

δων ιτ, λχ έναπολαμβανομένον (1). Καὶ εὐτεῦθεν ἑτέρα ἀποφέρεται μέθοδος τῆ οἰαδήτινα τῆς Σφαίρας τμήματα καταμετρεῖν.

Οἷον εἰάν ζητῆται ἡ καταμέτρησις τῆ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων ξρ, οκ έναπολαμβανομένον Τμήματος ξοκρ, ἀφηρήσῃ τῆ Κυλίνδρου λτ ὁ κολοβὸς Κῶνος οΑΕκ. Εἰάν δὲ ζητῆται ἡ τῆ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων μν, ξρ έναπολαμβανομένον Τμήματος μξρ, ὑφηρήσῃ τῆ Κυλίνδρου μχ ὁ Κῶνος ΑαΕ.

## Σ χ ό λ ι ο ν .

Ὅσον Ἀρχιμήδης τῷ παρόντι ἐπιγὰλλετο Θεωρήματι, ἀπόδειξις ἐστίν, ὅτι τῷ ἰδίῳ τάφῳ Σφαῖραν εἰς Κύλινδρον ἐγγεγραμμένην ἐπιδέσθαι ἠξίωσε· ἢ τῆτο ἴσως δι' ὅτι τὸν αὐτὸν λογικὸν λόγον ἔντε τοῖς σώμασι τέτοις ἢ ταῖς ὑφ' ὧν αὐτὰ τὰ σώματα περιέχεται, ἐπιφανείαις ἐνορῶν, τάυτην μᾶλλον, ἢ τινὰ ἄλλην τῶν τοσήτων αὐτῆ ἢ τηλικύτων εὐρέσεων ἠγάσαστο. Τοιαύτη μὲν τοι ταυτότης παθῶν ἔντε δακτυλίοις ἢ δακτυλίων ἐπιφανείαις δέδεικται ἢ ἡμῖν αὐτοῖς ἐν τῷ Δ'. Βιβλίῳ τῶν κυλινδρικῶν ἢ δακτυλιακῶν (Προτ. 13. 14. 15.)· ἢ μὴν ἀλλὰ ἢ ἐπὶ τῆς Σφαίρας αὐτῆς ἢ ἕτερον εὐρηται ἡμῖν, ἢχ ἡττον ἐπίσημον· τῆτο δὲ ἐστίν, ὅτι ὡσπερ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς τὸν αὐτὴν περιλαμβάνοντα ὀρθὸν Κύλινδρον, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν ἢ τὴν ἐπιφάνειαν (ὅς ἐστὶ ἐξ ἀνάγκης ἰσόπλευρος), ὃν ὁ 2 πρὸς τὸν 3· ἢτως ἡ αὐτὴ λόγον ἔχει πρὸς τὸν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον Κῶνον, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν ἢ τὴν ἐπιφάνειαν, ὃν ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 9· ἐξ οὗ δὴ ἔπεται ὅτι ὁ ἡμιόλιος λόγος, ὁ μεταξὺ Σφαίρας ἢ Κυλίνδρου εὐρημένος τῷ Ἀρχιμήδει, ὑπάρχει μεταξὺ τριῶν σωμάτων κατὰ συνέχειαν, Σφαίρας δηλονότι, Κυλίνδρου ἢ ἰσοπλεύρου Κῶνου· ἢ ἑκατέρη τὴν ἀπόδειξιν μετὰ ἢ ἄλλων ἡμετέρων Θεωρημάτων (ἐξ ὧν τρανώτερον ἢ τῆς Σφαίρας θαυμασία φύσις γινώσκειται) ἐν τρισὶ καὶ δεκα Προτάσεσι περιλαμβανομένων, ὑποσυνάψομεν.

## Π ρ ό τ α σ ι ς Δ Γ .

κ. 53. Πάσης Σφαίρας ἢ ἐπιφάνεια διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρου Κυλίνδρου.

Ἐῶ Σφαῖρα ἢ αθβικ, ἢ ἐν αὐτῇ Τετράγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ ακλδ· ὑφ' οὗ περιενεχθέντος, καταγράφεται Κύλινδρος ἰσόπλευρος ὁ αδλκ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένος· ἢχθω ἢ αλ, ἢτις ἐστὶ διάμετρος κοινὴ τῆτε Σφαι-

(1) Αὐτόδιον.

ρα εἰ τῷ Τετραγώνῳ. Ἐπεὶ ὅν τὸ ἀπὸ τῆς αλ Τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἀλλήλαις ἴσων ακ, κλ Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν (1), ἐνός ἄρα τῷ ἀπὸ ακ ἔσται διπλάσιον. Τοιγαρῶν εἰ Κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον αλ, διπλάσιός ἐστι τῷ περὶ τὴν ακ (2), τῷτ' ἐστὶ τῷ γν. Ἀλλὰ τῷ περὶ τὴν αλ Κύκλῳ τετραπλασία ἐστὶν ἢ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (3). διάμετρος γάρ τῆς Σφαίρας ἢ αλ, εἰ ὁ περὶ αὐτὴν Κύκλος μέγιστος τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ· ἢ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ὀκταπλασία ἐστὶ τῷ γν Κύκλῳ· ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ἴση τῇ ακ ἢ λκ, ἢ κυλινδρική ἄρα ἐπιφάνεια αγλ τετραπλασία ἐστὶ τῷ γν Κύκλῳ (4)· ἢ τῆς Σφαίρας ἄρα, ἐπεὶ δέδεικται ὀκταπλασία τῷ αὐτῷ Κύκλῳ, ἔσται δὴ διπλασία τῆς τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείας. Ὅ" ἔδει δεῖξαι.

### Π ρ ό τ α σ ι ς Λ Δ.

Πάσης Σφαίρας ἢ ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένην ἰσοπλεύρου Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἐστὶν, ὡς 4 πρὸς 3. κ. 53.

Κειμένων γάρ τῶν αὐτῶν τῇ προηγουμένη, ἐπεὶ ἢ τῷ Κυλίνδρου πλευρὰ λκ, ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ακ, ἔσται δὴ ἢ τῷ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια γλ τετραπλασία τῆς βάσεως γν (5). ὅλη ἄρα ἢ τῷ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς συναμφοτέρον τὴν βάσιν γν, σλ, ἐστὶν ὡς 6 πρὸς 2. Δέδεικται δὲ ἐν τῇ προηγουμένη, ὅτι ἢ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν μίαν τῶν βάσεων, ὡς 8 πρὸς 1· πρὸς συναμφοτέρον ἄρα ἔσται, ὡς 8 πρὸς 2· πρὸς ὅλην ἄρα τὴν τῷ Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἔσται, ὡς 8 πρὸς 6· τῷτ' ἐστὶ, ὡς 4 πρὸς 3. Ὅ" ἔδει δεῖξαι.

### Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Ὅλη ἢ τῷ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένην ὀρθῷ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν τῷ ἐγγεγραμμένην ἰσοπλεύρου κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 1. Ἐστὶ γάρ ἢ μὲν τῷ περιγεγραμμένην πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4 (6)· ἢ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένην, ὡς 4 πρὸς 3· διὰ τὴν παρούσαν· δι' ἴση ἄρα ἢ τῷ περιγεγραμμένην πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένην, ὡς 6 πρὸς 3· ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

(Ὡς αὐτως ἢ τῆς περὶ ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἐγγε-

(1) ΜΖ. εἰς α'. (2) Πορ. Ε'. τῆς Β. τῷ ἰβ'. (3) ΚΔ. τῷ παρόντος. (4) Διὰ τὸ Πορ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (5) Πορ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (6) ΙΒ. τῇ παρόντος.

γραμμένης Σφαίρας. Ὡσπερ δὴ ἔστι αὐτὴ διπλασία ἐστὶ τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ· εἰσὶ γὰρ ἡ τῆς περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, ἡ ὅλη ἢ τῷ Κυλίνδρῳ ἢ ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Σφαίρας πρὸς τὸν μεγίστον Κύκλον τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ, ὡς 4 ἢ 3 ἢ 2 πρὸς 1 (1).

Β'. Ὅλη ἢ τῷ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ὀρθῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια, ἢ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν ὁ κύλινδρος περιγέγραπται, ἢ ὅλη ἢ τῷ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλευρῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια εἰσὶν ἐν ἀρμονικῇ ἀναλογίᾳ, τῶν ἑσὶν ὡς 6, 4, 3.

Τρία δὲ ποσὰ εἰσὶν ἀρμονικῶς ἀνάλογον, εἴαν γένηται τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, ὡς ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης ἢ τῆς δευτέρας, πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς δευτέρας ἢ τῆς τρίτης. Οἷον εἴαν ᾖ 6 πρὸς 3, ὡς 6 — 4 πρὸς 4 — 3 ( :: 2 : 1 )· ἔσονται 6, 4, 3 ἀρμονικῶς ἀνάλογον.

Σχόλιον. Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἐστὶ, πρὸς ὁμοίον, εἴτ' ἢν ἰσοπλευρον Κύλινδρον εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἢ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ἢ, ὅπερ ἐστὶ ταῦτόν, ὡς ἡ διάμετρος τῷ Κύκλῳ πρὸς τὸ ἡμίχορδον 45 μοιρῶν. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶ καὶ σφαῖρα ἢ περὶ Κύλινδρον ἰσοπλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην.

Μέρος Α'. Καταχθειςῶν γὰρ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ ἀκλ τῶν καθέτων κξ, ξρ· ἔσται δὴ ἢ τὰ Τρίγωνα αξκ, αρξ ὀρθογωνία τε ἢ ἰσοσκελεῖ (2)· ἢ αἰ αλ, ακ, αξ, αρ συνεχῶς ἀνάλογον (3)· ἢ ἢ αρ =  $\frac{1}{2}$  ακ (4)· ἔστι δὲ ἢ μὲν αλ, διάμετρος τῆς βάσεως τῷ περιγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ· ἢ δὲ ακ, διάμετρος τῆς βάσεως τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ· διὰ τὴν ὁμοιότητα ἄρα τῶν Κυλίνδρων ἔσται ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῷ τῷ τῶν αλ, ακ (5)· τῶν ἑσὶν ὡς αλ πρὸς αρ (=  $\frac{1}{2}$  ακ) (6). Ἀλλ' ἢ μὲν αλ ἐστὶ διάμετρος τῷ τε Κύκλῳ αθβκ, ἢ τῷ Τετραγώνῳ δκ· ἢ δὲ ακ, πλευρὰ τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Τετραγώνῳ· τῶν ἑσὶ χορδὴ μοιρῶν 90 εἰς Κύκλον τὸν δκ, ἢ δὲ ἡμίσεια τῆς ακ, ἡμίχορδον 45 μοιρῶν (7). Ὁ περιγεγραμμένος ἄρα Κύλινδρος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἢ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς, ἢ ὡς ἢ τῷ Κύκλῳ διάμετρος πρὸς ἡμίχορδον τὸ μοιρῶν 45.

(1) Διὰ τὴν παρῶσαν ἢ τὴν ΑΒ, ἢ τὴν ΚΔ, τῷ παρόντος. (2) Η, τῷ ζ'. (3) Πορ. Β. τῆς Η, τῷ ζ'. (4) Σχολ. Α'. τῆς Κζ'. τῷ α'. (5) ΙΒ, τῷ ιβ'. (6) Ὁμοί. Ι. τῷ ε'. (7) Πορ. Α'. τῆς Γ, τῷ γ'.

Μέρος Β'. Καὶ ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶ καὶ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένην. Διάμετρος γὰρ τῆς περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον ἀλλὰ περιγεγραμμένης Σφαῖρας διὰ εἶναι ἢ αλ· ἡ δὲ τῆς ἐγγεγραμμένης διάμετρος εἶναι ἴση τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ Κυλίνδρου, τῷτ' ἐστὶ τῇ ακ· ἡ περιγεγραμμένη ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην, ἔσται ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῷ τῆς αλ πρὸς ακ (1)· τῷτ' εἶναι ὡς ἡ αλ πρὸς αρ ἢ πρὸς  $\frac{1}{2}$  ακ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα τῷ ἠγούμενῳ Σχολίῳ. Ἡ σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον, ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τετραγώνῳ διαμέτρου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ Κύκλου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Τετραγώνῳ.

Ἐστὶ γὰρ διὰ τὸ ἠγούμενον Σχόλιον ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένη σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην, ὡς ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ τριπλῆ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς πλευρᾶς. Ἀλλ' ἡ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα ἐστὶ πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον, ὡς 2 πρὸς 3 (2)· ἢ ὡς ἡ διπλασία τῆς τῷ Τετραγώνῳ πλευρᾶς, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς τῷ αὐτῷ Τετραγώνῳ πλευρᾶς. Ἄρα ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένη σφαῖρα ἐστὶ, πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον (τῷτ' ἐστὶν ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον), ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τετραγώνῳ διαμέτρου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ, ὅ εἰς ταῦτόν ἦκει, ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ Κύκλου, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς τῷ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Τετραγώνῳ.

### Π ρ ό τ α σ ι ε ς Λ Ε'.

Οἷασθην Σφαιρικῆς μοίρας ἡ ἐπιφάνεια  $\Gamma\Lambda\beta\Delta$ , πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῷ εἰς  $\alpha$ . 53, ἢ 52. αὐτὴν ἐγγεγραμμένῳ μεγίστῳ Κώνῳ  $\Gamma\beta\Delta$  λόγον ἔχει, ὅν ἡ τῷ Κώνῳ πλευρὰ  $\beta\Delta$ , πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον  $\Delta\alpha$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς μοίρας  $\Gamma\Lambda\beta\Delta$  ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ Κύκλῳ, ἢ Ἡμιδιάμετρος ἢ  $\beta\Delta$  (3), ἔσται ὁ λόγος ταύτης πρὸς τὸν Κύκλον  $\xi\tau$ , τῷτ' ἐστὶν τὴν βάσιν αὐτῆς τε καὶ τῷ Κώνῳ, διπλασίον τῷ λόγῳ τῆς  $\beta\Delta$  πρὸς  $\Delta\alpha$  (4)· τῷτ' ἐστὶ τῆς

(1)  $\Gamma\Lambda$ . τῷ  $\beta\Delta$ . (2)  $\Lambda\beta$ . τῷ παρόντος. (3)  $\Lambda\beta$ . τῷ παρόντος. (4) Πορ. Β. τῆς Β. τοῦ  $\beta\Delta$ .

Κωνικῆς ἐπιφανείας  $\beta\beta$ , πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν  $\xi\tau$  (1)· φανερόν ἐν ὅτι ὡς ἡ ἐπιφάνεια  $\iota\lambda\beta\beta$ , πρὸς τὴν Κωνικὴν ἐπιφάνειαν  $\beta\beta$ , ἔτως ἡ αὐτὴ Κωνικὴ  $\beta\beta$ , πρὸς τὴν Βάσιν  $\xi\tau$  (2)· ὡς δὲ ἡ Κωνικὴ  $\beta\beta$ , πρὸς τὴν βάσιν  $\xi\tau$ , ἔτως ἡ  $\beta\beta$  πρὸς τὴν  $\beta\theta$  (3)· ὡς ἄρα ἡ τῆς Μοίρας ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν  $\beta\beta$ , ἔτως ἡ  $\beta\beta$  πρὸς τὴν  $\beta\theta$ . Οἷ εἶδει δεῖξαι.

**Πόρισμα.** Ἐκ τῆςδείξεως τῆς παρότης Προτάσεως δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῶ εἰς Τμήμα σφαίρας ἐγγεγραμμένης μεγίστης Κώνης μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς τῶ Τμήματος ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐκατέρω κοινῆς βάσεως.

### Π ρ ό τ α σ ι ς Δς.

α. 48. Ἡ τῶ Ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ( $\epsilon\theta\beta\delta$ ), πρὸς μὲν τὴν τῶ ἐγγεγραμμένου μεγίστης ἢ ὀρθῆς Κώνης ἐπιφάνειαν ( $\epsilon\beta\delta$ ) λόγον ἔχει, ὅν ἐν τῶ Τετραγώνῳ ἢ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· πρὸς δὲ τὴν τῶ περιγεγραμμένην ὁμοίαν, ὅν ἐν τῶ Τετραγώνῳ ἢ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.

α. 49. **Μέρος Α΄.** Πρόδηλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς προηγουμένης Προτάσεως. Οἷασῃν γὰρ μοίρας, ἐπομένως δὲ καὶ τῶ Ἡμισφαιρίου ἢ ἐπιφάνεια  $\epsilon\theta\beta\delta$ , ἐστὶ πρὸς τὴν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ  $\beta\beta$  πρὸς τὴν  $\delta\alpha$ · ἐστὶ δὲ ἡ μὲν  $\beta\delta$  διάμετρος· ἡ δὲ  $\delta\alpha$ , πλευρὰ τῶ Τετραγώνου  $\beta\alpha\delta\kappa$ · ἄρα κτ.

**Μέρος Β΄.** Ἐςω περὶ Κύκλον, ἢ Κέντρον τὸ  $\alpha$ , ἡμιτετράγωνον περιγεγραμμένον τὸ  $\epsilon\beta\gamma$ · ἢ περὶ τὸν Ἀ΄ξονα  $\alpha\beta$  περιεσφαιρόμενος, γεγεννηθῶ Κώνος περὶ τὸ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένον. Ἐπεὶ ἐν τῶ ἀπὸ τῆς  $\epsilon\gamma$  διπλάσιον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς  $\epsilon\beta$ , ἢ τῆς  $\beta\iota$  (4)· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ Κύκλος, ἢ διάμετρος ἢ  $\epsilon\gamma$ , τῶ Κύκλου, οὗ διάμετρος ἢ  $\beta\iota$ , τῶτ' ἐστὶ τῶ Κύκλου  $\eta\theta\delta\iota$  (5)· διπλάσια δὲ τῶ αὐτῶ Κύκλου ἐστὶ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῶ εἰς τὸν Κώνον  $\epsilon\beta\gamma$  ἐγγεγραμμένης Ἡμισφαιρίου (6)· ὁ Κύκλος ἄρα, ἢ διάμετρος ἢ  $\epsilon\gamma$ , ἴσος ἐστὶ τῶ τῶ Ἡμισφαιρίου ἐπιφανείᾳ. Τοιγαρῶν· ἐπεὶ ἡ τῶ Κώνης ἐπιφάνεια  $\epsilon\beta\gamma$ , ἐστὶ πρὸς τὸν Κύκλον, ἢ διάμετρος ἢ  $\epsilon\gamma$ , τῶτ' ἐστὶ πρὸς τὴν αὐτῶ βάσιν, ὡς ἡ πλευρὰ  $\beta\epsilon$  πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον  $\alpha\epsilon$  (7), ἔσται δὲ καὶ πρὸς τὴν τῶ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης Ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ  $\epsilon\beta$  πρὸς τὴν  $\alpha\epsilon$ , τῶτ' ἐστὶ ὡς ἡ ἐν τῶ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν αὐτῶ πλευράν· καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῶ Ἡμισφαιρίου πρὸς τὴν περιγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ πλευρὰ τῶ Τετραγώνου πρὸς τὴν Διαγώνιον. Οἷ εἶδει δεῖξαι.

(1) *ΙΔ.* τῶ παρόντος. (2) *Ορίσμ.* *ΙΓ.* τῶ εἰ. (3) *ΙΔ.* τῶ παρόντος. (4) *Πορ.* *Α΄.* τῆς *ΜΖ.* τῶ *α΄.* (5) *Πορ.* *Ε΄.* τῆ *Β.* τῶ *β΄.* (6) *ΚΔ.* τῶ παρόντος. (7) *ΙΔ.* τῶ παρόντος.

Πόρισμα. Ἐὰν περί Κώνον ὀρθογώνιον τὸν εβδ Ἡμισφαίριον περιγραφῆ, καὶ εἰς αὐτὸν ἕτερον ἐγγραφῆ, ἔσται ἡ τῷ Κώνῳ ἐπιφάνεια μέση ἀνάλογον τῆς ἐπιφανείας τῷ περιγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ, καὶ τῆς τῷ ἐγγεγραμμένου. Ἐῖςι γὰρ ἢτε τῷ περιγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῷ Κώνῳ, καὶ ἡ τῷ Κώνῳ πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

### Π ρ ό τ α σ ι ς Δ Ζ'.

Πάσης Σφαίρας τότε σφαιρὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια λόγον ἔχει, πρὸς τὸν περί αὐτὴν περιγεγραμμένον τετράγωνον κωνικὸν Ρόμβον, ὃν ἡ ἐν τῷ τετραγώνῳ πλευρά πρὸς τὴν διάμετρον. κα. 49. 50.

Περὶ τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ Κύκλου κδδι, περιγεγράφω τετράγωνον τὸ εβγζ, ἐξ ἧ περι τὸν Ἀξονα βε περιεσχεθέντος, γεγεννήθω Ρόμβος τὴν σφαῖραν περιλαμβάνων. Καὶ γενέθω ὡς ἡ τῷ τετραγώνῳ πλευρὰ εβ (Σχήμα 49.), πρὸς τὴν αὐτῆ διάμετρον εγ, οὕτως ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ (Σχήμα 50.) ὡς δὲ ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Ο. καὶ ἔσται δὴ ὁ λόγος τῆς Σ πρὸς τὴν Ο, τριπλασίον τῷ λόγῳ τῆς Σ πρὸς τὴν Ρ (1), τῷτ' ἔσι τῆς εβ πρὸς τὴν εγ. ὁ δὲ τῆς Ο πρὸς τὴν Ρ, διπλασίον τῷ τῆς Ο πρὸς τὴν Ζ, ἢ τῆς Ρ πρὸς τὴν Σ, τῷτ' ἔσι τῆς εγ πρὸς τὴν εβ. καὶ ἐπομένως ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ (2) διπλασία ἄρα ἡ Ο αὐτῆς τῆς Ρ (3). Τήτων δὲ ἢτω κατασκευασθέντων, γενεθὼ περὶ τὸν κωνικὸν Ρόμβον σφαῖρα περιγεγραμμένη ἡ εβγζ. καὶ ἔσαι δὴ ἡ σφαῖρα κδδι πρὸς τὴν εβγζ, ἐν λόγῳ τριπλασίον τῆς τῆς διαμέτρου δι (ἢ εβ), πρὸς τὴν εγ διάμετρον (4), τῷτ' ἔσιν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω). ἔσι δὲ ἡ σφαῖρα εβγζ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον κωνικὸν Ρόμβον, ὡς 2 πρὸς 1 (5). τῷτ' ἔσιν ὡς ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω). Δι ἴσου ἄρα ἡ σφαῖρα κδδι, ἔσι πρὸς τὸν αὐτὸν Ρόμβον, ὅς ἔσι περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένος, ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, τῷτ' ἔσιν ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ εβ πρὸς τὴν διάμετρον εγ. ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

(Δείκνυται δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἐκ μόνης τῆς ἐποπτείας τοῦ 49. Σχήματος. Διὰ τὸ εἶναι γὰρ τὰ Τρίγωνα εδα, εαβ, εβγ ὀρθογώνια ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ ε γωνίαν κοινὴν, ἔσονται δὴ αἱ εδ, εα, εβ, εγ συνεχῶς ἀνά-

(1) Ορισμ. I. εῦ ε'. (2) Σχόλ. τῆς Κ. τῷ ε'. (3) Σχόλ. τῆς ε. καὶ Ζ. τῷ ε'. (4) IH. τῷ εβ'. (5) Λ. τῷ παρόντος.

λογον (1)·  $\epsilon$  ὁ λόγος τῆς εθ πρὸς εγ, τριπλασίον τῆ τῆς εβ πρὸς εγ (2)·  
 Ἐστὶ δὲ ἡ μὲν εἰς τὸν κωνικὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, πρὸς τὴν περὶ  
 αὐτὸν περιγεγραμμένην ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῆ τῶν διαμέτρων εβ, εγ (3),  
 τῆτ' ἔστιν ὡς ἡ εθ πρὸς εγ· ἡ δὲ περιγεγραμμένη πρὸς τὸν Ῥόμβον, περὶ ὃν  
 περιγέγραπται, ὡς 2 πρὸς 1 (4)· ἢ ὡς ἡ εγ πρὸς εα. Δι' ἴσου ἄρα ἡ ἐγγεγραμ-  
 μένη σφαῖρα πρὸς τὸν Ῥόμβον, εἰς ὃν ἐγγέγραπται, ἢ (ὅπερ ἐστὶ ταῦτόν) ἡ  
 σφαῖρα πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον Ῥόμβον, ὡς ἡ εθ πρὸς εα· τῆ  
 τ' ἔστιν ὡς ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον ἐν τῷ τετραγώνῳ ηθ).

Ἐκ δὲ τῆ Β' μέρους τῆς προηγουμένης φανερόν, ὅτι ἡ τῆ Ἡμισφαιρίδι ἐπι-  
 φάνεια πρὸς τὴν τῆ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένην Κώνη εβγ,  $\epsilon$  ἐπομένως ὅλη ἡ  
 ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας ηθδι, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆ Ῥόμβου εβγζ, ἐστὶν  
 ὡς ἡ πλευρὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ πρὸς τὴν διάμετρον. Πάσης ἄρα Σφαίρας τό, τε  
 σερεὸν  $\epsilon$  ἡ ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον τετράγωνον  
 κωνικὸν Ῥόμβον (εβγζ), ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.  
 Ο' ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ κωνικὸν ἰσόπλευρον Ῥόμβον περιγε-  
 γραμμένης σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια τῆ Ῥόμβου, περὶ ὃν ἡ σφαῖρα περιγέγραπται,  
 $\epsilon$  ἡ ἐπιφάνεια τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἔχουσι συνεχῶς τὸν αὐ-  
 τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. Δῆλον  
 δὲ ἔκ τε τῆς προηγουμένης  $\epsilon$  τῆς παρούσης.

Β'. Ἡ μὲν τῆς περὶ Ῥόμβον κωνικὸν ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαί-  
 ρας ἐπιφάνεια, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Ῥόμβον ἐγγε-  
 γραμμένης Σφαίρας· ἡ δὲ τῆ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη Κωνικῆ ἰσοπλεύρου  
 Ῥόμβου, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένης  
 ὁμοίης Ῥόμβου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Ῥόμβον περιγεγραμμένης Σφαί-  
 ρας, ἢ τε τῆ Ῥόμβου,  $\epsilon$  ἡ τῆς εἰς τὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας εἰσι  
 πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ εγ, εβ, εα·  $\epsilon$  ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τῆ περὶ Σφαῖραν περι-  
 γεγραμμένης Ῥόμβου,  $\epsilon$  ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας,  $\epsilon$  ἡ τῆ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγε-  
 γραμμένης Ῥόμβου εἰσὶν ὡσαύτως, ὡς αἱ εγ, εβ, εα, φανερόν, ὅτι ἐν ἑκα-  
 τέρῃ τῆ πτώσει ἡ ἐπιφάνεια τῶν περιγεγραμμένων σωμάτων ἔσεται πρὸς τὴν  
 τῶν ἐγγεγραμμένων, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εα, ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

Γ'. Ο' κωνικὸς ἰσόπλευρος Ῥόμβος ἐστὶν πρότερος τῶν δύο μέσων ἀνάλο-

(1) Πόρισμα μετὰ τὸ Σχόλιον τῆς ΙΓ. τῆς ε'. (2) Ὁρισμ. ΙΘ. τῆς ε'. (3) ΙΗ. τῆς β'.  
 (4) Δ. τῆ παρούσης.

γον τῆς τε εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης, καὶ τῆς περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένης Σφαίρας, ὡς ἐν τῇ δεΐξει τῷ πρώτῳ μέρει τῆς παρέσεως δέδεικται· ἡ γὰρ ἐγγεγραμμένη τῷ Ρ'όμβῳ Σφαῖρα, ὁ Ρ'όμβος, καὶ ἡ περιγεγραμμένη εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Σ, Ρ, Π ἐν τῷ 50 Σχήματι· ἢ ὡς αἱ εθ, εα, εγ, ἐν τῷ 49.

Δ'. Δῆλον ἔτι ἐκ τῆς αὐτῆς δεΐξεως (ἢ καὶ ἐκ τῆς Δ'. τῆ παρόντος), ὅτι ἡ Σφαῖρα εἰς διπλασία τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένῳ κωνικῷ τετραγώνῳ Ρ'όμβῳ. α. 49.

Ε'. Ἡ περὶ Ρ'όμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη Σφαῖρα εβγζ, εἰς πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην σφαῖραν ηθδι, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος εγ πρὸς τὴν εθ ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς εβ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς εἰρημένης δεΐξεως· ἐν δὲ τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰς καὶ ὁ περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικὸς τετράγωνος Ρ'όμβος, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ὁμοιον Ρ'όμβον· εἰς γὰρ (διὰ τὴν ΔΖ' ταύτην) ὁ μὲν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικὸς τετράγωνος Ρ'όμβος, πρὸς αὐτὴν τὴν σφαῖραν, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εβ· ἡ δὲ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον τοιοῦτον Ρ'όμβον, ὡς 2 πρὸς 1· ἢ ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν εθ (Πορ. Δ'. τῆς παρ.)· δι' ἴσιν ἄρα ὁ Ρ'όμβος ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εθ (ΚΒ'. τῆ ε').

ς'. Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει Ρ'όμβος κωνικὸς τετράγωνος περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Ρ'όμβον ὁμοιον εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον· καὶ Κύλινδρος ἰσόπλευρος περὶ οἰανδὴ τινὰ ἄλλην σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Κύλινδρον ὁμοιον εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, καὶ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον ἢ Ρ'όμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη, πρὸς ἑτέραν εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἢ τὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην. Εἰσὶ γὰρ ἅπαντα πρὸς ἄλληλα ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ὡς δῆλον ἔκτε τῆ προηγουμένης Πορίσεως τῆς παρέσεως, καὶ ἐκ τῆ Σχολίᾳ τῆς ΔΔ'. τῆ παρόντος.

### Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΗ΄.

Ἡ ἐπιφάνεια οἰασθῶν Σφαιρικῆς μοίρας (βθκδ), Κῶνον ἰσόπλευρον (τὸν βκδ) περιλαμβανούσης, διπλασία εἰς τῆς τῷ περιλαμβανομένου Κῶνος ἐπιφανείας. α. 54.

Δῆλον καὶ τῆτο ἐκ τῆς ΔΕ'. Εἰς γὰρ ἡ τῆς μοίρας βθκδ ἐπιφάνεια, πρὸς τὴν τῆ ἐγγεγραμμένην Κῶνον ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ βκ πρὸς τὴν βκ (1)· ὑπόκειται δὲ ὁ Κῶνος βκδ ἰσόπλευρος· ἡ ἄρα κβ ἴση τῇ βδ· καὶ ἐπομένως διπλασία τῆς

(1) ΔΕ. τῆ παρόντος.

βα· ἢ τῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια βδκδ, διπλασία ἐς τῆς ἐπιφανείας τῆ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης Κώνης βκδ. Οἷ εἶδει δεῖξαι.

Πόρισμ. Α'. Οἷ αὐτὸς δὲ διπλασίος λόγος τηρεῖται, καὶ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις τῆς τε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, καὶ τῆ Κώνης, καὶ τῆς βάσεως τῆ Κώνης. Δῆλον δὲ ἔκ τε τῆς παρήσης καὶ ἐκ τῆ Πορίσματος τῆς ΔΕ'.

Β'. Η' τῆς Κῶνον ἰσόπλευρον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας ἐπιφάνεια, ἐς τὴν πρὸς ὅλην τὴν τῆ περιλαμβανομένης Κώνης ἐπιφάνειαν, ὡς 4 πρὸς 3.

Αἷ γὰρ ἐπιφάνειαι τῆς τε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, καὶ τῆ περιλαμβανομένης Κώνης, καὶ τῆς τῆ Κώνης βάσεως εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς 4, 2, 1 (Πόρισμ. Α'). ὅθεν δῆλον τὸ Πόρισμα.

Γ'. Η' ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐς τὴν πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης ἰσοπλεύρου Κυλίνδρου, ὡς ἢ ἐπιφάνεια τῆς ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆ αὐτῆς Κώνης· τῆτ' ἔστιν ὡς 4 πρὸς 3. Δῆλον ἔκ τε τῆς ΔΔ' τῆ παρόντος καὶ ἐκ τῆ Β'. Πορίσματος τῆς παρήσης.

Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶν ὅλη ἢ ἐπιφάνεια Κυλίνδρου ὀρθῆ περι Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένης, πρὸς ὅλην τὴν τῆ Ἡμισφαιρικῆς ἐπιφάνειαν. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ἢ τε Κυλινδρική (1) καὶ ἢ Ἡμισφαιρική (2) διπλασία τῆς βάσεως, ἔσται δὲ ὅλη μὲν ἢ κυλινδρική τετραπλασία τῆς βάσεως· ἢ δὲ Ἡμισφαιρική μετὰ τῆς βάσεως τριπλασία τῆς αὐτῆς βάσεως· ὅλη ἄρα ἢ τῆ Κυλίνδρου ἔσται, πρὸς ὅλην τὴν τῆ Ἡμισφαιρικῆς, ὡς 4 πρὸς 3.

### Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΘ'.

Η' ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης ἰσοπλεύρου Κώνης λόγον ἔχει, ὃν ὁ 16 πρὸς 9.

κ. 54.

Ἐστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ φ· εἰς δὲ τὴν σφαῖραν Κῶνος ἰσόπλευρος ἐγγεγραμμένος ὁ βκδ· καὶ ἄξων κοινὸς τῆ τε σφαίρας καὶ τῷ Κῶνι ὁ κφκ. Ἐὰν ἔν τμηθῶσι διὰ τῆ ἄξωνος ἢ τε Σφαῖρα καὶ ὁ Κῶνος, γενήσεται ἐν μὲν τῆ Σφαίρα Κύκλος μέγιστος ὁ οβκδ· ἐν δὲ τῷ Κῶνι Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ βκδ, οὗ τινος ἢ μία πλευρὰ βαδ διάμετρος ἔσται τῆς τῆ Κώνης βάσεως ζτ· καὶ ἐπεὶ ὁ τῆ Κώνης ἄξων καὶ ἐς τὴν κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ζτ, ἔσται ἢ γωνία καὶ ὀρθή (3)· διὰ δὲ τῆτο τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν καὶ ὀρθογωνίῳ (4).

(1) Πόρισμ. τῆς Κς. τῆ παρόντος. (2) Κλ. τῆ παρόντος. (3) Ὅρισμ. Γ. τῆ α'. (4) Πόρ. Β' τῆς ΙΖ. τῆ ε'.

Ἐπεὶ δὲ ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ πλευρὰ τεταρτημόριον τῷ ἄξονος ἀποτεμένει τὴν αο (1), ἔσται δὴ τὸ ὑπὸ τῶν καο ἑρσογώνιον, τῷτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον, τριπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνῳ (2). Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου φο τετράγωνον, ἐπεὶ ἔστι τετραπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνου (3), ἔσται δὴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου βα τετράγωνον, ὡς 4 πρὸς 3· ἄρα καὶ ὁ κύκλος οβκδ ἔστι πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 4 πρὸς 3 (4)· ἔστιν ἄρα ὁ τετράκις κύκλος οβκδ, τῷτ' ἔστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δθ (5) πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 16 πρὸς 3· ἔστι δὲ καὶ ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ βκδ ἐπιφάνεια, χωρὶς μὲν τῆς βάσεως πρὸς τὸν κύκλον ξτ, τῷτ' ἔστι πρὸς τὴν αὐτῆ βάσιν, ὡς 2 πρὸς 1 (6)· μετὰ δὲ τῆς βάσεως, τῷτ' ἔστιν ὅλη ἡ τῷ Κώνῳ βκδ πρὸς τὴν βάσιν, τῷτ' ἔστι τὸν κύκλον ξτ, ὡς 3 πρὸς 1, ἢ ὡς 9 πρὸς 3· καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔστι πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον, ὡς 16 πρὸς 3· ἔσται δὴ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῷ ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ, ὡς 16 πρὸς 9. Οἷ εἶδει δεῖξαι.

**Πόρισμα.** Δῆλον ἄρα ἐκ τῆς παρήσηςδείξεως, ὅτι ἡ τῷ εἰς Σφαιραν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ βάσις ξτ, ἔχει πρὸς τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον δθ, ὡς 3 πρὸς 4.

(Ἄλλως. Ἐπεὶ ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ πλευρὰ βδ, τεταρτημόριον τῷ ἄξονος ἀποτεμένει τὴν αο (7)· ἔσται δὴ ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια βοδ τεταρτημόριον τῆς ἐπιφανείας τῆς ὅλης σφαίρας (8)· καὶ ἐπομένως ἡ λοιπὴ βδκδ ἴση τρισὶ τεταρτημορίοις· εἰ ἄρα ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τεθῆ ἴση 16· ἔσται ἡ βδκδ ἴση 12· ἄλλ' ἡ ἐπιφάνεια βδκδ ἔστι διπλασία τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας βκδ (9), καὶ ἔστι δὴ πρὸς αὐτὴν ὡς 12 πρὸς 6· ὅλη ἄρα ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἔστι πρὸς τὴν Κωνικὴν βκδ, ὡς 16 πρὸς 6. Ἐπεὶ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κώνῳ βκδ (ὄντος ἰσοπλεύρου), διπλασία ἔστι τῆς βάσεως ξτ (10), φανερόν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κώνῳ χωρὶς δηλονότι τῆς βάσεως, ἔστι πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῷ Κώνῳ, ὡς 2 πρὸς 3, ἢ ὡς 6 πρὸς 9. Δι' ἴση ἄρα ὅλη ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ ἐπιφάνειαν, ὡς 16 πρὸς 9. Οἷ εἶδει δεῖξαι.)

(1) Πόρ. Ε'. τῆς ΙΕ. τῷ ε'. (2) Α. τῷ ζ'. (3) Πόρ. Γ'. τῆς Δ. τῷ β'. (4) Πόρ. Β. τῆς Β. τῷ ιβ'. (5) ΚΔ. τῷ παρόντος. (6) Πόρ. Α'. τῆς ΙΗ. τῷ παρόντος. (7) Πόρ. Ε'. τῆς ΙΕ. τῷ δ'. (8) ΚΖ. τῷ παρόντος. (9) Πρωτ. προηγ. (10) Πόρ. Α'. τῆς ΔΗ. τῷ παρόντος.

## Π ρ ό τ α σ ι ς Μ'.

κ. 55.

Η' τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τῆ περι αὐτὴν περιγεγραμμένην ἰσοπλεύρη Κώνη ἐπιφάνειαν λόγον ἔχει, ὃν ὁ 4 πρὸς 9.

Ἐςω περὶ τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ Σφαίρα κύκλον βπμ, Τρίγωνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένον τὸ δοζ, ἐξ ἧ περι τὸν Ἀξονα οαβ περιεχθέντος, ἀπογεγενηθῶ Κώνος ἰσόπλευρος περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος· περὶ δὲ τὸ ἰσόπλευρον Τρίγωνον δοζ περιγεγράφῳ κύκλος ὁ υδλοζ, ὃς ἔσται τῷ προτέρῳ ὁμόκεντρος (1), καὶ προεκβεβλήθῳ ὁ Ἀξων οαβ ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ἢν ἡ βν τεταρτημόριόν ἐσι τῆ Ἀξονος ον (2), φανερόν ὅτι ἡ ον διπλασία ἐσι τῆς κβ· Τοιγαρῶν, ἐπεὶ ὁ τῶν κύκλων λόγος ἐσι διπλασίων τῆ τῶν διαμέτρων (3)· ἔσεται δὴ ὁ κύκλος βπμ, πρὸς τὸν κύκλον υδλοζ, ὡς 1 πρὸς 4· Προδέδεικται δὲ ἐν τῇ προτέρῃ δείξει τῆς προηγουμένης, ὅτι ὁ κύκλος υδλοζ ἐσι πρὸς τὸν κύκλον ζτ, ὃς ἐσι βάσις τῆ εἰς τὴν σφαῖραν λζ ἐγγεγραμμένην ἰσοπλεύρη Κώνη, ὡς 4 πρὸς 3. Δι' ἴτε ἄρα ὁ κύκλος βπμ πρὸς τὸν κύκλον ζτ, ὡς 1 πρὸς 3 (4)· ἐσι δὲ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆ Κώνη δοζ, τριπλασία τῆ κύκλου ζτ (5)· ὅλη ἄρα ἡ τῆ Κώνη ἐπιφάνεια ἐννεαπλασία ἐσι τῆ κύκλου βπμ· ἀλλὰ τῆ κύκλου βπμ τετραπλασία ἐσιν ἡ τῆς σφαίρας τπ ἐπιφάνεια (6)· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆ ἰσοπλεύρη Κώνη δοζ ἔσται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται, ὡς 9 πρὸς 4. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Α'. Δῆλον ἐκ τῆς δείξεως ταύτης, ὅτι ὁ τῆ περι Σφαῖραν περιγεγραμμένην ἰσοπλεύρη Κώνη ἄξων βο, ἡμιόλιός ἐσι τῆς τῆς σφαίρας διαμέτρου βκ, τῆτ' ἐσιν ὡς 3 πρὸς 2.

Β'. Δῆλον δ' ἔτι ἐκ τῆς αὐτῆς δείξεως, ὅτι ἡ τῆ περι Σφαῖραν περιγεγραμμένην ἰσοπλεύρη Κώνη δοζ βάσις ζτ, ἡμιολία ἐσι συναμφοτέρου τῆς βάσεως τῆ περι τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένην Κυλίνδρου· ἐσι γὰρ ὁ ζτ πρὸς τὸν βπμ, ὡς 3 πρὸς 1· ἄρα ὁ ζτ πρὸς τὸν δις βπμ, ὡς 3 πρὸς 2.

Γ'. Η' τῆ ἰσοπλεύρη Κώνη δοζ ἐπιφάνεια ἡμιολία ἐσι τῆς ἐπιφανείας τῆ περι τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένην Κυλίνδρου· ἐσι γὰρ ἐκείνη μὲν, διπλασία τῆ ζτ κύκλου (7)· αὐτὴ δὲ, τετραπλασία τῆ βπμ (8)· ἡ κωνικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ἔσται πρὸς τὴν κυλινδρικὴν, ὡς δις 3 πρὸς τετράκις 1· τῆτ' ἐσιν ὡς 6 πρὸς 4· ἢ ὡς 3 πρὸς 2.

(1) Σχόλ. τῆς ΙΓ. καὶ ΙΔ τῆ δ'. (2) Πόρ. Ε'. τῆς ΙΕ. τῆ δ'. (3) Β. τῆ ιβ'. (4) ΚΕ. τῆ ε'. (5) Πόρισμα. Α'. τῆς ΙΔ. τῆ παρόντος. (6) ΚΔ. τῆ παρόντος. (7) Πόρ. Α'. τῆς ΙΔ. τῆ παρόντος. (8) Κς. καὶ ΚΔ. τῆ παρόντος.

Δ'. Ο μέγιστος κύκλος (βπμ) τῆς εἰς Κῶνον ἰσόπλευρον (τὸν δοζ) ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, ἢ ἐπιφάνεια τῆς αὐτῆς Σφαίρας, ὅλη ἢ ἐπιφάνεια τῆς Κῶνος (δοζ), εἰς ὃν ἡ Σφαῖρα ἐγγέγραπται, ἢ ἢ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὸν αὐτὸν Κῶνον περιγεγραμμένης Σφαίρας ὑδλοζ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 1, 4, 9, 16· τῶν ἑξὶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4. Δῆλον ἐκ τῆς ΚΔ', ἐκ τῆς παρούσης, ἢ ἐκ τῆς ΛΘ'. τῆ παρόντος.

Ε'. Οὗθεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρου αβ, εὐχερῶς καταγραφῆσονται Κύκλοι ταῖς εἰρημέναις ἐπιφανείαις ἴσοι. Δι γάρτοι ἀκτῖνες τῶν τοιούτων Κύκλων ἔσονται αβ, 4αβ (1)· ἢ τὰ μέτρα τῶν κατ' ἐκείνας ἐπιφανειῶν αὐτίκα γνωσθήσονται.

Ζ'. Ἐπει ἡ τῆς περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας διάμετρος ον, διπλασία ἐστὶ τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρου κβ, ἔσεται δὴ ἡ περιγεγραμμένη Σφαῖρα ὀκταπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης· ἐν λόγῳ δηλονότι τριπλασίονι τῶν διαμέτρων (2)· ἢ ὡς ὁ κῦβος τῆς δυάδος πρὸς τὸν κῦβον τῆς μονάδος (3).

## Π ρ ό τ α σ ι ς Μ Α'.

Ὅλη ἢ τῆ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη ἰσοπλεύρου Κῶνου ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένη ὁμοίᾳ Κῶνου. α. 55.

Ὅλη γὰρ ἢ τῆ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη ἰσοπλεύρου Κῶνου δοζ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4 (4)· ἢ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τῆ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη ὁμοίᾳ Κῶνου σκτ, ὡς 16 πρὸς 9 (5). Δι ἴσα ἄρα τετραπλασίονος (6), ὅλη ἢ τῆ περιγεγραμμένη ἰσοπλεύρου Κῶνου ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν τῆ ἐγγεγραμμένου ὁμοίᾳ Κῶνου, ὡς 16 πρὸς 4, ἢ ὡς 4 πρὸς 1. Οὗ ἔδει δεῖξαι.

Παραπλησίω δὲ τρόπῳ δεικνύται, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας τετραπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας. Δῆλον ἐκ τῆ Δ'. Πορίσματος τῆς προηγουμένης.

(1) Πόρ. Β'. εἰς Β. εἰς β'. (2) Π. εἰς β'. (3) Σχόλ. τῆς ΛΓ. εἰς ια'. (4) Διὰ τὴν προηγουμένην. (5) ΛΘ. τῆ παρόντος. (6) ΚΓ. τῆ ε'.

## Π ρ ό τ α σ ι ς Μ Β'.

Ἡ Σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον βκγ ἐστὶν, ὡς 32 πρὸς 9.

κ. 56.

Τετμήσθω ἡ σφαῖρα ἐξ ὁ Κῶνος βκγ, διὰ τῆ κοινῆ Α'ξονος κο ἐπιπέδῳ ποιῶν-  
τι ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλον μέγιστον τὸν οζκι· ἐν δὲ τῷ Κῶνῳ Τρίγωνον ἰσό-  
πλευρον τὸ βκγ. Διὰ δὲ τῆ κέντρον α διήχθω ἐπίπεδον ἑρθὸν ἐπὶ τὸν Α'ξονα  
οκ, ἀποτεμένον Ἡμισφαίριον τὸ ζθκι, εἰς ὃ νενοήσθω Κῶνος μέγιστος ἐγγε-  
γραμμένος ὁ ζκι. Ἐπεὶ ἔν ἡ τῆ ἰσοπλεύρου Τριγώνου πλευρὰ βγ ἀποτεμένει  
τῷ Α'ξονος οκ τεταρτημέριον τὴν οπ (1), ἔσται δὴ ἡ πκ πρὸς τὴν ακ, ὡς  
3 πρὸς 2, τῆτ' ἐστὶν, ὡς 9 πρὸς 6. Δέδεικται δὲ ἐν τῇ ΛΘ', ὅτι ἡ βάσις ξτ  
ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον οζκι, τῆτ' ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν νδ, ὡς 3 πρὸς 4, εἴτ' ἔν  
ὡς 6 πρὸς 8· ἐπεὶ ἄρα, ὁ λόγος τῆ Κῶνου βκγ πρὸς τὸν ζκι Κῶνον σύγκριται  
(2), ἔκ τε τῆ λόγος τῆ ὕψους πκ πρὸς τὸ ὕψος ακ (τῆτ' ἐστὶ τῆ 9 πρὸς 6), ἐ  
ἐκ τῆ λόγος τῆς βάσεως ξτ πρὸς τὴν βάσιν νδ (τῆτ' ἐστὶ τῆ 6 πρὸς 8), ἔσται  
δὴ ὁ Κῶνος βκγ πρὸς τὸν Κῶνον ζκι, ὡς 9 πρὸς 8. Ἐπεὶ δὲ ἡ Σφαῖρα γθ ἐστὶ  
τετραπλάσια τῆ Κῶνου ζκι (3)· Ὁ ἰσόπλευρος ἄρα Κῶνος βκγ ἔσται πρὸς τὴν  
Σφαῖραν γθ, ὡς 9 πρὸς 32. Ὁ" ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. πκ πρὸς ακ, ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 9 πρὸς 6· ἐ ἐπεὶ ἐστὶν ξτ πρὸς  
γθ, ὡς 3 πρὸς 4 (4), ἢ ὡς 9 πρὸς 8· ἔσται ξτ πρὸς 4γθ, ὡς 6 πρὸς 32·  
ὁ Κῶνος ἄρα, οὗ ὕψος μὲν πκ, βάσις δὲ ξτ, τῆτ' ἐστὶν ὁ Κῶνος βκγ πρὸς τὸν  
Κῶνον, ὃ ὕψος μὲν ακ βάσις δὲ 4γθ, τῆτ' ἐστὶ (5) πρὸς τὴν Σφαῖραν γθ ἐν  
λόγῳ ἐστὶ συγκειμένῳ, ἔκ τε τῆ λόγος τῆ 9 πρὸς 6, ἐ τῆ 6 πρὸς 32 (6), ἢ  
ὡς 9 πρὸς 32 (7).

## Π ρ ό τ α σ ι ς Μ Γ'.

κ. 55.

Κῶνος ἰσόπλευρος ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, ὀκταπλάσιός ἐστὶ  
Κῶνου ὁμοίου τῆ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένου.

Ἐςωσαν δύο Κῶνοι ἰσόπλευροι οί σκτ, δοζ ὁ μὲν, ἐγγεγραμμένος εἰς  
τὴν Σφαῖραν, ὁ δὲ, περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένος· ἐ Α'ξων κοινὸς ὁ οκβ. Διὰ  
δὲ τῆ Α'ξονος τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ τῶν τε Κῶνων ἐκάτερος ἐ ἡ Σφαῖρα· ἐ

(1) Πόρ. Ε. τῆς ΙΒ. τῆ δ'. (2) Σχόλ. Β. τῆς ΙΒ. τῆ ιβ'. (3) Α. τῆ παρόντος.  
(4) Πόρ. τῆς ΛΘ. τῆ παρόντος. (5) ΚΗ. τῆ παρόντος. (6) Σχόλ. Β. τῆς ΙΒ. τῆ ιβ'.  
(7) Ὁρισμ. Ε. τῆ ε'.

ἔσονται αἱ Τομαὶ αὐτῶν Τρίγωνα δύο ἰσόπλευρα, καὶ Κύκλος μέγιστος ὁ βπμ. Περὶ τὸ Τρίγωνον δοξ νεκλήθω Κύκλος περιγεγραμμένος ὁ νδεζ· καὶ ὁ Ἀΰων οκβ προεκβεβλήθω ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ἔν ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγῶνι πλευρὰ δζ, ἀποτέμνει τῷ Ἀΰονος ον τεταρτημόριον τὴν νβ (1), δῆλον ὅτι ἡ νο διπλασία εἰς τῆς βκ. Ὡσαύτως ἐπεὶ ἡ τῷ ἑτέρῳ ἰσοπλεύρῳ Τριγῶνι πλευρὰ στ ἀπατέμνει τῷ Ἀΰονος βκ τεταρτημόριον τὴν βγ (2), ἔσται ὡς ἡ νο πρὸς τὴν οβ, ἔτως ἡ βκ πρὸς τὴν κγ· καὶ ἐν ἀναλλάσσοντι ὡς ἡ νο πρὸς τὴν βκ, ἔτως ἡ οβ πρὸς κγ· διπλασία δὲ ἡ νο τῆς βκ, διπλασία ἄρα καὶ ἡ οβ τῆς κγ. Διὰ τὸ εἶναι δὲ τὰ Τρίγωνα δοξ, σκτ ὅμοια, ἔσονται δὲ καὶ αἱ τῶν κωνικῶν βάσεων διάμετροι δζ, στ ἐν λόγῳ διπλασίῳ (3). Τοιγαρῶν ἐπεὶ οἱ Κῶνοι δοξ, σκτ εἰσὶν ὅμοιοι (4), καὶ ὁ λόγος αὐτῶν (5) τριπλασίῳ τῷ λόγῳ τῶν διαμέτρων δζ, στ, αἵτινες εἰσὶ ὡς 2 πρὸς 1· ἔσται δὲ ὁ Κῶνος δοξ πρὸς τὸν Κῶνον σκτ, ὡς 8 πρὸς 1. Οὔ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. Ἀχθεῖσάν τῶν εὐθειῶν δν, σβ ἐπεὶ εἰσὶν ἡ γωνία δοξ, ἴση τῷ σκτ (6), ἄρα καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν δον, σκβ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· καὶ αἱ οδν, κσβ ἐρθαὶ (7), καὶ τὰ Τρίγωνα δον, σκβ ὅμοια (8), καὶ ἐπομένως δο : σκ : ον : κβ :: 2 : 1 (9)· ἄρα ἡ δζ (= δο) : στ (= σκ) :: 2 : 1· καὶ οἱ ἰσόπλευροι Κῶνοι, ἐπεὶ εἰσὶν ὅμοιοι, ἔσονται ὡς 8 πρὸς 1· εἰπὶ γὰρ 8, 4, 2, 1 ÷.

## Π ό ρ ι σ μ α .

Οὔ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος εἰς πρὸς τὸν εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον Κῶνον, ὡς ἡ περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη Σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην, τῷτ' εἰσὶν ὡς 8 πρὸς 1. Δῆλον ἔκ τε τῆς παρήσης καὶ τῷ ε'. Πορίσματος τῆς Μ'.

Καὶ ἐν γένει ἐπεὶ τὰ οἰονδήποτε εἶδος ὅμοια σώματα τὰ δυνάμενα περὶ Σφαῖραν περιγραφῆναι ἢ εἰς αὐτὴν ἐγγραφῆναι, ἔχει τὰς διαμέτρους ἢ τὰς πλευρὰς ταῖς διαμέτροις τῶν ἐγγεγραμμένων, ἢ περιγεγραμμένων Σφαιρῶν ἀνάλογον, καὶ ἔστι πρὸς ἀλλήλα ἐν λόγῳ τριπλασίονι μὲν κατὰ γρ τὰ εἰρηὰ, διπλασίονι, δὲ κατὰ τὰς ἐπιφανείας τῷ λόγῳ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, ἢ πλευρῶν· διὰ ταῦτα δὲ (10) ὄν λόγον ἔχει ἡ περὶ σῶμα οἰονδήποτε περιγε-

(1) Πόρισμ. Ε. τῆς ΙΕ. τῷ δ'. (2) Πόρ. τὸ αὐτό. (3) Δ. τῷ ε'. (4) Ορίσμ. Δ. τῷ β'. (5) ΙΒ. τῷ β'. (6) Πόρισμ. τῆς Β. τῷ α'. (7) ΛΑ. τῷ γ'. (8) Πόρ. Θ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. καὶ Πρωτ. Δ. τοῦ ε'. (9) Δῆλον ἐκ τῆςδείξεως τῆς Μ. τοῦ παρόντος. (10) ΛΔ. καὶ Ις. τῷ ε'.

γραμμένη Σφαῖρα, πρὸς τὴν εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα ἐγγεγραμμένην, τὸν αὐτὸν ἔχει  
 καὶ τὸ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον σῶμα, πρὸς τὸ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν  
 ἐγγεγραμμένον ὁμοιον σῶμα. Ὅν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ οἰουδή-  
 ποτε σῶμα περιγεγραμμένης Σφαίρας, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς τὸ αὐτὸ  
 σῶμα ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὴν  
 Σφαῖραν περιγεγραμμένου σώματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς τὴν αὐτὴν  
 Σφαῖραν ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σώματος.

### Πρότασις ΜΔ΄.

α. 55. Τῆς Σφαίρας τότε σφαιρὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἐστὶ, πρὸς τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν  
 ἐπιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένης ἰσοπλεύρου Κῶνης (δοζ), ὡς 4 πρὸς 9.

Ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν Σφαῖρα τπ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσό-  
 πλευρον Κῶνον σκτ, ὡς 32 πρὸς 9 (1). Ἔτος δὲ πρὸς τὸν περὶ τὴν αὐτὴν  
 Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὁμοιον Κῶνον δοζ, ὡς 1 πρὸς 8 (2), τῆτ' ἔστιν ὡς  
 9 πρὸς 72. Δι' ἴτα ἄρα ἡ Σφαῖρα τπ, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον  
 ἰσοπλευρον Κῶνον δοζ, ὡς 32 πρὸς 72. τῆτ' ἔστι (διαιρεθέντος ἐκκτέρου τῆ  
 ὄρου διὰ 8), ὡς 4 πρὸς 9.

Ἄλλως. Ἡ Σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσοπλευρον  
 Κῶνον, ὡς 32 πρὸς 9 (3). ὁ δὲ ἐγγεγραμμένος πρὸς τὸν περὶ τὴν Σφαῖραν  
 περιγεγραμμένον, ὡς 1 πρὸς 8 (4). τῆτ' ἔστιν ὡς 4 πρὸς 32. Δι' ἴτα ἄρα τε-  
 ταραγμένως (5) ἡ Σφαῖρα, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον ἰσοπλευ-  
 ρον Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9.

Δέδεικται δὲ ἐν τῇ Μ'. Ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, ἐστὶ πρὸς ἅλην  
 τὴν ἐπιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένης ἰσοπλεύρου Κῶνης, ὡς 4 πρὸς 9.  
 Τῆς Σφαίρας ἄρα τότε σφαιρὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐ-  
 πιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένης ἰσοπλεύρου Κῶνης, ὡς 4 πρὸς 9.  
 Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ὅπερ ἄρα ἔχει θαυμάσιος ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τῇ Σφαίρα, καὶ τῶ τὴν Σφαῖ-  
 ραν περιλαμβάνοντι Κυλίνδρῳ, τῆτ' αὐτὸ δέδεικται ἤδη καὶ ἡμῖν ἐπὶ τῆς  
 Σφαίρας καὶ τῆς τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντος ἰσοπλεύρου Κῶνης. Ὅτι δηλαδὴ  
 ἐνυπάρχει καὶ τοῖς σφαιροῖς ὁ αὐτὸς λογικὸς λόγος, ὅσπερ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις

(1) ΜΒ. τῆ παρόντος. (2) Πρωτ. προηγουμ. (3) ΜΒ. τῆ παρόντος. (4) ΜΓ. τοῦ  
 παρόντος. (5) ΚΓ. τοῦ ε΄.

τέτων τῶν σωμάτων· ὡς γὰρ ἐκεῖνος ἔδειξεν ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ, πρὸς τὸν Κύλινδρον κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 3· ἔτι δὲ καὶ ἡμῖν δέδεικται, ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐντέυθεν δὲ τὸν αὐτὸν λόγον τῆτ' ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον, ὃν παρέδωκεν Ἀρχιμήδης ὑπάρχειν μεταξύ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου, συνεχίζεσθαι κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ἀπὸ τῆ περιγεγραμμένη ἰσοπλεύρου Κῶνος μέχρι τῆς Σφαίρας εὐμαρῶς ἀποδείξαντες, τέλος ἤδη τῷ συγγραμματίῳ ἐπιδήσομεν.

### Π ρ ό τ α σ ι ς Μ Ε'.

Κῶνος ἰσόπλευρος περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, καὶ Κύλινδρος ὀρθὸς περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ὡσάυτως περιγεγραμμένος, καὶ αὐτὴ ἡ Σφαῖρα, περὶ ἣν ὁ, τε Κῶνος καὶ ὁ Κύλινδρος περιγεγράφεται, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, τῆτ' ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον. κ. 57.

Διὰ μὲν γὰρ τὴν ΔΒ'. τῆ παρόντος, ὁ ὀρθὸς Κύλινδρος ὁ τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνων, ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 6 πρὸς 4. Διὰ δὲ τὴν προηγμένην ΜΔ'. ὁ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος βαδ, ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4. Ὁ αὐτὸς ἄρα Κῶνος ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 6. Τὰ τρία ἄρα ταῦτα σώματα ὁ Κῶνος δηλαδή, ὁ Κύλινδρος καὶ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα, ὃν οἱ ἀριθμοὶ 9, 6, 4· τῆτ' ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Π ρ ό τ α σ ι ς Μ ζ'.

Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος, πρὸς τὸν περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὀρθὸν Κύλινδρον τὸν αὐτὸν ἔχει ἡμιόλιον λόγον, κατὰ τε τὰ σφαιρὰ καὶ τὰς ἐπιφανείας, ὅλας τε καὶ τὰς ἀπλάς, καὶ δὴ καὶ κατὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις. κ. τὸ αὐτό.

Πρόδηλος ἡ Πρότασις ὅσον μὲν ἦκει εἰς τὰς ὀλικὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ σφαιρὰ, ἐκ τῆς προηγμένης Προτάσεως· ὅσον δ' ἦκει εἰς τὰς ἀπλάς ἐπιφανείας, ἐκ τῆ Γ'. Πορίσματος τῆς Μ'. τῆ παρόντος· περὶ δὲ τὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἐκ τῆ Α'. καὶ Β'. Πορίσματος τῆς αὐτῆς Μ'.

Τ έ λ ο ς .

# Π α ρ ο ρ ά μ α τ α .

Σελ.	σίχ.		Σελ.	σίχ.	
10	22	δψ Γρ. αψ	159	22	κ <sub>2</sub> περι Γρ. κ <sub>2</sub> περι Α' λο- ρίθμυ, κ <sub>2</sub>
αὐτ.	32	δδ Γρ. δα	161	31	τεταγμένως Γρ. τεταραγ- μένως
11	8	όποσαισῶν Γρ. όποσαισῶν	165	26	αὐτὸ Γρ. αὐτὸ ἔτως
12	2	έφεξῆς Γρ. έφεξῆς ΔΒ.	173	27	τῶν Γρ. τῶν ὄλων
23	9	δηλ Γρ. δκλ	181	4	ξ:ι Γρ. ζ:ι
αὐτ.	σημ.	(12) κ <sub>2</sub> (13) η' Γρ. κ'	185	26	βζ Γρ. βζι
29	3	αβ Γρ. αδ	186	17	τῶν Γρ. τῶν τῶν
41	1	εζη Γρ. εζκ	197	26	$\frac{2}{3}$ Γρ. $\frac{2}{3}$
50	18	τῶ τρίτῳ Γ. τῶ αὐτῶ τρίτῳ	204	19	αεΓρ. δε. κ <sub>2</sub> βα: αγ:: δα: αε
55	1	ἀντι(10) Γρ. (2), κ <sub>2</sub> ἀντι(2) Γρ. (3) και καθεξῆς' πρό- δες δὲ ἐν τῇ σημειώσει, (12) Σχόλ. μετὰ τὴν ΔΔ.	205	3	βγ Γρ. βλ
57	28	(εζ) Γρ. (βζ)	209	25	γωνία Γρ. Γωνία (1),
59	1	κ <sub>2</sub> βζ Γρ. κ <sub>2</sub> βζα	215	4	πρ Γρ. λρ
60	21	αβ Γρ. $\frac{αβ}{τ}$	231	σημ.	(2) τῶ α' Γρ. τῶ ε'
αὐτ.	σημ.	(6) Α'ξ. 15'. Γρ. ΜΖ' Βιβλ. α'	244	30	ξ Γρ. ξι
61	15	ἔσαι βζ Γρ. ἔσαι $\frac{βζ}{τ}$	250	13	τ, Γρ. περιττεύει
62	15	τὸ η' Γρ. ἡ τὸ	253	16	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ αβ Γρ. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ αβ <sup>τ</sup>
71	5	7 × 1 Γρ. 3 × 7	254	32	αβ × ε Γρ. αβ + ε
77	σημ.	(2) τῶ α' Γρ. τῶ β'	255	12	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ αβ Γρ. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ αβ <sup>τ</sup>
84	14	γβ Γρ. γζ	274	21	σῶμα, Γρ. σῶμα ὑδέν,
84	σημ.	(2) Βιβλ. α'. Γρ. Βιβλ. β'	283	18	περιεχόμενον Γρ. περιεχο- μενον ἐσί.
85	σημ.	(3) τῶ α' Γρ. τῶ β'	αὐτ.	23	ταῦτα Γρ. ταῦτα
91	18	κ <sub>2</sub> Γρ. β	294	16	τῆς κατὰ Γρ. τῶ κατὰ
99	20	ασ Γρ. αο	297	σημ.	(1) Ο'ρ. Α' Γρ. (1) Ο'ρ. Β'
100	σημ.	(3) τῶ α' Γρ. τῶ γ'	304	21	τῶ ἐπὶ Γρ. ἡ ἐπὶ
109	32	εδ Γρ. εαδ	310	σημ.	(2) ΚΗ Γρ. Κ
113	23	πρὸς τῇ Γρ. πρὸς τῇ αὐτῇ	αὐτ.	αὐτ.	(5) τῶ ε' Γρ. τῶ ε'
117	23	βη Γρ. βκ	314	26	η Γρ. ὀ
118	25	βηγ Γρ. βκγ	319	7	πρ Γρ. πγ
122	27	σημεῖον Γρ. σημεῖον β	320	2	ἐκ Γρ. ἐκ
αὐτ.	σημ.	(11) τῶ α' Γρ. τῶ γ'	323	25	αὐτης Γρ. αὐτη
123	1	βγ Γρ. γβλ	325	16	κορυφῆς, κ <sub>2</sub> Γρ. κορυφῆς β,
128	23	χρήσει Γρ. ἐν χρήσει	334	7	ηα <sup>τ</sup> = Γρ. ηα <sup>τ</sup> +
150	12	κύκλυ, Γρ. κύκλυ ἡμιδια- μέτρυ,	335	29	βε <sup>κ</sup> Γρ. βε <sup>τ</sup>
Σημ.		Ἀντι θάτερα Γρ. ἀπανταχῶ ἡ ἑτέρα · κ <sub>2</sub> ἀντι θάτερας Γρ. τῆς ἑτέρας · κ <sub>2</sub> ἀντι θάτεραν Γρ. τὴν ἑτέραν · και ἀντι θάτερον Γρ. τὸν ἑτερον.	378	27	ξι Γρ. ξι
			385	15	τριπλῆ Γρ. διπλῆ.