποῖος δ᾽ ἂν ᾖ ὁ λόγος Α : Β, ἔσται ἐν γένει ὁ ἐκείνου λογάριθμος, ἤτοι $\lambda(A:B)$, ἴσος τῷ προκύπτοντι ἐὰν ληφθῇ $\lambda A - \lambda B$. Ἀλλὰ μὴν $A : B = \frac{A}{B} : 1$ (§. 164.). Ἔστι δὲ ὁ λογάριθμος τοῦ λόγου $\frac{A}{B} : 1$, λογάριθμος τοῦ κλάσματος $\frac{A}{B}$ (§. 219.). Ἄρα καὶ ὁ τοῦ κεκλασμένου ἀριθμοῦ λογάριθμος προκύψει, ἐὰν τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμητοῦ λΑ, ὁ τοῦ παρονομαστοῦ λΒ, διὰ τοῦ σημείου − ἐπισυναφθῇ, ὧδε λΑ − λΒ. Καὶ ἔσται ὁ λογάριθμος οὗτος καταφατικὸς, ἐὰν Α > Β, τουτέστιν ἐὰν νόθον τὸ κλάσμα ᾖ· ἀποφατικὸς δὲ, ἐὰν Α < Β· τουτέστιν ἐὰν ᾖ τὸ κλάσμα γνήσιον. Ἐν γένει δὲ

$$\lambda \frac{A}{B} = - \lambda \frac{B}{A}.$$ ὅτι $\lambda \frac{A}{B} = \lambda (A : B)$, καὶ

$$\lambda \frac{B}{A} = \lambda (B : A).$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 225. Ἐὰν πρόοδος γεωμετρικὴ ἄλλη τε καὶ ἄλλη ληφθῇ, παραπλησίως καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν αὐτῶν λόγων τραπήσονται. Καὶ ἔστιν ἄρα ἐπέκεινα πέρατος ἃ τῶν λογαρίθμων κατασκευασθῆναι δύναται τὰ συστήματα. Οὕτως ἐὰν ἀντὶ τοῦ 1 : 2 λόγος ἁπλοῦς τεθῇ ὅδε 1 : 4, ὥστε πρόοδον ἀνακύπτειν τὴν 1 : 4 : 16 : 64 : 256, ὁ λογάριθμος τοῦ 256, ὃς ἐπὶ τοῦ ἄχρι τοῦδε ὑποκειμένου συστήματος ἦν 8, ἔσται ἤδη 4. Καὶ ἐν γένει οἱ τοῦ προτέρου συστήματος λογάριθμοι, τῶν τοῦ καινοῦ τοῦδε, ἔσονται διπλοῖ· λέγω δὴ τῶν τοῖς αὐτοῖς ἀριθμοῖς προσεπανηκόντων.

§. 226. Οἱ λογάριθμοι οἱ Βριγγιανοὶ (ὡς ἀπὸ τοῦ εὑρόντος) καλούμενοι, οἷς σχεδὸν μόνοις τυγχάνομεν χρώμενοι, ἐκ τῆς γεωμετρικῆς ἐλήφθησαν προόδου, καθ᾽ ἣν ἀπὸ μονάδος ἄχρι 10, ὅροι ἐμφιλοχωροῦσιν 10000000. Διὸ καὶ ἰσάριθμοι ἔσονται οἱ ὅροι, καὶ ἀπὸ 10, ἄχρις 100· ἀπὸ 100, ἄχρι 1000· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ ἔσται τοῦ μὲν ἀριθμοῦ 10 λογάριθμος, ὁ 10000000· τοῦ δὲ 100, ὁ 20000000· τοῦ δὲ 1000, ὁ 30000000. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Πολλῷ δὲ προσφυέστερον αἱρήσεται ἐπὶ τοῦ τοιοῦδε συστήματος, 1 μὲν εἶναι τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 10, 2 δὲ τοῦ 100, 3 τοῦ 1000, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οὗ δὴ κειμένου οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν κατὰ πρόοδον δεκαδικὴν 1, 10, 100, 1000, 10000,