Τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ βάσεως τῆς γδ ποιήσησι (1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ βάσις δίχα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς αμ (2)· προεκβληθεῖσα ἄρα ἡ μα, διὰ τῆς τῆ Τριγώνη κορυφῆς διελεύσεται (3).

Πρότασις ΙΖ'.

Ἐὰν ἐν Κύκλη τμήματι τῶ δαζ, ἧ ἡ βάσις δζ κάθετος ἔςηκεν ἐπὶ τὴν διάμετρον αοε. Σχῆμα ἰσόπλευρον, καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγραφῆ, ἀχθῆ δὲ ὡς ἐν τῆ προγεγραμμένη καὶ ἡ εὐθεῖα εβ· τὸ ὑπὸ τῆς εβ, καὶ τῆ της διαμέτρη μέρης αο, ὅς ἐςιν ἄξων τῆ τμήματος, περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἔςαι τῶ ὑπὸ μιᾶς τῶν τῆ ἐγγεγραμμένη Σχήματος πλευρῶν, καὶ ἁπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυσῶν βη. γθ μετὰ της αο ἡμισείας τῆς βάσεως δζ ἅμα ληφθεισῶν περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ. κ. 38.

Ἡ δὲ δεῖξις ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῆ τῆς προγεγραμμένης (ἔςι γὰρ αβ : βε : : ακ : κβ : : λκ : κη : : λμ : μγ : : νμ : μθ : : νο : οδ. Ἄρα αβ : βε : : ακ + κλ + λμ + μν + νο : βκ + κη + γμ + μθ + οδ· τοῦτ' ἔςιν αβ : βε : : αο : βη + γθ + δο· καὶ βε × αο = αβ × (βη + γθ + δο.)

Σχόλιον. Ἐὰν Τμῆμα Κύκλη τὸ δαζ, Σχῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον τὸ δηαθζ δέχηται ἤτοι, ὡς τὰς δύω ἀπεναντίον πλευρὰς δη, ζθ, παραλλήλης εἶναι ἀλλήλαις τε, καὶ τῶ Ἄξονι αο, δῆλον ὅτι τὸ τοιοῦτον Σχῆμα περὶ τὸν Ἄξονα αο (κατὰ τὰ ἑφεξῆς Λήμματα) Περιενεχθὲν, Κυλινδρικὴν ἀπογεννήσει ἐπιφάνειαν, ἢ Κωνικήν. κ. 41.

Λήμματα εἰς τὴν ἑξῆς.

Λ. Ἐὰν εἰς μέγιςον Κύκλον Σφαίρας σχῆμα κανονικὸν περὶ τὸν Ἄξονα αε συνιςάμενον ἐγγραφῆ (ἢ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος), τῆ δὲ Ἄξονος μένοντος, ὁ Κύκλος μετὰ τῆ Σχήματος περιαγόμενος ἀυτόσε πάλιν ἐπανέλθῃ, ὅθεν ἤρξατο κινεῖσθαι· λέγω ὅτι εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγραφήσεται Σῶμα ἐπιφανείαις ὀρθῶν Κώνων περιειλημμένον. κ. 37.

Αἱ μὲν γὰρ Εὐθεῖαι βα, ηα, καὶ δε, ζε, ὁλοχερεῖς ἐπιφανείας Κώνων ὀρθῶν καταγράψεσιν (4), αἱ δὲ γβ, θη καὶ θζ, γδ προεκβληθεῖσαι, κατὰ τὸ ἀυτὸ σημεῖον τῆς Διαμέτρε αε ἐφ' ἑκάτερα προεκβληθείσης, καὶ πρὸς ὀρθάς τε καὶ δίχα τὰς ἐπιζευγνυούσας τεμνούσης, συμπεσοῦνται (5)· καὶ κατα-

(1) ς. τοῦ α'. (2) Πορ. Α. τῆς παρούσης. (3) Σχολ. Δ. τῆς κε'. τοῦ α'. (4) Ὁρισμ. Β. τοῦ ιβ'. (5) Πορισμ. Γ. τῆς ις'. τοῦ παρόντος.

γράψουσιν ἄρα καὶ αὗται ὀρθῶν Κώνων ἐπιφανείας, ἐναπολαμβανομένας μεταξὺ παραλλήλων Κύκλων, ὧν τὰς περιφερείας αἱ τῶν Γωνιῶν β, γ, δ κορυφαὶ ἐν τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ καταγράφουσι.

Β. Σφαιρικοῦ Τμήματος, οὗ Ἄξων ἡ αο, ἔστω τομὴ μεγίστη ἡ δαζ· ἐν ᾗ Σχῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἰσόπλευρον πλὴν τῆς βάσεως, ἐγγεγράφθω οὕτως, ὡς μηδεμίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν παράλληλον εἶναι τῷ Ἄξονι αο. Ἐὰν οὖν τὸ τοιοῦτο Σχῆμα μετὰ τοῦ Τμήματος, εἰς ὃ ἐγγέγραπται, περὶ τὸν Ἄξονα αο περιενεχθῇ, λέγω ὅτι εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα ἐγγραφήσεται Σῶμα ὑπὸ Κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον.

Δείκνυται δὲ ὡς ἐν τῷ προτέρῳ Λήμματι.

Πρότασις ΙΗ΄.

κ. 37. Τῶν αὐτῶν κειμένων τῷ πρώτῳ Λήμματι· ἐὰν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου Σχήματος τῆς προσεχεστάτης τῇ διαμέτρῳ εὐθεῖα ἡ εβ ἀχθῇ, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς Κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις ἴσος ἐστὶ Κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (Ι) δύναται τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε καὶ τῆς ὑποτεινούσης εβ περιεχόμενον, τοῦτ' ἔστιν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (Ι) μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς τε Διαμέτρου αε, καὶ τῆς Ὑποτεινούσης εβ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ εὐθεῖαι βη, γθ, δζ ἴσαι εἰσὶ ταῖς εὐθείαις βκ, γμ, δο δὶς ληφθείσαις (1)· τὸ Ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ μιᾶς τῶν τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου Σχήματος πλευρῶν (τῆς αβ δηλονότι, ἢ βγ, ἢ γδ, ἢ δε) καὶ ἁπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυουσῶν βη, γθ, δζ ἅμα ληφθεισῶν περιεχόμενον, ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν αβ, βκ, τῷ τε ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, καὶ γμ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς γδ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς γμ, καὶ δο, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε, δο περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (2)· οὕτω γὰρ ληφθήσεται δὶς ἑκάστη τῶν εὐθειῶν βκ, γμ, δο. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς αβ, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν ἅμα ληφθεισῶν βη, γθ, δζ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεβ περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (3), τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς Ι τετραγώνῳ (4)· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Ι τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῆς αβ, καὶ βκ, ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ, ὑπὸ τῆς γδ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν γμ, δο· ὑπὸ τῆς δε, καὶ τῆς δο περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐὰν

(1) Πορισμ. Α. τῆς ιε΄. τοῦ παρόντος. (2) Προτ. Β. τοῦ β΄. (3) Ις. τοῦ παρόντος. (4) Ἐξ ὑποθέσεως.

δὲ γένωνται ἤδη τῶν μὲν αβ, καὶ βκ, μέση ἀνάλογον ἡ Π· τῆς δὲ βγ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ, ἡ Ξ· τῆς τε γδ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν γμ, δο, ἡ Ρ· καὶ τῶν δε, δο, ἡ Σ· ἔσεται δὴ τὰ ἀπὸ τῶν Π, Ξ, Ρ, Σ τετράγωνα τοῖς εἰρημένοις ὀρθογωνίοις ἴσα (1)· δέδεικται δὲ ἤδη τοῖς ὀρθογωνίοις τούτοις ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ι τετράγωνον. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Ι ἴσον ἔσται τοῖς ἀπὸ τῶν Π, Ξ, Ρ, Σ τετραγώνοις· Ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τετράγωνα (2)· καὶ ὁ ἀκτῖνι ἄρα τῇ Ι γραφεὶς κύκλος ἴσος ἔσται πᾶσι τοῖς κύκλοις, ὧν ἀκτῖνες αἱ Π, Ξ, Ρ, Σ, ὁμοῦ ληφθεῖσιν. Ἀλλ' οἱ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων Π, Σ γραφόμενοι κύκλοι ἴσοι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ τῶν πλευρῶν αβ, εδ παραγομέναις κωνικαῖς ἐπιφανείαις· μέση γὰρ ἐστιν ἀνάλογον ἡ Π τῆς τε αβ πλευρᾶς τοῦ Κώνου καὶ τῆς βκ ἀκτῖνος τῆς βάσεως (3). Ἐὰν δὲ ᾖ μέση ἀνάλογον καὶ τῶν εδ, δο· καὶ ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς Ξ γραφόμενος κύκλος ἴσος ἔσται τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ δύω παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ γθ, βη· καὶ γὰρ καὶ ἡ Ξ μέση ἐστιν ἀνάλογον τῆς τε βγ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ταῦτα καὶ ὁ κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ Ρ, ἴσος ἔσται τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ γθ, δζ. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς Ι γραφόμενος ἴσος ἔσται πάσαις ἅμα ληφθείσαις ταῖς κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις, ὁ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΘ'.

Κειμένων δὲ τῶν αὐτῶν τῷ δευτέρῳ Λήμματι, ἀχθείσης τε ὡσαύτως τῆς εβ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου κε ἐπὶ τὸ πέρας τῆς προσεχεστάτης τῇ διαμέτρῳ πλευρᾶς αβ, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα δαζ ἐγγεγραμμέναις ἐπιφανείαις, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς ὑποτεινούσης εβ καὶ τοῦ κατὰ τὸ Τμῆμα ἄξονος κο. κ. 38.

Ἡ δὲ δεῖξις τὰ μὲν ἄλλα ἡ αὐτὴ τῇ τῆς προηγουμένης, πλὴν ὅσον ἀντὶ τῆς Ις'. λεπτέον εἰς τοῦτο τὴν ΙΖ'.

Πρότασις Κ'.

Αἱ εἰς σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

---

(1) ΙΖ. τοῦ ς'. (2) Πόρισμ. Β. τῆς β'. τοῦ ιβ'. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα. (4) ΙΓ. τοῦ παρ.

κ. 39. Ἔςω δοθεῖσα ἐπιφάνεια ὁσονδηποτοῦν ἐλαχίςη ἡ Χ· Δῆλον ὅν, ὅτι δυνατόν ἐςι δοθῆναι ἐντὸς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας αγεθ ἑτέραν ὁμόκεντρον ἐπιφάνειαν τάυτης ἐλλείπουσαν ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης τῆς Χ. Ἑκατέρων δὴ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμηθεισῶν, ἔςωσαν μέγιςοι κύκλοι οἱ αγεθ, δπλμ· ἤχθω ἡ διάμετρος αδε· καὶ ἁπτέσθω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ δ ἡ νξ· ἐὰν ὦν τὸ τόξον αε δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ γ· καὶ ἑκάτερον τῶν τμημάτων δίχα αὖθις ὑποτμηθῇ (ἐν δέγε τῷ 18 σχήματι τριχοτομητέον τὸ τεταρτημορικὸν τόξον αγ, ὃ δὴ καὶ αὐτὸ γενήσεται κατὰ τὸ Γ. Πόρισμα τῆς ΙΕ. τοῦ Δ.), ἄχρις ὅτου ληφθήσεται τέως τόξον τὸ αβ ἔλαττον τοῦ αν (1), δῆλον ὅτι ἐὰν ὑποτείνῃ τὸ τόξον ἡ αβ, οὐκ ἐφάψεται τῆς περιφερείας δπλμ, ἀλλ' ἔσεται πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιςον κύκλον αγθε ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου, καὶ ἀρτιοπλεύρου σχήματος, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετρῆνται, καὶ οὐδεμία τούτων τῆς περιφερείας δπλμ ἐφάπτεται. Ἐὰν ὦν περὶ τὴν διάμετρον αε τὰ πάντα περιενεχθῇ, φανερὸν, ὅτι εἰς τὴν ἐκτὸς σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἐγγραφήσονται, αἵτινες τὴν ἑτέραν ὁμόκεντρον σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν περιέξουσι, καὶ ἑπομένως μείζονες αὐτῆς ἔσονται (2)· καὶ ἐπεὶ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δπλμ ἐλλείπει τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας αγεθ ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης τῆς Χ· πολλῷ δὴ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι τῆς δοθείσης Χ ἐλλείψουσιν αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας αγεθ (3)· ἀπολήγουσιν ἄρα εἰς τὴν αγεθ ἐπιφάνειαν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑ'.

κ. 41. Αἱ εἰς σφαιρικὸν τμῆμα τὸ δαζ ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς αὐτὴν τὴν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

Δείκνυται τοῖς αὐτοῖς σχεδὸν τῇ προηγουμένῃ συλλογισμοῖς.

Πρότασις ΚΒ'.

κ. 40. Δέδεικται ἐν τῇ ΙΗ'. ὅτι ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐςι τῆς τε διαμέτρου αε καὶ τῆς εὐθείας εβ τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου αε ἐπὶ τὸ πέρας τῆς τοῦ σχήματος πλευρᾶς αβ τῆς προσεχεςάτης τῇ διαμέτρῳ, ἴσος ἐςι πάσαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις κωνικαῖς ἐπιφα-

(1) Λημ. Β. σχολ. μετὰ τὴν ια'. τοῦ ς'. (2) Ἀξίωμ. μ. γ'. τοῦ πρώτου. (3) Ὁρισμ. ς. τοῦ ιβ'.

γείαις. Νῦν δὲ λέγω ὅτι ὁ κύκλος ἧτος ἀπολήγει τελευταῖον εἰς κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος αε (1).

Ἐὰν γὰρ πλείους ἀεὶ καὶ μᾶλλον πλείους εἰς ἄπειρον πλευραὶ εἰς τὸν μέγιστον ἐγγραφῶσι κύκλον (αἵγε περὶ τὴν αε περιενεχθεῖσαι, κωνικὰς ἀπογεννῶσιν ἐπιφανείας), δῆλον ὅτι ἡ αβ πλευρὰ γεννήσεται τελευταῖον πάσης δοθείσης εὐθείας ἐλάσσων· καὶ ἡ διαφορὰ τῶν αε, βε γεννήσεται δὴ καὶ αὕτη πάσης δοθείσης ἐλάσσων· καὶ πολλῷ δὴ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι πάσης δοθείσης διοίσει τῆς αε ἡ τὸν μέσον λόγον ἔχουσα τῶν αε, εβ, ἥτις ἀεί ἐστι μείζων τῆς εβ. Καὶ ὁ κύκλος ἄρα, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἀνάλογον εἴη τῶν αε, εβ, ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι διοίσει τοῦ κύκλου, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αε, τοῦτ' ἔστιν εἰς αὐτὸν ἀπολήξει (2). Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ'.

Δέδεικται ἐν τῇ ΙΘ'. ὅτι ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς ὑποτεινούσης εβ καὶ τοῦ κατὰ τὸ Τμῆμα ἄξονος αο, ἴσος ἐστὶ πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα δαζ ἐγγεγραμμέναις κωνικῆς ἐπιφανείαις. Νῦν δὲ λέγω, ὅτι ὁ Κύκλος ὅτος ἀπολήγει εἰς Κύκλον, οὗ Ἡμιδιάμετρός ἐστιν ἡ αδ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ Τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένη τοῦ Κύκλου δξζν, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Τμήματος. κ. 41.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ εβ ἀπολήγει τελευταῖον εἰς τὴν αε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς προηγουμένης δείξεως, δῆλον ὅτι καὶ ἡ μέση ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει τελευταῖον εἰς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν αε, αο, τοῦτ' ἔστιν εἰς αὐτὴν τὴν αδ (3). Καὶ ὁ Κύκλος ἄρα, οὗ ἡ ἐκ τοῦ Κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει εἰς τὸν Κύκλον, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ αδ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα εἰς τὴν ἑξῆς.

Ἐὰν ἡ Διάμετρος διπλασία ᾖ τῆς Διαμέτρου, ὁ Κύκλος ἔσται τετραπλάσιος τοῦ Κύκλου.

Δείκνυται ἐκ τῆς Β'. τοῦ ΙΒ'., καὶ τοῦ Γ'. Ὁρισμοῦ τοῦ Ε'. (ἢ ἐκ τοῦ Γ'. Πορίσματος τῆς Β'. τοῦ ΙΒ'.).

Πρότασις ΚΔ'.

Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου Κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. κ. 40.

---

(1) Ὁρισμ. ς. τοῦ ιβ'. (2) Ὁρισμ. ς. τοῦ ιβ'. (3) Πορισμ. Β. τῆς η'. τοῦ ς'.

Τὸ ἐξαίρετον τοῦ Ἀρχιμήδους τοῦτο Θεώρημα ῥᾷστα ἂν ἀποδείξαιμεν ἐκ τῶν ἤδη κειμένων, καὶ προαποδεικθέντων ὄντωσί.

Ἐν μεγίστῳ Κύκλῳ τῆς σφαίρας νοείσθω περὶ τὴν διάμετρον αβ Σχῆμα κανονικὸν ἐγγεγραμμένον (οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρείσθω), ὃ περὶ τὴν αβ περιενεχθὲν, ἀπογεννήσει Κωνικὰς ἐπιφανείας εἰς τὴν Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἐγγεγραμμένας· καὶ ἤχθω ἡ εβ. Δέδεικται δὴ (1), ὅτι πᾶσαι αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι, ἴσαι εἰσὶ Κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ Κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν αεβ Ὀρθογώνιον, τοῦτ' ἔστιν, οὗ ἡ Ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ. (Ὅπερ συμβαίνει ἀεὶ ὅσον ἂν τῶν ἐγγραφῶν εἰς ἄπειρον ἐχώμεθα)· ἐπεὶ δὲ αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσι τελευταῖον τῆς Σφαίρας, ἧς ἡ ἐκ τοῦ Κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ (2)· ὁ δὲ Κύκλος, ᾧ τινι ἰσοῦνται αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, ἀπολήγει εἰς Κύκλον, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἐστὶν ἡ αε, τοῦτ' ἔστιν ἡ τῆς Σφαίρας διάμετρος (3)· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἔσται Κύκλῳ, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ αε, τοῦτ' ἔστι (4) τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου Κύκλου (αγεδ) τῶν ἐν αὐτῇ· ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ὁ τὰ Ἀρχιμήδους μετιὼν εἴσεται ὅσον ἐπιτομωτέρα, καὶ σαφεστέρα τῆς τοῦ Ἀρχιμήδους δείξεως ἐστὶν, ᾗπερ αὐτοὶ ἐν τῷ παρόντι Θεωρήματι ἐχρησάμεθα.

Πορίσματα.

Α'. Ἐκ τοῦ ἐξαιρέτου, καὶ θαυμασίου τοῦδε Θεωρήματος, ὃ κλέος ἀΐδιον περιεποιήσατο Ἀρχιμήδει παρὰ πᾶσι τοῖς Γεωμέτραις, ἔνεστι λαβεῖν Κύκλον ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· οὗτος δὲ ἐστὶν, οὗ ἡ Ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ τῆς Σφαίρας διαμέτρῳ, ἢ οὗ ἡ Διάμετρος διπλασία τῆς τῆς Σφαίρας διαμέτρου.

Β'. Ἐντεῦθεν καὶ ἐκ τῆς Β'. τοῦ ΙΒ'. μετὰ τῆς ΙΕ'. τοῦ Ε'. δῆλον, ὅτι αἱ τῶν Σφαιρῶν ἐπιφάνειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ἐν λόγῳ διπλασσίονι τῶν ἐν αὐταῖς Ἡμιδιαμέτρων.

Σχόλιον.

Ῥάστη ἤδη ἐστὶν ἡ καταμέτρησις τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῆς ἁπασῶν τῶν καμπύλων τὰ πρωτεῖα φερούσης. Ὁ τρόπος δὲ ταύτης διττός.

Α'. Μὲν γὰρ μετρείσθω Κύκλος ὁ μέγιστος τῆς Σφαίρας, ὡς παραδέδω-

(1) ΙΗ. τοῦ παρόντος. (2) Κ. τοῦ παρ. (3) ΚΒ. τοῦ παρ. (4) Διὰ τὸ προγ. Λῆμ.

ται ἐν τῷ μετὰ τὴν ς'. τῦ παρόντος Σχολίῳ, ϗ πεπολλασιάσθω διὰ 4. Οἷον ἐὰν εὑρεθῇ ἡ τῦ κατὰ γῆν μεγίςυ Κύκλυ ἐπιφάνεια τετραγωνικὰ μίλλια Ὡ'ρικὰ, εἴτ' ὖν Βελγικὰ περιέχυσα ς. 940000, ὁ ἀριθμὸς ὗτος τετραπλασιαθεὶς, δίδωσι τετραγωνικὰ μίλλια Βελγικὰ 23. 760000, εἰς τὴν τῆς γηΐνης Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Β'. Δὲ ἡ τῆς Σφαίρας διάμετρος πολλαπλασιαθεῖσα διὰ τῆς περιφερείας τῦ μεγίςυ Κύκλυ τῶν ἐν αὐτῇ, δίδωσι τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν. Οἷον εἴπερ ἡ τῆς Γῆς διάμετρος μίλλια Βελγικὰ ὡρικὰ περιέχειν ὑποτεθείη 2750 $\frac{4}{11}$, ἡ δὲ τῦ κατ' αὐτὴν μεγίςου Κύκλου περιφέρεια 8640 (1), οἱ δύω ὗτοι ἀριθμοὶ, ἀμελυμένυ τῦ κλάσματος, πολλαπλασιαθέντες ἐπ' ἀλλήλυς, δώσυσι πάλιν τετραγωνικὰ μίλλια ὡρικὰ 23. 760000 εἰς τὴν ὅλην τῆς γηΐνης Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Τὰ δὲ τῆς δείξεως πρόδηλα ἐκ τῦ Α'. Πρίσματος τῆς Ε'. τῦ παρόντος. Τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν διαμέτρυ, ϗ τῆς τῦ κατ' αὐτὴν μεγίςου Κύκλυ περιφερείας περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἐςὶ, διὰ τὸ εἰρημένον Πόρισμα, τετραπλάσιον τῦ μεγίςυ Κύκλυ.

(Περὶ δὲ τῶν ἐν τῷ παρόντι Σχολίῳ παραληφθέντων ἀριθμῶν ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ς'. τῦ παρόντος Σχολίῳ εἰρημένα).

Πρότασις ΚΕ'.

Πάσης Σφαιρικῆς μοίρας (δαζ) ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ Κύκλῳ, ὗ ἡμιδιαμετρος ἐςὶν ἐυθεῖα (ἡ αδ) ἡ ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν μοῖραν κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένη τῦ Κύκλυ (δοζν), ὅς ἐςι βάσις τῆς μοίρας. ς. 41.

Μέρος Α'. Ἐν μεγίςης τομῆς μοίρᾳ Σχῆμα νοείθω ἐγγεγραμμένον περὶ τὸν Ἄξονα αο ἰσόπλευρόν τε, ϗ ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς βάσεως (ὗ μηδεμία πλευρὰ ἔςω (2) παράλληλος τῷ Ἄξονι), ὁ περὶ τὴν αο περιενεχθὲν, Κωνικὰς ἐν τῇ μοίρᾳ ἐπιφανείας ἐγγράψει· ἤχθω δὲ ϗ ἡ εβ ὁμοίως τοῖς πρότερον (3). Πᾶσαι ὖν αἱ εἰς τὸ Τμῆμα ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, ἴσαι εἰσὶ Κύκλῳ, ὗ ἡ ἐκ τῦ Κέντρυ μέση ἐςὶν ἀνάλογον τῆς εὐθείας εβ, ϗ τῦ κατὰ τὸ Τμῆμα Ἄξονος αο (4). Τῦτο δὲ συμβήσεται ἐσαεὶ, ἐπαναλαμβανομένων τῶν ἐγγραφῶν εἰς ἄπειρον. Τοιγαρῦν, ἐπεὶ καὶ αἱ εἰς τὸ Τμῆμα ἐγγραφόμεναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν Τμήματος ἀπολή-

(1) Ὅρα ὄπισθεν σελ. 340. (2) Ὅρα Σχολ. τῆς ΙΖ. τῦ παρόντος· (3) ΙΗ. ϗ ΙΘ. τῦ παρόντος. (4) ΙΘ. τῦ παρόντος.

γεστιν (1), ὅ,τε Κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ Κέντρου μέση ἐςὶν ἀνάλογον τῶν εβ, αο, εἰς Κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ, ἀποτελευτᾷ (2)· καὶ ἡ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια δαζ, ἴση ἔςαι Κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ (3). Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Μέρος Β'. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς ε τῆς ἐλάσσονος Σφαιρικῆς μοίρας δεζ ἤχθω ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἡ εδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αδε γωνία ἐςὶν ὀρθὴ (4)· ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος ἄρα τῆς αε γραφόμενος Κύκλος, ἔςαι ἴσος τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, εδ, γραφομένοις ἅμα ληφθεῖσιν (5). Ἀλλ' ὁ μὲν ἀπὸ τῆς αε Κύκλος ἴσος ἐςὶ τῇ ὅλῃ Σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ (6), ὁ δ' ἀπὸ τῆς αδ, ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος μοίρας δαζ (7)· ὁ ἄρα ἀπὸ τῆς εδ Κύκλος ἴσος ἐςὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐλάσσονος μοίρας δεζ.

Τυτὶ τὸ δεύτερον ἐςὶν ἐκ τῶν λόγου ἀξίων τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρέσεων, ὅπερ ἡμεῖς (ὥσπερ δὴ καὶ τὸ προηγούμενον) πολὺ δὴ μᾶλλον ἐπιτομώτερον, καὶ σαφέςερον, ἤπερ αὐτὸς Ἀρχιμήδης, ἐδείξαμην.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν διαμέτρου αε, καὶ τοῦ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας δαζ Ἄξονος αο (ἢ δοθέντων τοῦ Ἄξονος αο, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν Ἡμιδιαμέτρου οδ), εὑρίσκεται ἡ αδ ἡμιδιάμετρος Κύκλου, ὃς ἐςὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας, καὶ ἐντεῦθεν ἡ καταμέτρησις τῆς κατὰ τὴν Σφαιρικὴν μοῖραν ἐπιφανείας. Ἐπεὶ γὰρ εἰσὶ αε, αδ, αο ∺ (8), ἔσεται δὴ ἡ αδ = √(αδ × αο) (9) (ἢ ἐπειδὴ τὸ Τρίγωνον αοδ ἐςὶν Ὀρθογώνιον, ἔςαι αδ = √(αο² + δο²) (10). Ὅθεν ἐὰν γένηται ὡς 113 πρὸς 355, οὕτως ἡ αδ πρὸς τέταρτον ὅρον· οὗτος ὁ τέταρτος πολλαπλασιαθεὶς διὰ τῆς αδ, δώσει ἐμβαδὸν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἴσον. Δείκνυται ἐκ τῆς πορίσμης, καὶ ἐκ τοῦ μετὰ τὴν ς'. Σχολίου σὺν τῷ ΙΕ'. τοῦ Ε'.

Πρότασις Κς'.

κ. 42. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένου ὀρθοῦ Κυλίνδρου ἡπσου, ἴση ἐςὶ τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ. Καὶ ἐὰν ὁ Κύλινδρος, καὶ ἡ Σφαῖρα Ἐπιπέδοις ὀρθοῖς ἐπὶ τὸν Ἄξονα βθ τμηθῶσιν, ἕκαςον Τμῆμα τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἑκάςῳ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔσεται ἴσον.

Μέρος Α'. Ἐπεὶ γὰρ ἡ τοῦ Κυλίνδρου πλευρὰ ηπ ἴση ἐςὶ τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ πσ (11), ἔσεται ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ησ τετραπλασία τῆς βά-

(1) Κ. τοῦ παρόντος. (2) ΚΓ. τοῦ παρόντος. (3) Β. τοῦ παρόντος. (4) ΛΓ. τοῦ γ'. (5) Πορισμ. Η'. τῆς Β. τοῦ ιβ'. (6) Δῆλον ἐκ τῆς ΚΔ. τοῦ παρόντος. (7) Δῆλον ἐκ τοῦ πρώτου μέρους τῆς παρούσης. (8) Πορισμ. Β'. τῆς Η. τοῦ ς'. (9) ΙΖ. τοῦ ς'. (10) ΜΖ. τοῦ α'. (11) Ἐξ ὑποθέσεως.

σεως (1), τοῦτ' ἔστι τοῦ μεγίστου Κύκλου τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ τῇ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένῃ. Τετραπλασία δὲ τῆς τούτου ἐπιφανείας ἐστὶ καὶ ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (2)· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ Κυλίνδρου ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαίρας. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Μέρος Β'. Ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ βο, οθ. Ἐπεὶ ἡ γωνία βοθ ἐστὶν ὀρθὴ ἐν Ἡμικυκλίῳ (3), καὶ ἡ ογ κάθετος ἐπὶ τὴν βο· ἡ ἄρα βο μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς βθ, καὶ βγ (4), τουτ' ἔστι τῆς ιτ, καὶ τῆς ηι. Ὁ Κύκλος ἄρα, ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς βο, ἴσος ἔσται, τῇ Κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ητ (5)· ἔστι δὲ ἴσος καὶ τῷ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας οβκ (6)· ἡ Κυλινδρικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ητ, ἴση τῇ Σφαιρικῇ βοκ.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ταῦτα καὶ ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ηχ ἐστὶν ἴση τῇ Σφαιρικῇ ξβρ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Κυλινδρικὴ ιχ λοιπῇ τῇ Σφαιρικῇ ξοκρ, τῇ μεταξὺ δύω παραλλήλων Κύκλων ἴση ἔσται. Καὶ τὸ αὐτὸ δειχθήσεται περὶ πάντων τῶν Τμημάτων.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Κυλίνδρου περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένου, διπλασία ἐστὶ τῆς βάσεως.

Πρότασις ΚΖ'.

Τὰ Σφαιρικῆς ἐπιφανείας Κύκλοις παραλλήλοις τετμημένης τμήματα, λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τμήματα τῆς διαμέτρου (βγ, γδ, δα, αε, εζ, ζθ), πρὸς τοὺς Κύκλους τοὺς παραλλήλους ταῖς εὐθείαις. κ. 42.

Ἕπεται ἐκ τοῦ προηγουμένου. Τὰ γὰρ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήματα οβκ, ξοκρ, μξβν κτ., ἴσα ἐστὶ τοῖς Κυλινδρικοῖς ητ, ιχ, λν κτ. (7). Ἀλλὰ ταῦτα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τοῦ Ἄξονος τμήματα βγ, γδ, δα (8)· καὶ κεῖνα ἄρα. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον.

Ἐντεῦθεν γινώσκεται ὁ τῶν Ζωνῶν, καὶ Κλιμάτων πρὸς ἄλληλα λόγος. Ἔχει γὰρ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τοῦ Ἄξοντος τμήματα, ἅπερ γινώσκεται ἐκ τοῦ Πίνακος τῶν Ἡμιτόνων.

Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ καὶ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας πορίζεται

---

(1) Πορισμ. τῆς ΙΒ. τοῦ παρόντος. (2) ΚΔ. τοῦ παρόντος. (3) ΛΔ. τοῦ γ'. (4) Πορισμ. Β'. τῆς Η. τοῦ ς'. (5) ΙΔ. τοῦ παρόντος. (6) Ἐκ τῆς προηγουμένης. (7) Ἐκ τῆς προηγουμένης. (8) ΙΓ. τοῦ ιβ'.

καταμέτρησις. Ἐπεὶ γὰρ ἐκ τοῦ Σχολίου τῆς ΚΔ'., ἥτε ὅλη τῆς Σφαίρας γινώσκεται ἐπιφάνεια, καὶ ὁ τῶν τμημάτων πρὸς ἄλληλα λόγος, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῶν τοῦ Ἄξονος τμημάτων· φανερὸν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς σφαίρας γνωσθήσεται.

Γρέον δ' ἔτι ὡς τὰ τέτταρα προηγούμενα Θεωρήματα, καὶ πάντα τὰ ἑπόμενα, ἐξαίσιά τε ἐστὶ, καὶ θαυμάσια, καὶ οὐκ ἂν εἴποις ὅσην σπουδὴν εἰς τὴν τούτων κατάληψιν καταβλητέον ἐστὶ τοῖς Γεωμετροῦντας.

Λῆμμα εἰς τὴν ἑξῆς.

κ. 43. Ἐὰν Ἐπίπεδον (τὸ ξν) Σφαίρας ἐφάπτηται κατὰ τὸ ο, ἡ ἀπὸ τοῦ Κέντρου τῆς Σφαίρας ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη εὐθεῖα (αο), κάθετος ἐστὶ τῷ ἐφαπτομένῳ Ἐπιπέδῳ.

Τετμήθωσαν τό,τε ἐπιψαῦον Ἐπίπεδον, καὶ ἡ Σφαῖρα διά τε τοῦ Κέντρου α, καὶ τοῦ τῆς ἁφῆς σημείου ο δυσὶν Ἐπιπέδοις (ὧν τομὴ ἔσται ἡ αο), ἅτινα ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλους ἀπογεννῶσι τοὺς οθ, οδ, ἐν δὲ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ εὐθείας τὰς γο, ιο, αἵτινες τῶν Κύκλων κατὰ τὸ σημεῖον ο συνεφάψονται (1). Ἡ ἄρα αο κάθετος ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ιο, γο (2)· ἑπομένως δὲ καὶ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ (3). Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι Σφαῖρα ἐπ' ἀκριβὲς λεῖα ἐν Ἐπιπέδῳ ὁριζοντείῳ ἐπ' ἀκριβὲς λείῳ τῷ νξ τῆς Γῆς κατὰ τὸ ο ἐπιψάυοντι τεθεῖσα, οὐ στήσεται, εἰμὴ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς ο γενομένη. Οἷον ἐὰν Σφαῖρα ἐν τῷ σημείῳ ι τεθῇ, αὕτη δὴ διά τε τὴν αὐτῆς βαρύτητα, καὶ τὴν τοῦ Ἐπιπέδου ἐπίκλισιν ἐπὶ τὸ σημεῖον ο γενήσεται. Ἀχθείσης γὰρ τῆς αι, ἡ τὴν ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ αοι ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ αι, μείζων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς αο (4) Διάτοι τοῦτο ἡ Σφαῖρα μᾶλλον ἀφέσηκε τοῦ Κέντρου ἐν τῷ ι ὖσα, ἤπερ ἐν τῷ ο. Οὐκ ἄρα στήσεται ἐν τῷ ι, ἀλλὰ καταβήσεται ἐπὶ τὸ ο. Ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν ἔχοιμεν ἀποδεῖξαι τὴν τῶν ῥευστῶν κατάβασιν, ὅτε μὴν τὴν εἰς σφαιροειδῆ ἐπιφάνειαν αὐτῶν διαμόρφωσιν.

Λῆμμα εἰς τὴν Γ'. συνέπειαν τοῦ ἑπομένου Σχολίου. Ἔστωσαν ο, π, ξ, τριῶν Κύκλων περιφέρειαι, καὶ ρ, σ, τ, τούτων ἡμιδιάμετροι· καὶ κείσθω ρ — σ = τ· ἔσται δὴ ο — π = ξ.

Ἔστι γὰρ ο : π :: ρ : σ (5)· καὶ π : ξ :: σ : τ· ἄρα ο — π : ξ :: ρ — σ : τ (6). Ἀλλὰ ρ — σ = τ, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα καὶ ο — π = ξ (7).

(1) Ὁρισμ. Β. τοῦ γ'. (2) ΙΗ. τοῦ γ'. (3) Δ. τοῦ ια'. (4) ΙΘ. καὶ Πορισμ. Ε'. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (5) Ζ. τοῦ παρόντος. (6) Πορισμ. Β'. τῆς ΚΒ. τοῦ ε'. (7) Ὁρισμ. Ε. τοῦ ε'.

Πρότασις ΚΗ'.

Πᾶσα Σφαῖρα ἴση ἐςὶ Κώνῳ (τῷ φο), ἡ τὸ μὲν ὕψος (κο) ἴσον ἐςὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ τῆς Σφαίρας· ἡ δὲ βάσις (φ) ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ. κ.44.45.46

Νοείσθω περὶ τὴν Σφαῖραν σῶμά τι πολύεδρον περιγεγραμμένον, ἡ τὰς ςερεὰς γωνίας Ἐπίπεδα ἕτερα τῆς Σφαίρας ἐπιψαύοντα ἀποτεμνέτω· οὗ γενομένου, σῶμα ἕτερον πολύεδρον περιλαμβάνον τὴν Σφαῖραν ἀπογεννήσεται τοῦ προτέρου ἔλαττον, ἐκ πλειόνων τε γωνιῶν συνιςάμενον καὶ ἐπιφάνειαν ἔχον ἐκ πλειόνων καὶ ἐλασσόνων Ἐπιπέδων τῆς Σφαίρας ἐπιψαυόντων συγκειμένην. Ἐὰν δὲ τοῦ πολυέδρου τούτου αἱ ςερεαὶ γωνίαι Ἐπιπέδοις ἑτέροις ἐπιψαύουσι τῆς Σφαίρας αὖθις ἀποτμηθῶσιν, καὶ τοῦ ἐντεῦθεν ἀπογεγεννημένου πολυέδρου αἱ γωνίαι ὁμοίως ἀποτμηθῶσιν, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον· γεννήσεται τέως, ὡςε τὸ μὲν πολύεδρον ὑπερέχειν τῆς Σφαίρας ςερεῷ παντὸς δοθέντος ἀλάσσονι· τὴν δὲ τούτου ἐπιφάνειαν τὴν ἐξ Ἐπιπέδων ἐπιψαυόντων ἀπείρων, καὶ ἐλασσόνων καὶ δὴ καὶ πλειόνων (ὡς εἶπον) συγκειμένην, ὑπερέχειν ὡσαύτως τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας Ἐπιπέδῳ παντὸς δοθέντος ἀλάσσονι. Ὅπερ ἔχει μὲν ἑκάτερον ἀποδειχθῆναι, διὰ τὸ εἶναι δὲ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον, αἰτείσθω τέως συντομίας χάριν. Τούτων δ' οὕτω κατασκευασθέντων, τὸ Θεώρημα συντεθήσεται τοῦτον τὸν τρόπον.

Τὸ ἤδη ἐκκείμενον πολύεδρον ἐκ Πυραμίδων σύγκειται, ὧν κορυφὴ μὲν κοινὴ τὸ Κέντρον ἐςὶ τῆς Σφαίρας· βάσεις δὲ τὰ ἐπιψαύοντα Ἐπίπεδα, ἐξ ὧν ἡ τοῦ πολυέδρου σύγκειται ἐπιφάνεια. καὶ ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ἑκάςου Ἐπιπέδου ἠγμέναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἑκάςῳ Ἐπιπέδῳ (1), δῆλον ὅτι πᾶσαι αἱ Πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ πολύεδρον, ἴσον ἕξουσιν ὕψος, αὐτὴν δηλονότι τὴν αβ, ἥτις ἐςι τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος. Ἐὰν ἄρα ἤδη τεθῇ Ἐπίπεδον τὸ Χ τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ ἴσον, καὶ ἐπ' αὐτοῦ Πυραμὶς ἀνεςαμένη ὀρθή, ὕψος ἔχουσα τὴν εὐθεῖαν μν ἴσην τῇ τῆς Σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ αβ· φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ εἰρημέναι Πυραμίδες, τοῦτ' ἔςιν ὅλον τὸ πολύεδρον ἴσον ἔςαι τῇ Πυραμίδι νΧ (2). Καὶ τῷ αὐτῷ τρόπῳ δείκνυται ὅτι πάντα τὰ τὴν Σφαῖραν περιλάμβανοντα λοιπὰ πολύεδρα, τὰ ἐκ τῆς ἀποτμήσεως τῶν ςερεῶν γωνιῶν ἄλλα ἐπ' ἄλλοις εἰς ἄπειρον ἀπογεννώμενα, ἔσονται ἀεὶ ἴσα ταῖς Πυραμίσι (νΧ), ὧν τὸ μὲν ὕψος (μν) ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ· ἡ δὲ βάσις (Χ) ἴση ταῖς ἐπιφανείαις τῶν τὴν Σφαῖραν περιλαμ-

(1) Πρότ. λῆμμα. (2) Δῆλον ἐκ τῆς δείξεως τῆς ε'. τοῦ ιβ'.

βανόντων πολυέδρων. Ἐπεὶ δὲ τὰ μὲν πολύεδρα ἀπολήγει τέως εἰς τὴν Σφαῖραν, ὡς ἀνωτέρω εἶπον, αἱ δὲ Πυραμίδες (νΧ) ἀποτελευτῶσιν, ὡς μικρῷ ὕστερον δειχθήσεται, εἰς τὸν Κῶνον. Ἡ Σφαῖρα (1) ἄρα ἴση ἔσται τῷ Κώνῳ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ αἱ Πυραμίδες νΧ (2) ἀποτελευτῶσιν εἰς Κῶνον, δειχθήσεται οὕτως. Αἱ τῶν πολυέδρων ἐπιφάνειαι ἀπολήγουσιν εἰς τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν, ὡς ἤτηται ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ αἱ βάσεις Χ τῶν Πυραμίδων νΧ ὑπόκεινται ἀεὶ ταῖς ἐπιφανείαις τῶν πολυέδρων ἴσαι· ἡ δὲ βάσις φ τοῦ Κώνου φ ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· ἄρα καὶ αἱ βάσεις Χ ἀπολήξουσιν εἰς τὴν βάσιν φ· καὶ ἑπομένως, ὡς αἱ Πυραμίδες νΧ πρὸς τὸν ἐξ ὑποθέσεως ἰσοϋψῆ Κῶνον, οὕτως ἡ βάσις Χ πρὸς τὴν βάσιν φ (3)· αἱ Πυραμίδες ἄρα εἰς τὸν Κῶνον ἀπολήξουσιν.

Ἡ ἐκτεθειμένη ἡμῖν ἀπόδειξις τῆς τε παρούσης, καὶ τῆς ἑπομένης προτάσεως πολύ τι διενήνοχε τῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, ἥτις καίτοι πολλήν τινα ὀξύτητα τοῦ ἀνδρὸς ἐμφαίνουσα καὶ ἐπίνοιαν· ἔστιν ὅμως σχοινοτενής τις καὶ δυσχερεστάτη· παραλαμβάνεται γὰρ ἐν αὐτῇ δύω τινὰ ὡς ὁμολογούμενα, καὶ προτάσεις ἕνδεκα καὶ πολλαὶ ἄλλαι, ὧν ἐκεῖναι ἐξήρτηνται. Αὐτὸ δὲ τὸ Θεώρημα οὕτω προτίθησιν Ἀρχιμήδης. Πᾶσα Σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ Κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ Κέντρου τῆς Σφαίρας.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι τὸ Ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι Κώνου βασιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ· ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ Κέντρου αὐτῆς τῆς Σφαίρας.

Τὸ Πόρισμα τόδε εἰς τὴν Λ΄. προβάλλεται ὁ Ταχνέτιος. Ἀλλ' εἰς τὴν τοῦτο δεῖξιν λαμβάνει τοῦ Θ' ὅπερ μόλις ἐστὶ καὶ αὐτῆς τῆς Προτάσεως σαφέστερον. Ὅτι δηλαδὴ τὸ Ἡμισφαίριον ἴσον ἐστὶ Κώνῳ ἔχοντι, ὕψος μὲν τὴν ἐκ τοῦ Κέντρου τῆς Σφαίρας, βάσιν δὲ Κύκλον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ Ἡμισφαιρίου ἴσον. Ὅ δὴ καὶ αὐτὸ εὐκόλως, καὶ αὐτὴ δὴ αὕτη ἡ Λ΄. οὐχ ἧττον, ἐξ αὐτῆς τῆς ΚΗ΄. συνάγεται. Δέον ἦν ἢ τὴν Λ΄. ἐνταῦθα μετακομίσαντας εἰς Πόρισμα μεταβαλεῖν τὸ προειρημένον, ἢ γοῦν τῆς Προτάσεως κατὰ χώραν μενούσης, τὴν ἀπόδειξιν ἑτεροίως μεταρυθμίσαι.

Σχόλιον.

Ἐκ τοῦ ἐξαιρέτου τοῦ δε Θεωρήματος ἡ τοῦ ἐν τοῖς στερεοῖς εὐγενεστάτου Σχή-

(1) Δ. τοῦ παρόντος. (2) Ὁρισμ. ε΄. τοῦ ιβ΄. (3)

ματος πορίζεται καταμέτρησις. Ἐὰν γὰρ τὸ ἑκτημόριον τῆς διαμέτρου, ἢ τὸ τριτημόριον τῆς Ἡμιδιαμέτρου διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας, γινωσκομένης ἤδη ἐκ τοῦ Σχολίου τῆς ΚΔ΄. πολλαπλασιασθῇ, προκύπτει τὸ τῆς Σφαίρας στερεόν. Οἷον εἰ εὑρεθείη ἡ μὲν τῆς κατὰ γῆν Σφαίρας ἐπιφάνεια Τετραγωνικὰ μίλια ὡρικὰ περιέχουσα 23,760000· ἡ δὲ Ἡμιδιάμετρος μιλίων ὖσα ὡρικῶν 1375, ἢ τὸ τριτημόριον ἐστὶ 458 $\frac{1}{3}$. Τοῦτο δὴ πολλαπλασιασθὲν, ἀμελησθέντος τοῦ Κλάσματος, διὰ 23,760000, δώσει Κυβικὰ τετραγωνικὰ μίλια ὡρικὰ 10882,080000 εἰς τὸ τῆς γηΐνης Σφαίρας στερεόν. (Περὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ς΄. τοῦ παρόντος σημειωθέντα Σχολίῳ).

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Σφαῖρα ἴση ἐστὶ Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ ἐκ τοῦ Κέντρου τῆς Σφαίρας, βάσις δὲ ἡ τῆς Σφαίρας αὐτῆς ἐπιφάνεια (1), τὸ δὲ τοῦ Κώνου στερεὸν προκύπτει ἐκ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους, τοῦτ' ἔστι τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἡμιδιαμέτρου (2), πολλαπλασιαζομένου διὰ τῆς βασέως, τοῦτ' ἔστι διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας· καὶ τὸ τῆς Σφαίρας ἄρα στερεὸν προκύψει ἐκ τοῦ τριτημορίου τῆς Ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν πολλαπλασιαζομένου.

Δοθεισῶν δὲ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς περιφερείας, εὑρεθήσεται τὸ τῆς Σφαίρας στερεὸν, ἐὰν τὸ ἑκτημόριον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρου πολλαπλασιασθῇ. Ἢ, ἄλλως, ἐὰν τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρου διαιρεθῇ διὰ 6· τὸ δὲ πηλίκον διὰ τῆς περιφερείας πολλαπλασιασθῇ· τὸ αὐτὸ γὰρ καὶ οὕτω προκύψει γινόμενον, ὡς εἴπερ ἐπολλαπλασιάζετο τὸ τῆς διαμέτρου ἑκτημόριον ἐπὶ τὴν τῆς Σφαίρας περιφέρειαν.

Πρότασις ΚΘ΄.

Παντὶ τομεῖ Σφαίρας ἴσος ἐστὶ Κῶνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων ἴσον τῇ ἐκ τοῦ Κέντρου τῆς Σφαίρας· βάσιν δὲ ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σφαιρικοῦ Τομέως.

Ἔστω πρῶτον τομεὺς Ἡμισφαιρίου ἐλάσσων (ὁ αεγθ). Περὶ δὲ τὸν Τομέα νοείσθω σῶμα πολύεδρον ἐυθύγραμμον περιγεγραμμένον. Ἐὰν οὖν ὁ λοιπὸς ἅπας συλλογισμὸς ὁμοίως τοῖς προηγουμένοις διατεθῇ, τῷ αὐτῷ τρόπῳ συντεθήσεται, ἢ συναχθήσεται τὸ ζητούμενον· δεικτέον δὲ τοῦτο μόνον, ἐξ οὗ ἅπας ὁ τῆς δείξεως ἥρτηται λόγος, ὅτι ἡ τοῦ πολυέδρου ἐπιφάνεια, ἡ ἐξ Ἐπιπέδων πανταχόθεν τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας εγθ ἐπιψαυόντων συγκειμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας εγθ· ὅπερ οὕτω γενήσεται. Νενοήσθω τῇ ἐπιφανείᾳ εγθ προσεθῆσθαι ἑτέρα ἴση καὶ ὁμοία, ὑπὸ Ἐπιπέδων ἐπιψαυόντων ὁμοίως τοῖς

κ. 47.

(1) ΚΗ. τοῦ παρόντος. (2) ς. τοῦ παρόντος σελ. 342.

πρότερον περιλαμβανομένη· ἔσεται δὴ ὅλη ἡ ἐκ τῶν Ἐπιπέδων συγκειμένη ἐπιφάνεια, τῆς Σφαιρικῆς ὅλης μείζων (1)· καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ἐκ τῶν Ἐπιπέδων συγκειμένης, μείζων ἔσται τῆς ἡμισείας τῆς Σφαιρικῆς εγθ.

Ἔστω δεύτερον τομεὺς μείζων Ἡμισφαιρίου ὁ αεβθ. Συναμφότερος ἄρα ὁ Τομεὺς ἴσος ἐστὶ Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια (2)· τοῦτ' ἔστι δυσὶ Κώνοις, ὧν τὸ μὲν ὕψος ταὐτὸν, βάσεις δὲ ἴσαι τοῖς τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήμασιν εγθ, εβθ. Ἀλλ' ὁ εἷς τῶν Τομέων, ὅς ἐστιν ἐλάσσων Ἡμισφαιρίου, τοῦτ' ἔστιν ὁ αεγθ, ἴσος ἐστὶ, διὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆς δείξεως, Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ ἐπιφάνεια εγθ· ὁ ἕτερος ἄρα αεβθ ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ Ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ λοιπὴ ἐπιφάνεια εβθ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ἐπιφάνεια εγθ ἴση ἐστὶ Κύκλῳ, οὗ ἀκτὶς ἡ γθ (3)· ἡ δὲ εβθ ἴση Κύκλῳ, οὗ ἀκτὶς ἡ βθ· ἔσονται ἄρα οἱ Τομεῖς αεγθ, αεβθ ἴσοι Κώνοις, ὧν ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσεις δὲ Κύκλοι, ὧν ἡμιδιάμετροι αἱ γθ, βθ.

Σχόλιον.

κ. 47. Ἐντεῦθεν πορίζεται ἥ τε τῶν Τομέων καὶ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαίρας καταμέτρησις· τῶν μὲν τομέων ἐὰν (2) τὸ τριτημόριον τῆς Ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθῇ διὰ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῶν Τομέων, γινωσκομένης ἤδη ἐκ τῆς ΚΖ (ἢ ἐκ τοῦ Πορίσματος τῆς ΚΕ), ἢ διὰ τοῦ Κύκλου, οὗ ἀκτὶς ἡ γθ, ἢ βθ. Τῶν δὲ τμημάτων, ἐὰν μετρηθῇ ὁ Κῶνος εαθ, καὶ ἀφαιρεθῇ μὲν τοῦ Τομέως, εἴπερ ἐλάσσων ἐστὶν Ἡμισφαιρίου, προσεθῇ δὲ αὐτῷ μείζονι ὄντι Ἡμισφαιρίου.

κ. 42. Τὸ δὲ μεταξὺ δύω κύκλων παραλλήλων ἢ μὴ παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενον Τμῆμα μξρν μετρηθήσεται, ἐὰν τὰ τμήματα ξβρ, μβν γνωσθέντα ἤδη, ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῇ.

Πρότασις Λ'.

κ. 48. Τὸ Ἡμισφαίριον (εοβδ) διπλάσιόν ἐστι Κώνου (τοῦ εβδ) ἔχοντος βάσιν καὶ ὕψος ταὐτὰ τῷ Ἡμισφαιρίῳ.

---

(1) Ἀξίωμ. Γ. τοῦ παρόντος. (2) ΚΗ. τοῦ παρόντος. (3) ΚΕ. τοῦ παρόντος. (4) Δῆλον ἐκ τοῦ Σχολ. τῆς 6.

Ο Κῶνος γὰρ ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην τῇ τοῦ Ἡμισφαιρίου ἐπιφανείᾳ εοβδ· ὕψος δὲ ἴσον τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αβ, ἐστὶ πρὸς Κῶνον τὸν εβδ, ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν (1)· τοῦτ' ἔστιν ὡς ἡ τοῦ Ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια εοβδ, πρὸς τὸν μέγιστον Κύκλον πτ. Ἐπεὶ οὖν ἡ τοῦ Ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια εοβδ, διπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου Κύκλου (2)· ἄρα καὶ ὁ Κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν εοβδ, ὕψος δὲ τὴν Ἡμιδιάμετρον αβ, διπλάσιός ἐστι τοῦ Κώνου εβδ. Ἀλλὰ τὸ Ἡμισφαίριον ἐστιν ἴσον Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ Ἡμισφαιρικὴ ἐπιφάνεια εοβδ (3), διπλάσιον ἄρα τὸ Ἡμισφαίριον τοῦ Κώνου εοδ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἄλλως. Ἐπεὶ οἱ ἰσοϋψεῖς Κῶνοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις (4), ἔσται δὴ ὁ Κῶνος, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ, πρὸς τὸν Κῶνον, οὗ ὕψος μὲν τὸ αὐτὸ, βάσις δὲ ἴση τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὡς 4 πρὸς 1 (5). Ἐπεὶ δὲ ὁ πρότερος Κῶνος ἐστὶν ἴσος τῇ Σφαίρᾳ (6), ἡ Σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸν ὕστερον Κῶνον ἔσται ὡς 4 πρὸς 1. Τὸ ἄρα Ἡμισφαίριον πρὸς τὸν ὕστερον Κῶνον ἐστὶν ὡς 2 πρὸς 1· ἀλλ' ὁ ὕστερος Κῶνος ἔχει ταὐτὰ καὶ ὕψος καὶ βάσιν τῷ Ἡμισφαιρίῳ· τὸ Ἡμισφαίριον ἄρα διπλάσιόν ἐστι Κώνου ἔχοντος, τό,τε ὕψος καὶ τὴν βάσιν ταὐτὰ τῷ Ἡμισφαιρίῳ.

Πόρισμα. Κῶνος ὁ εβδ, καὶ ἡμισφαίριον τὸ εοβδ, καὶ Κύλινδρος ὁ εκ, ὧν ὕψος καὶ βάσις κοινά, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 1, 2, 3. Ἔστι γὰρ ὁ Κῶνος πρὸς μὲν τὸ Ἡμισφαίριον, ὡς 1 πρὸς 2 (διὰ τὴν παροῦσαν)· πρὸς δὲ τὸν Κύλινδρον, ὡς 1 πρὸς 3 (διὰ τὴν Γ'. τοῦ ΙΒ'.)

Πρότασιν ΛΑ'.

Ἐὰν Σφαῖρα ἐπιπέδῳ τῷ ιξδτ μὴ διιόντι μὲν διὰ τοῦ Κέντρου α, τέμνοντι δὲ πρὸς ὀρθὰς τὴν διάμετρον βοκ, εἰς δύω Τμήματα τὰ ιλβη, ισκδ, ὅτω τμηθῇ, ὥστε γενέσθαι ὡς τὸ ὕψος οβ τοῦ Τμήματος ιλβδ, πρὸς τὴν τῆς σφαίρας Ἡμιδιάμετρον αβ, ὅτω τὸ ὕψος οκ τοῦ ἑτέρου Τμήματος ισκδ, πρὸς ἑτέραν τὴν κν· ὡς δὲ τὸ ὕψος οκ τοῦ Τμήματος ισκζ, πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον ακ, ἡ αβ, ὅτω τὸ ὕψος βο τοῦ ἑτέρου Τμήματος ιλβδ, πρὸς ἑτέραν τὴν βδ. Λέγω κ. 52.

Α'. Ὅτι οἱ Κῶνοι ινδ, ιδδ, ὧν ὕψη μὲν αἱ ον, οδ· βάσις δὲ κοινὴ ὁ Κύκλος ιξδτ, ἴσοι ἔσονται τοῖς Σφαιρικοῖς τμήμασι.

(1) ΙΔ. τοῦ ι'. (2) ΚΔ. τοῦ παρόντος. (3) Ἔστται ἐκ τῆς ΚΗ. τοῦ παρόντος. (4) ΙΔ. τοῦ ιβ'. (5) ΚΔ. τοῦ παρόντος. (6) ΚΗ. τοῦ παρόντος.

Β'. Ὅτι τὰ Τμήματα λόγον ἕξει τὸν αὐτὸν, ὃν αἱ εὐθεῖαι δο, νο.

Γ'. Ὅτι τὸ Τμῆμα ιστθ ἔςαι πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιςον Κῶνον ικθ, ὡς ἡ νο πρὸς τὴν κο. Τό,τε ἕτερον Τμῆμα ιλβθ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιςον Κῶνον ιβθ, ὡς ἡ δο πρὸς τὴν βο.

Μέρος Α'. Τετμήθωσαν ἥ τε Σφαῖρα καὶ οἱ Κῶνοι ἐπιπέδῳ, διὰ τῆς Διαμέτρου βκ· καὶ γεγεννήθωσαν ἐν μὲν τῇ σφαίρᾳ Κύκλος μέγιςος ὁ βλκθ· ἐν δὲ τοῖς Κώνοις Τρίγωνα τὰ βιθ, ικθ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐςιν ἐξ ὑποθέσεως ἡ Διάμετρος βοκ ἐπὶ τὸν Κύκλον ξτ, ἡ γωνία ιοβ ἔςαι ὀρθή (1). Ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ὑπὸ βικ (2)· ἄρα, ἐπεὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ βικ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας κατήχθη κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν βκ ἡ εὐθεῖα ιο, ἔσεται δὴ ἡ ιβ πρὸς τὴν ιο, ὡς ἡ βκ πρὸς πρὸς τὴν κι (3). Ὁ διπλασίων ἄρα λόγος τῆς βι πρὸς τὴν ιο, ἴσος ἐςὶ τῷ διπλασίονι λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κι· τοῦτ' ἔςιν (ἐπεὶ (4) αἱ βκ, κι, κο συνεχῶς ἀνάλογον) ἴσος τῷ λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κο.

Ἐπεὶ πάλιν ἐξ ὑποθέσεως ὡς ἡ οκ, πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον αβ, οὕτως ἡ οβ πρὸς τὴν βδ· ἔσεται δὴ ἀνάπαλιν μὲν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βο, οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν οκ· ἐναλλάσσοντι δὲ ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν αβ, οὕτως ἡ βο πρὸς τὴν βκ· καὶ συντιθέντι, ὡς ἡ δα πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βκ πρὸς οκ. Ἀλλ' ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ὁ λόγος τῆς βκ πρὸς τὴν οκ ἐςὶ διπλασίων, τοῦ τῆς βι πρὸς τὴν ιο, καὶ ἑπομένως ἴσος τῷ λόγῳ τῶν Κύκλων τῶν ἀκτίσι ταῖς βι, ιο γραφομένων (5)· ἔσεται δὴ ἄρα ἡ δα πρὸς τὴν αβ, ὡς ὁ Κύκλος, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ βι, πρὸς τὸν Κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ιο· καὶ ὁ Κῶνος, οὗ ὕψος μὲν ἡ δα, βάσις δὲ ὁ Κύκλος, οὗ ἀκτὶς ἡ ιο, τοῦτ' ἔςιν ὁ ξτ, ἴσος τῷ Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ βα· βάσις δὲ ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς βι Κύκλος (6), τοῦτ' ἔςι τῷ Σφαιρικῷ τομεῖ αιβο (7). Κοινῇ δὲ προσκειμένου τοῦ Κώνου ιαθ, ἔσεται δὴ συναμφότερον ὅ,τε τομεὺς αιβθ καὶ ὁ προσκείμενος Κῶνος ιαθ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ Κώνῳ· τοῦτ' ἔςι τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα ιλβθ ἴσον δυσὶ Κώνοις, ὧν ὁ μὲν, ἔχει βάσιν μὲν τὸν Κύκλον ξι, ὕψος δὲ τὴν εὐθεῖαν δα· ὁ δὲ, ὕψος μὲν τὴν οβ, βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν Κύκλον ξτ. Ἀλλ' οἱ δύω ἤτοι Κῶνοι συνιςῶσι τὸν Κῶνον ιδθ (8)· τὸ Σφαιρικὸν ἄρα Τμῆμα ιλβθ, ἴσον ἐςὶ τῷ Κώνῳ ιδθ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα ιστθ, ἴσον ἐςὶ

---

(1) Ὁρισμ. Γ. τοῦ ια'. (2) ΛΑ. τοῦ γ'. (3) Πόρισμ. Γ. τῆς Η. τοῦ ς'. (4) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τοῦ ς'. (5) Πόρισμ. Β'. τῆς Β. τοῦ ιβ'. (6) ΙΕ. τοῦ ιβ'. (7) ΚΘ. τοῦ παρόντος. (8) Δείκνυται ἐκ τῆς ΙΔ. τοῦ ιβ'. καὶ τῆς ΚΔ. τοῦ ε'.

τῷ Κώνῳ ιθ· πλὴν ὅσον ὁ προσκείμενος ἐν τῷ προτέρῳ Κῶνος ιαθ, ἐνταῦθα ἐςὶν ἐφαιρετέος.

(Ἐπεὶ γὰρ ἐςὶ κι : ιο : : κβ : βι (1)· ἔσται δὴ καὶ κι² : ιο² : : κβ² : βι² (2) : : κβ : βι (3)· ἐςὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως νκ : αβ (= κα) : : κο : οβ· καὶ συντιθέντι να : ακ : : κβ : βο : : κι² : ιο² (4) : : Κύκλ., ὃ ἀκτὶς κι : Κύκλ., ὃ ἀκτὶς ιο (= Κύκλ. ξτ)· ἄρα ὁ Κῶνος, ὃ ὕψος ἡ να, καὶ βάσις ὁ ξτ = Κώνῳ, ὃ ὕψος ἡ ακ καὶ βάσις ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς κι Κύκλος (5) = τῷ σφαιρικῷ Τομεῖ ακιθ (6). Ἀλλ' ὁ Κῶνος, ὃ ὕψος ἡ να καὶ βάσις ὁ ξτ, ἐςὶν ἴσος τοῖς δυσὶ Κώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ὧν ὁ μὲν ὕψος μὲν ἔχει τὴν νο, βάσιν δὲ τὸν Κύκλον ξτ· ὁ δὲ, ὕψος μὲν τὴν οα βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν ξτ (7), τουτ' ἔςὶ τοῖς Κώνοις ινθ, ιαθ· ὁ δὲ σφαιρικὸς Τομεὺς ακιθ, ἴσος ἐςὶ τῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ καὶ τῷ Κώνῳ ιαθ ἅμα ληφθεῖσιν· κοινῇ δὲ ἀφθέντος τοῦ Κώνου ιαθ, ὁ λοιπὸς Κῶνος ινθ = τῷ λοιπῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ. Ο. Ε. Δ.)

Τὸ Β'. Μέρος δῆλον ἐκ τοῦ Α'. Οἱ γὰρ τοι Κῶνοι ιδθ, ινθ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ δο, νο (8), ἄρα καὶ τὰ ἴσα τοῖς Κώνοις Τμήματα ιλβθ, ισκθ λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ δο, νο.

Δῆλον δὲ ἀυτόθεν καὶ τὸ Γ'. Ὡς γὰρ ὁ Κῶνος ιδθ πρὸς τὸν ινθ, οὕτως ἡ δο πρὸς τὴν βο (9)· καὶ τὸ ἴσον ἄρα τῷ Κώνῳ ιδθ, Τμῆμα ιλβθ, ἐςὶ πρὸς τὸν Κῶνον ιβθ, ὡς ἡ δο πρὸς τὴν βο. Τῷ ἀυτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ Τμῆμα ισκθ ἐςὶ πρὸς τὸν Κῶνον ικθ, ὡς ἡ νο πρὸς τὴν κο.

Σχόλιον.

Ἐκ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ παρόντος Θεωρήματος πορίζεται, καὶ ἑτέρα ἀχ ἥττον εὐμήχανος τῶν σφαιρικῶν Τμημάτων καταμέτρησις. Ἐὰν δηλονότι οἱ Κῶνοι ιδθ, ινθ μετρηθῶσιν· ὅπερ γενήσεται ἐὰν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν δο, νο ἐπὶ τὸν ξτ Κύκλον πολλαπλασιασθῇ (10).

Πρότασις ΛΒ'.

Πᾶς Κύλινδρος ὀρθὸς (θκ) ἡμιόλιός ἐςι τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται· ἥτε ἐπιφάνεια ἀυτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας. κ. 48.

(1) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τοῦ ε'. (2) ΛΔ. τοῦ ε'. καὶ Σχόλ. τῆς Κ. τοῦ ε'. (3) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τοῦ ε'. (4) Πόρ. Β'. τῆς Β. τοῦ ιβ'. (5) ΙΕ. τοῦ ιβ'. (6) ΚΘ. τοῦ παρόντος. (7) ΚΔ. τοῦ ε'. καὶ ΙΔ. τοῦ ιβ'. (8) Δ. τοῦ ιβ'. (9) Διὰ τὴν ἀυτήν. (10) Ὅρα τὸ μετὰ τὴν ε'. Σχόλιον.

Ἔςω Ἄξων κοινὸς τῆτε σφαίρᾳ καὶ τῷ Κυλίνδρῳ ὁ βξ. Εἰς δὲ τὸ Ἡμισφαίριον εοβδ ἐγγεγράφθω Κῶνος μέγιςος ὁ εβδ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν Κύλινδρος εκ (ἥμισυς τοῦ ὅλου θκ) τριπλάσιός ἐςι τοῦ Κώνου εβδ (1). Τὸ δὲ Ἡμισφαίριον διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ Κώνου (2), δῆλον ὅτι ὁ Κύλινδρος εκ ἐςὶ πρὸς τὸ Ἡμισφαίριον, ὡς 3 πρὸς 2· ἄρα καὶ ὅλος ὁ Κύλινδρος θκ ἐςὶ πρὸς ὅλην τὴν σφαῖραν ξεβδ, ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ τοῦ Κυλίνδρου πλευρὰ κν, ἐςὶν ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ θν· ἔσεται δὴ ἡ τούτου ἐπιφάνεια χωρὶς μὲν τῶν βάσεων τετραπλασία (3), μετὰ δὲ τῶν βάσεων, τοῦτ' ἔςιν ὅλη ἡ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἑξαπλασία τῆς βάσεως μι, ἥτις ἐςιν ἴση τῷ μεγίςῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ. Ἀλλ' ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐςὶ τετραπλασία τοῦ μεγίςου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ· ἡ ὅλη ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ Κυλίνδρου θκ, ἐςὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4, τοῦτ' ἔςιν ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Ὁ Κύλινδρος ἄρα ὁ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἡμιόλιός ἐςι τῆς Σφαίρας· ἥτε ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων, ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Πορίσματα.

Α'. Κύλινδρος ὀρθὸς ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, αὐτή τε ἡ Σφαῖρα, καὶ Κῶνος ὁ βάσιν καὶ ὕψος ἔχων ταὐτὰ τῷ Κυλίνδρῳ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 3, 2, 1. Ἔςι γὰρ ὁ Κύλινδρος (διὰ τὴν παρεῖσαν) πρὸς μὲν τὴν Σφαῖραν ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς δὲ τὸν Κῶνον, ὡς 3 πρὸς 1 (10. τοῦ ιβ'.)· ἄρα κτ. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ εἰσὶν ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὸ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένου Κυλίνδρου, μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιψαυούσης τοῦ Ἡμισφαιρίου, ἥτε τοῦ Ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, καὶ ἡ ἑκατέρῳ κοινὴ βάσις. Ἐπεὶ γὰρ ἥτε τοῦ Κυλίνδρου καὶ ἡ τοῦ Ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια διπλασία ἐςὶ τῆς βάσεως (4)· ἔσεται δὴ ἡ τοῦ Κυλίνδρου μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιψαυούσης, πρὸς τὴν ἑτέραν βάσιν, ὡς 3 πρὸς 1· ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν.

Β'. Ὅθεν ὁ Κύλινδρος θκ χωρὶς τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης Σφαίρας (τοῦτ' ἔςι τὸ τοῦ Κυλίνδρου ςερεὸν κενὸν τῆς Σφαίρας, τὸ ἔξωθεν μὲν ὑπὸ τῆς ὅλης τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἔσωθεν δὲ ὑπὸ τῆς κοίλης σφαιρικῆς περατούμενον), ἴσον ἐςὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κώνῳ θβν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Κύλινδρος ἐςὶ πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν, ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς τὸ κυλιν-

(1) Ι. τοῦ εβ'. (2) Α. τοῦ παρόντος. (3) Πορισμ. τῆς ΙΒ. τοῦ παρόντος. (4) Κε. τοῦ παρόντος μετὰ τοῦ Πορίσματος.

δρικὸν ἄρα στερεὸν κενὸν τῆς Σφαίρας, ἔσται ὡς 3 πρὸς 1· τοῦτ' ἔστιν ὡς αὐτὸς ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸν Κῶνον ΘΒΝ (1)· καὶ ἑπομένως τὸ ἐκείνου στερεὸν ἴσον τῷ Κώνῳ.

Γ'. Τὸ τοῦ Κυλίνδρου στερεὸν κενὸν Ἡμισφαιρίου (τοῦτ' ἔστιν ὁ Κύλινδρος ΕΚ, χωρὶς τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου Ἡμισφαιρίου ΕΟΒΔ), ἴσον ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κώνῳ ΕΒΔ. Τόστε γὰρ στερεὸν καὶ ὁ Κῶνος τριτημόριόν ἐστι τοῦ Κυλίνδρου ΕΚ (2).

Δ'. Ἐὰν Κῶνος ὁ ΗΑΥ Κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένος τῷ ΝΗ, ἔχῃ τὴν μὲν κορυφὴν ἐν τῷ Κέντρῳ Α τοῦ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεραμένου Ἡμισφαιρίου ΜΟΒΝ· τὴν δὲ βάσιν ΗΥ, τῇ βάσει τοῦ Ἡμισφαιρίου παράλληλόν τε καὶ τοῦ Ἡμισφαιρίου ἐπιψαύουσαν κατὰ τὴν κορυφὴν Β· ἀφαιρεθῇ δὲ τοῦ Κυλίνδρου τὸ Ἡμισφαίριον, καταλειφθήσεται στερεὸν Κυλινδρικὸν κενὸν Ἡμισφαιρίου, ἴσον Κώνῳ τῷ ΗΑΥ ἔχοντι βάσιν τὴν αὐτὴν τῷ Κυλίνδρῳ τὴν ΗΥ. Δείκνυται ἐκ τοῦ Γ'. Πορίσματος.

Ε'. Ἐὰν Κῶνος καὶ στερεὸν οὕτως ἔχον ἑκάτερον Ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῶσι τῷ ΛΧ παραλλήλῳ τῇ βάσει ΗΥ, γενήσεται ἐν μὲν τῷ Κώνῳ, Κύκλος ὁ ΑΕ· ἐν δὲ τῷ στερεῷ ἐπίπεδον δακτυλιακὸν τὸ ΞΛΧΡ, κατὰ πάντα ἀλλήλοις ἰσούμενα. Ἀχθείσης γὰρ τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ Ἡμιδιαμέτρου ΑΡ· ἔσται ΑΡ² = ΑΔ² + ΔΡ² (3)· ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΒ, ἴση ἐστὶ τῇ ΒΥ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ (4)· καὶ δὴ καὶ αἱ ΑΡ, ΑΝ, ΔΧ ἀλλήλαις ἴσαι (5). Τοιγαροῦν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΧ, ἴσον συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΔΡ· καὶ Κύκλος ὁ ἀπὸ ΔΧ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν ΔΡ, ΔΕ Κύκλῳ (6)· ἀφαιρουμένου δὲ ἑκατέρωθεν τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΡ Κύκλου· λείπεται τὸ Δακτυλιακὸν ἐπίπεδον ΞΛΧΡ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ Κύκλῳ. κ. 42.

ϛ'. Τὰ Τμήματα οἱουδήτινος Κώνου ΗΑΥ, καὶ Κυλινδρικοῦ στερεοῦ χωρὶς τοῦ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαιρίου, τὰ μεταξὺ ἐπιπέδων ἀλλήλοις παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἴσος γὰρ ὁ Κῶνος τῷ στερεῷ· ἴση δὲ καὶ ἡ τοῦ Κώνου κυκλικὴ τομὴ ΑΕ, τῷ τοῦ στερεοῦ δακτυλιακῷ Ἐπιπέδῳ ΞΛΧΡ. Ἐὰν ἄρα τὸ Ἐπίπεδον ΛΧ ἐπὶ τὰ ἄνω, ἢ τὰ κάτω παραλλήλως ἀεὶ τῇ βάσει ἐνεχθῇ, ἀπογεννήσει ἀεὶ Τμήματα τοῦ τε Κώνου καὶ τοῦ Κυλινδρικοῦ στερεοῦ ἀλλήλοις ἴσα.

Ζ'. Ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἄρα τοῦ Κώνου ΗΑΥ ἡ τοῦ Κυλινδρικοῦ στερεοῦ χωρὶς τοῦ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαιρίου πορίζεται καταμέτρησις (7)· ἔκ τε τῆς κολοβοῦ Κώνου ΟΑΕΚ, ἡ τοῦ δακυλιακοῦ Τμήματος ΞΛΙΟΡΧΤΚ, τοῦ μεταξὺ τῶν αὐτῶν Ἐπιπέ-

(1) Ι. τοῦ ιβ'. (2) Δείκνυται ὁμοίως τῷ Β'. Πορίσματι διὰ τοῦ 42 Σχήματος. (3) ΜΖ. τοῦ α'. (4) Πορ. Α'. τῆς Δ. τοῦ ϛ'. (5) Ὁρισμ. Ε. τοῦ ιβ'. καὶ Πρότ. ΛΔ. τοῦ α'. (6) Πορισμ. Β'. τῆς Β. τοῦ ιβ'. καὶ Προτ. ΚΔ. τοῦ ε'. (7) Σχόλ. τῆς ϛ. τοῦ παρόντος.

δων ιτ, λχ ἐναπολαμβανομένω (1). Καὶ ἐυτεῦθεν ἑτέρα ἀποφέρεται μέθοδος τοῦ οἱαδήτινα τῆς Σφαίρας τμήματα καταμετρεῖν.

Οἷον ἐὰν ζητῆται ἡ καταμέτρησις τοῦ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων ξρ, οκ ἐναπολαμβανομένω Τμήματος ξοκρ, ἀφηρήσθω τοῦ Κυλίνδρω λτ ὁ κολοβὸς Κῶνος οΑΕκ. Ἐὰν δὲ ζητῆται ἡ τοῦ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων μν, ξρ ἐναπολαμβανομένω Τμήματος μξρν, ὑφηρήσθω τοῦ Κυλίνδρου μχ ὁ Κῶνος ΑαΕ.

Σχόλιον.

Ὅσον Ἀρχιμήδης τῷ παρόντι ἐπηγάλλετο Θεωρήματι, ἀπόδειξίς ἐςιν, ὅτι τῷ ἰδίῳ τάφῳ Σφαῖραν εἰς Κύλινδρον ἐγγεγραμμένην ἐπιθέσθαι ἠξίωσε· ϗ τοῦτο ἴσως δὶ ὅ,τι τὸν αὐτὸν λογικὸν λόγον ἔντε τοῖς σώμασι τούτοις ϗ ταῖς, ὑφ᾽ ὧν αὐτὰ τὰ σώματα περιέχεται, ἐπιφανείαις ἐνορῶν, ταύτην μᾶλλον, ἢ τινα ἄλλην τῶν τοσούτων αὐτοῦ ϗ τηλικούτων εὑρέσεων ἠγάσατο. Τοιαύτη μέν τοι ταυτότης παθῶν ἔντε δακτυλίοις ϗ δακτυλίων ἐπιφανείαις δέδεικται ϗ ἡμῖν αὐτοῖς ἐν τῷ Δ΄. Βιβλίῳ τῶν κυλινδρικῶν ϗ δακτυλιακῶν (Προτ. 13. 14. 15.)· ὁ μὴν ἀλλὰ ϗ ἐπὶ τῆς Σφαίρας αὐτῆς ϗ ἕτερον εὕρηται ἡμῖν, ὀχ ἧττον ἐπίσημον· τοῦτο δέ ἐςιν, ὅτι ὥσπερ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς τὸν αὐτὴν περιλαμβάνοντα ὀρθὸν Κύλινδρον, κατά τε τὸ ςερεὸν ϗ τὴν ἐπιφάνειαν (ὃς ἔςαι ἐξ ἀνάγκης ἰσόπλευρος), ὃν ὁ 2 πρὸς τὸν 3· οὕτως ἡ αὐτὴ λόγον ἔχει πρὸς τὸν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον Κῶνον, κατά τε τὸ ςερεὸν ϗ τὴν ἐπιφάνειαν, ὃν ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 9· ἐξ οὗ δὴ ἕπεται ὅτι ὁ ἡμιόλιος λόγος, ὁ μεταξὺ Σφαίρας ϗ Κυλίνδρω εὑρημένος τῷ Ἀρχιμήδει, ὑπάρχει μεταξὺ τριῶν σωμάτων κατὰ συνέχειαν, Σφαίρας δηλονότι, Κυλίνδρω ϗ ἰσοπλεύρω Κώνω· ἃ ἑκατέρω τὴν ἀπόδειξιν μετὰ ϗ ἄλλων ἡμετέρων Θεωρημάτων (ἐξ ὧν τρανώτερον ἡ τῆς Σφαίρας θαυμασία φύσις γινώσκεται) ἐν τρισὶ καίδεκα Προτάσεσι περιλαμβανομένων, ὑποσυνάψομεν.

Πρότασις ΛΓ΄.

κ. 53. Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια διπλασία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρω Κυλίνδρω.

Ἔςω Σφαῖρα ἡ αθβικ, ϗ ἐν αὐτῇ Τετράγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ ακλδ· ὑφ᾽ οὗ περιενεχθέντος, καταγράφεται Κύλινδρος ἰσόπλευρος ὁ αδλκ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένος· ἤχθω ἡ αλ, ἥτις ἔςαι διάμετρος κοινὴ τῆ τε Σφαί-

(1) Ἀυτόθεν.