ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΕΞΑΩΤΕΥΘΕΝΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ἤτοι

ὅρων τινῶν ἀναπτύξεις.

Ἔστω δὴ Κύκλος βεγη, ἧ Κέντρον α, Διάμετρος δὲ βγ, πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς εη τεμνομένη κατὰ τὸ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κέντρου ἀχθήτωσαν Ἡμιδιάμετροι αε, αη· Τούτων οὕτω κειμένων· κ. 1.

Α΄. Τομεὺς τῆς Σφαίρας ἐστὶν, ὁ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ Τομέως αεγη, ἢ γῆν αεβη, τοῦ περὶ τὴν Διάμετρον βγ περιηγμένου, γινόμενος.

Β΄. Τμῆμα, εἴτ' οὖν μοῖρα Σφαίρας ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τοῦ κυκλικοῦ Τμήματος εγη, ἢ γῆν εβη, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον βγ περιηγμένου, καταγραφόμενον.

Γ΄. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας εβη Κορυφὴ ἐστὶ, τὸ κατὰ τὴν ἀκίνητον διάμετρον πέρας β· Βάσις δὲ ὁ ὑπὸ τῆς εη Εὐθείας καταγραφόμενος Κύκλος· Ἄξων δὲ τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου βδ, τὸ ἀπό τε τῆς κορυφῆς, καὶ καὶ τοῦ τῆς βάσεως Κέντρου δ ἀπολαμβανόμενον.

Δ΄. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας, ἢ τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου Σώματος, ἢ Κώνου ἐπιφάνειαν εἰπὼν, ἄνευ δὴ τῆς βάσεως εἰρηκέναι ἀεὶ δῆλος ἔσομαι· καὶ Κυλίνδρου δὲ ἐπιφάνειαν ἣν εἴπω, παραπλησίως ἄνευ τῆς βάσεως νοηθήσεται, εἰμὴ τὸ ὁλικῶς προσκείοιτο, ὡς ἐν οἷς καὶ αἱ βάσεις συμπαρελήφθησαν.

Καὶ περὶ Κυλίνδρων δὲ λέγοντι καὶ Κώνων μόνοι οἱ ὀρθοὶ νοηθήσονται.

Ἀξιώματα.

Α΄. Ἡ τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου Πολυγώνου περίμετρος, τῆς τοῦ Κύκλου περιφερείας ἐλάττων ἐστί. κ. 2.

Β΄. Ἡ τοῦ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένου Πολυγώνου περίμετρος, τῆς τοῦ Κύκλου περιφερείας μείζων ἐστί.

κ. 3. Γ'. Ἐὰν δὲ Πολύγωνον εἰς Κύκλον ἐγγεγραμμένον, περὶ τὴν διάμετρον αε, συνάμα τῷ Κύκλῳ περιαχθῇ, ἔσται ἡ τοῦ σώματος, ὃ ὑπὸ τοῦ Πολυγώνου γίνεται, ἐπιφάνεια, ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας· καὶ ἐὰν Πολύγωνον περὶ Κύκλον περιγεγραμμένον, περὶ τὴν διάμετρον συνάμα τῷ Κύκλῳ περιαχθῇ, ἔσται ὡς ἀνωτ. ἡ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ Πολυγώνου σώματος ἐπιφάνεια, μείζων τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας.

Δ'. Ὡσαύτως ἡ τοῦ Πολυγώνου εἰς τὸ κυκλικὸν Τμῆμα ἐγγεγραμμένου περίμετρος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ Τμήματος περιφερείας δαζ· καὶ ἐὰν τὸ εἰς τὸ Τμῆμα ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον συνάμα τῷ Τμήματι, περὶ τὸν Ἄξονα τοῦ Τμήματος αξ περιαχθῇ, ἔσται ἡ τοῦ σώματος, ὅπερ ὑπὸ τοῦ Πολυγώνου γίνεται ἐπιφάνεια, ἐλάσσων τῆς κατὰ τὸ Τμῆμα τῆς Σφαίρας ἐπιφανείας δαζ. κ. 4.

Ε'. Ἡ δὲ τοῦ Πρίσματος ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένου μὲν εἰς τὸν Κύλινδρον, τῆς τοῦ Κυλίνδρου ἐλάσσων, περιγεγραμμένου δὲ περὶ αὐτὸν, μείζων. κ. 5.

ς'. Ἡ τε τῆς Πυραμίδος ἐγγεγραμμένης μὲν εἰς τὸν Κῶνον, τῆς τοῦ Κώνου ἐλάσσων, περιγεγραμμένης δὲ, μείζων. κ. 6.

Πρότασις Α.

„Ἔστω Σχήματα ὁποιαδήποτε ἤτοι τῶν ἐπιπέδων, ἢ τῶν στερεῶν, „Α, Β· ἔστω δὲ καὶ Μεγέθη ἄλλα καὶ ἄλλα, ἃ τὰ δοθέντα Α καὶ Β ἀεί„περ ἥττον καὶ ἥττον ὑπερέχοντα, εἰς αὐτὰ τέως (1) καὶ ἀπολήγοιεν, ἴσα „γεμὴν ἀλλήλοις ἀεὶ τυγχάνοντα.

„Φημὶ δὴ ὅτι καὶ τὰ Α καὶ Β Σχήματα ἀλλήλοις ἴσα ἐστί.

Ε Ζ
Α Β Χ

Εἰμὴ γὰρ, θάτερον εἶναι μεῖζον ἐπάναγκες· ἔστω οὖν τὸ Α τοῦ Β ὑπεροχῇ τῇ κατὰ τὸ Χ. Εἰ τοίνυν ὑποτεθῇ Μεγέθη ἴσα ἀλλήλοις τὰ Ε καὶ Ζ, ἅπερ ἂν ὑπερέχοι τὰ Α καὶ Β Σχήματα ὑπεροχῇ τῆς κατὰ τὸ Χ, καθ' ἣν κεῖται τὸ Α μεῖζον εἶναι τοῦ Β, μείζονι, ἔσται δὴ τὸ Ζ τοῦ Α ἔλαττον· τίθεται δὲ τὸ Ζ ἴσον εἶναι τῷ Ε, ἔστιν ἄρα τὸ Ε τοῦ Α ἔλαττον· ἄτοπον δὲ, εἴπερ ἅπαξ τὸ Ε ὑπεροχὴν ἔχειν πρὸς τὸ Α τέθειται.

Ὡσαύτως δείξω μηδὲ τὸ Β τοῦ Α μεῖζον εἶναι ἄν· ὥστε θάτερον μὴ μεῖζον ὂν παρὰ θάτερον, ἴσα ἔσται. Ο. Ε. Δ.

(1) Ὅρ. ς. Βιβλ. ιβ'.

Πρότασις Β.

„Ἔςω Σχήματα Α καὶ Β· ἔςω δὲ καὶ Μεγέθη ἀεὶ ἄλλα καὶ ἄλλα, ἃ „τῶν δοθέντων ἀεὶ ἥττον καὶ ἥττον ἀπολειπόμενα, εἰς αὐτὰ τέως (1) καὶ „ἀπολήγοιεν, ἴσα γεμὴν ἀεὶ ἀλλήλοις τυγχάνοντα.

„Φημὶ δὴ, ὅτι καὶ τὰ Α καὶ Β Σχήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. Α Β Ζ

Εἰμὴ γὰρ, θάτερον εἶναι ἀνάγκη ἔλαττον· ἔςω οὖν τὸ Α τοῦ Β, ἐλλείψει τῇ κατὰ τὸ Ζ· Εἰ τοίνυν ὑποτεθῇ Μεγέθη ἀλλήλοις ἴσα τὰ Ο καὶ Π, τῶν δοθέντων Σχημάτων Α καὶ Β, ἐλλείψει ἐλάττονι τῇ κατὰ τὸ Ζ ἀπολειπεσθαι, καθ' ἣν κεῖται τὸ Α τοῦ Β τυγχάνον ἔλαττον, ἔςαι δὴ τὸ Π τοῦ Α μεῖζον· ἦν δὲ τὸ Π ἴσον τῷ Ο, καὶ τὸ ἄρα Ο μεῖζον τοῦ Α· ὅπερ ἀναιρεῖ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ τὸ Ο τοῦ Α ἐτέθη ἔλαττον. Ο Π

Ὡσαύτως δείξω μηδὲ τὸ Β τοῦ Α εἶναι ἂν ἔλαττον· ὡςε θάτερον μὴ ἔλαττον ὂν παρὰ θάτερον, ἴσα ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

Ἐπαχθεῖεν δ' ἂν ἀμφότεραι αἱ προληφθεῖσαι Προτάσεις ἀμέσως, καὶ χωρὶς ἑτέρας ἀποδείξεως, ἐκ τοῦ καθόλου Πορίσματος τοῦ μετὰ τὴν Β'. Πρότασιν τοῦ ΙΒ'. Βιβλίου.

Πρότασις Γ.

„Αἱ τῶν εἰς τὸν Κύκλον τε καὶ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένων τε, κ. 2.
„καὶ περιγεγραμμένων Πολυγώνων περίμετροι, εἰς τὴν τοῦ Κύκλου περιφέ„ρειαν τέως ἀποτελευτῶσιν· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ Πολύγωνα αὐτὰ εἰς τὸν Κύ„κλον τέως ἀπολήγουσι.

Εἴπερ ἀμέλει τῶν τόξων ἐς ἄπειρον διχοτομουμένων, ἀεὶ πλείονες καὶ πλείους εἰς τὸν Κύκλον τε καὶ περὶ τὸν Κύκλον πλευραὶ ἐγγράφοιντό τε καὶ περιγράφοιντο.

Μέρος Α'. Νοείσθω δὴ εἰς τὸν Κύκλον τε καὶ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα Πολύγωνα ὅμοια ἀλλήλοις τῶν κανονικῶν, εἴτε δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ΙΒ'. Προτάσεως τοῦ Δ'. Βιβλίου, εἴτ' οὖν καὶ ὡς ἐπὶ τοῦ ὑπ' ὄψιν σχήματος διαφέρει παντῶς οὐδέν. Δῆλον δὲ τὴν ζι εἶναι πρὸς τὴν γε (2), (τουτέςι (3) τὴν ὅλην περιγεγραμμένην περίμετρον, εἶναι πρὸς ὅλην τὴν ἐγγεγραμμένην) ὡς ια πρὸς γα· ἀλλ' ἡ ιγ ὑπεροχὴ τῆς ια ὑπὲρ τὴν γα, γίνεται τέως παντὸς δοθέντος μεγέθους ἐλάσσων, ἀεὶ πλειόνων τε καὶ πλειόνων ἐς

(1) Ὅρ. ς. Βιβλ. ιβ'. (2) Διὰ τὸ Α. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ ς'. (3) ΙΒ. τοῦ ε'.

ἄπειρον Πλευρῶν ἐγγράφεσθαί τε καὶ περιγράφεσθαι νοουμένων· ἄρ' οὖν καὶ ἡ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρου ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὴν ἐγγεγραμμένην, παντὸς μεγέθους δοθέντος ἐλάσσων τέως καθίσταται· καὶ πολλῷ δὴ μᾶλλον ἄρα (1) ἡ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρου ὑπὲρ τὴν τοῦ Κύκλου Περιφέρειαν ὑπεροχή. ἥτε τῆς ἐγγεγραμμένης περιμέτρου ἀπὸ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔλλειψις, παντὸς δοθέντος μεγέθους ἐλάσσονες ἔσονται. Ὥστε ἥτε ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ περιγεγραμμένη, ἀμφότεραι αἱ περίμετροι, εἰς τὴν περιφέρειαν τέως (2) αὐτὴν ἀπολήγουσι. Ο. Η. τὸ Α'. Ταῦτα δὴ ἐπὶ πλέον πειρᾶσθαι κατασκευάζειν περιττὸν, ὡς αὐτόθεν τὸ δῆλον ἔχοντα.

Μέρος Β'. Ἐπεὶ δέ τοι δέδεικται τὴν τῆς Πλευρᾶς ζι ὑπὲρ τὴν εγ ὑπεροχὴν, παντὸς, ὅπερ ἂν δοθείη, μεγέθους γίνεσθαι τέως ἐλάσσονα (καὶ γὰρ ζι : εγ = ια : γα)· καὶ ἡ τοῦ ἀπὸ ζι Τετραγώνου ὑπὲρ τὸ ἀπὸ τῆς εγ ὑπεροχὴ, ἔσται τέως παντὸς δοθέντος ἐλάσσων. Ἀλλὰ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ ζι Τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ Τετράγωνον, οὕτως ἔχει (3) καὶ τὸ περιγεγραμμένον Πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον· καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου τοίνυν Πολυγώνου ὑπὲρ τὸ ἐγγεγραμμένον ὑπεροχὴ, παντὸς ἔσται τοῦ δοθέντος μεγέθους ἐλάσσων· καὶ πολλῷ ἄρα ἐλάσσων ἔσται ἥτε τοῦ περιγεγραμμένου ὑπὲρ τὸν Κύκλον ὑπεροχὴ, καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀπὸ τοῦ Κύκλου ἔλλειψις· Ἔνθεντοι καὶ τὰ εἰς τὸν Κύκλον τε καὶ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ' αὐτὸν (4) τέως τὸν Κύκλον ἀποτελευτᾷ. Ο. Η. τὸ ἕτερον.

Πρότασις Δ.

κ. 2. „Τὸ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν (5) Πολύγωνον ζιντρ, „ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τοῦ Πολυγώνου περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ „τοῦ Κύκλου ἡμιδιάμετρος.

„Τὸ δὲ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένον κανονικὸν Πολύγωνον ἴσον ἐστὶ „Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου Πολυγώνου περίμετρος, ὕψος „δὲ ἡ Κάθετος αο, ἡ ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἠγμένη.

Μέρος Α'. Ἡ Ἡμιδιάμετρος αβ ἡ πρὸς τὴν ἐπαφὴν ἠγμένη, κάθετος ἐστὶ (6) πρὸς τὴν Ἁπτομένην ιζ. Ἐὰν οὖν ἀχθῶσιν αἱ αζ, αι, αν, κξ:, καὶ τὸ

(1) Ἀξ. Α. καὶ Β'. (2) Ὅρ. ς. Βιβλ. ιβ'. (3) Κ. τοῦ ς'. Βιβλ. καὶ τὸ Σχόλ. τὸ μετ' αὐτήν. (4) Ὁρισμ. ς' τοῦ ΙΒ' Βιβλ. (5) Ὁρ. Γ. τοῦ δ'. (6) ΙΗ. τοῦ γ'.

Πολύγωνον εἰς Τρίγωνα ἀναλυθῇ, ἔςαι δὴ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος τῶν Τριγώνων ἁπάντων ὕψος κοινὸν, ὅθεν δὴ ἴσα εἶναι φανερὸν ⸗ τὰ Τρίγωνα· ὥςε τὸ Τρίγωνον τὸ τὴν βάσιν ἴσην ἔχον τῷ τῶν Πλευρῶν ζι, ιν, ντ, κξ: ἀθροίσματι, ὕψος δὲ τὸ αβ, ἴσον ἅπασιν (1) ἔςαι, τετέςιν ὅλῳ τῷ Πολυγώνῳ, ὃ περιγέγραπται.

Μέρος Β'. Παραπλησίως δὲ ⸗ τὸ Β'. δείκνυται.

Τῶν γὰρ δὴ τῦ ἐγγεγραμμένε Πλευρῶν ἴσων ἀλλήλαις ὀυσῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τῦ Κέντρε α Κάθετοι (2) ἔσονται ἴσαι· ταύτη τοι ⸗ τὰ εἰς ἃ τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον ἀναλύεται, Τρίγωνα πάντα (3), ἴσα ἀλλήλοις ἐςί· καὶ παραπλησίως τοίνυν χωρεῖ τὰ τῆς δείξεως, ὥσπερ ἀνωτέρω.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Ἐντεῦθεν ⸗ τὸ τῦ κανονικῦ Πολυγώνε, τῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένε, ἢ περιγεγραμμένε χωρίον εὑρεῖν ἐςι, τὴν ἀπὸ τῦ Κέντρε (4) ἐπὶ μίαν ἡντιναῦν τῶν Πλευρῶν κάθετον, διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρε πολλαπλασιάζεσι.

Β'. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένα τε ⸗ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ' αὐτὸν δὴ τὸν κύκλον, αἵτε τῶν Πολυγώνων περίμετροι, ἐπὶ τὴν τῦ Κύκλε τέως περιφέρειαν (5) ἀπολήγεσιν, εὑρεθήσεται ἄτω ⸗ τὸ ἐμβαδὸν τῦ Κύκλε, τῆς ἡμιδιαμέτρε διὰ τῆς ἡμιπεριφερείας πολυπλασιαζομένης.

Γ'. Καὶ ἔςιν ἄρα ὁ Κύκλος ἴσος Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῇ τῦ Κύκλε περιφερείᾳ ἴση Εὐθεῖα, ὕψος δέ γε ἡ Ἡμιδιάμετρος· ἀνακύπτει μὲν γὰρ (6) τὸ Τριγώνε χωρίον ἐκ τῆς ἡμιβάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιαζομένης. Ὡσαύτως δὲ δῆλον, ⸗ τὸν τῦ Κύκλε τομέα ἴσον εἶναι Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῦ Κύκλε ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ Εὐθεῖα, ἡ τῷ τῦ τομέως τόξῳ ἴση· τὸ γὰρ δὴ Πόρισμα τόδε ἐκ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν, ἐν τῇ ἐφεξῆς Προτάσει πλατύτερον κατασκευασθήσεται.

Δ'. Τῶν ἰσοπεριμέτρων Σχημάτων ὁ Κύκλος τὸ περιεκτικώτατον· ἔςω γὰρ τῦ τυχόντος Πολυγώνε (οἷον δὴ Τετραγώνε) περίμετρος εηθι ἴση τῇ περιφερείᾳ τῦ Κύκλε, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αζ, ⸗ οὗ τὸ κέντρον ζ τῷ τῦ Κύκλε κέντρῳ εἰς ταυτὸ γίνεται, ὃς ἂν εἰς τὸ Τετράγωνον ἐγγραφείη, ἢ περὶ αὐτὸ περιγραφείη, τὸ εηθι. Φημὶ τοίνυν ὡς τὸ τῦ Κύκλε χωρίον τῦ κατὰ τὸ Πολύγωνον μεῖζον ἐςί. κ. 7.

(1) Ἐκ τῆς Α. τῦ ς'. (2) ΙΔ. τῦ γ'. (3) ΛΗ. τῦ α'. (4) Διὰ τὴν παρῦ. καὶ τὸ Σχόλ. τῆς ΜΔ. τῦ α'. (5) Διὰ τὴν Γ'. (6) Σχόλ. τῆς ΜΑ. τῦ α'.

Τὸ γὰρ δὴ τοῦ Κύκλου, ἴσον ἐστὶ (1) Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ Ἡμιδιάμετρος ζα· τὸ δὲ τοῦ Πολυγώνου, ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ (2), οὗ βάσις μὲν ἡ τοῦ Πολυγώνου περίμετρος, ἡ τῇ τοῦ Κύκλου περιφερείᾳ (καθ' ὑπόθεσιν) ἴση, ὕψος δὲ ἡ Κάθετος ζο, ἡ ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἐπὶ τὴν τοῦ Πολυγώνου πλευρὰν ἀγομένη. Ταύτης οὖν ἐλάσσονος ἀεὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ Κύκλου οὔσης, εὔδηλον ὡς τὸ τοῦ Πολυγώνου χωρίον, τοῦ κατὰ τὸν κύκλον τυγχάνει ἔλαττον. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίως δὲ καὶ τῶν ἴσων τὰς ἐπιφανείας στερεῶν, ἡ Σφαῖρα δειχθήσεται οὖσα τὸ περιεχτικώτατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Πᾶς Κύκλος ἴσος ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τοῦ Κύκλου ἐστὶ περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος.

κ. 8. Τῶν κανονικῶν Πολυγώνων τὰ περὶ τὸν Κύκλον περιγραφόμενα, καὶ τὰ Τρίγωνα, οἷς αἱ μὲν βάσεις ἴσαι ταῖς τῶν Πολυγώνων περιμέτροις εἰσὶ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ τοῦ Κύκλου ἡμιδιαμέτρῳ (3), ἀεὶ ἴσα ἐστί. Ἀλλὰ μὴν τὰ περὶ τὸν Κύκλον ἐς ἄπειρον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς τὸν Κύκλον τέως αὐτὸν (4) ἀπολήγουσιν· ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ Τρίγωνα (ὡς αὐτίκα δειχθήσεται) τὰ βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν τοῦ περιγεγραμμένου Πολυγώνου περίμετρον, ὕψος δὲ τὴν τοῦ Κύκλου ἡμιδιάμετρον αβ ἐπίγε τὸ Τρίγωνον, οὗ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος· ὁ ἄρα Κύκλος (5) καὶ τὸ Τρίγωνον, οὗ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος, ἴσα ἐστί.

Ὡς δὲ τὰ ὑπό τε τῆς περιμέτρου τοῦ Πολυγώνου, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ Κύκλου Τρίγωνα, ἐπὶ τὸ ὑπό τε τῆς περιφερείας, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐστὶν ἀπολήγον, ὧδε δείκνυμι.

Τὰ ὑπό τε τῆς περιμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου Πολυγώνου, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ Κύκλου αβ Τρίγωνα, ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς περιφερείας τε καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου αβ Τρίγωνον, ὡς ἡ βάσις (6) πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ Πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν Περιφέρειαν, κοινοῦ τοῦ ὕψους αὐτοῖς τυγχάνοντος· ἡ δὲ δὴ τοῦ Πολυγώνου περίμετρος, ἐπ' αὐτὴν δὴ τὴν περιφέρειαν τέως (7) ἀποτελευτᾷ· καὶ τὰ Τρίγωνα ἄρα εἰς τὸ Τρίγωνον αὐτὸ ἀπολήξουσι.

---

(1) Πόρ. Γ'. (2) Ἐκ τῆς Προτ. τῆς ἐν χερσί (3) Διὰ τὴν πρὸ παύτ. (4) Γ. Προτ. τοῦ παρόντ. (5) Α. τοῦ παρόντ. (6) Α. τοῦ ς'. (7) Γ. τῶν Ἀρχιμ.

Πορίσματα.

Α'. Ἐκ δὴ τῆς παρέσης, καὶ τῆς ΜΑ' τοῦ α' Βιβλίου, μᾶλλον δὲ ἐκ ταύτης τε, καὶ τοῦ Πορίσμ. τοῦ μετὰ τὴν ΜΒ' τοῦ α' Βιβλ. φανερὸν, ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ γοῦν τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τεταρτημορικῆς περιφερείας, ἢ τέως τὸ ὑπό τε τοῦ τεταρτημορίου τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ὁλοχερεῦς περιφερείας, ἴσον τῷ Κύκλῳ ἐστί· τὸ δὲ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς ὅλης περιφερείας, ἢ γοῦν τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, διπλάσιον τοῦ Κύκλου ἐστί· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου, καὶ τῆς ὅλης περιφερείας, τετραπλάσιον τοῦ Κύκλου ἐστί.

Β'. Ἔστι δὲ ὁ Κύκλος πρὸς τὸ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε πρὸς τὴν διάμετρον· πρὸς δὲ δὴ τὸ Τετράγωνον τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον ἔστιν, ὡς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἢ γοῦν ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν δὶς διάμετρον· πρὸς δὲ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον. κ. 9.

Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριφερείας γδε, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου γα, ἤτοι γζ (τουτέστιν (1) αὐτὸς ὁ Κύκλος), ἐστὶ πρὸς τὸ Ὀρθογώνιον γζηε, τὸ ὑπὸ ζη καὶ ηε (ὅπερ ἐστὶ (2) πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν Τετράγωνον), ὡς (3) ἡ γδε ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ζη, ἢ γοῦν τὴν γε διάμετρον. Ο. Η. τὸ Α.

Ταύτητοι ἔστιν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ δὶς Ὀρθογώνιον ηζγε, τουτέστι πρὸς τὸ ζθ Τετράγωνον τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε, πρὸς τὴν δὶς διάμετρον γε. Ο. Η. τὸ Β'.

Καὶ ὅτως ἐστὶν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ τεταρτημόριον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸν Τετραγώνου, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου Τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον, εἴτουν ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον. Ο. Η. τὸ Γ'.

Γ'. Ἐκ τοῦ Α'. πορίσματος, διὰ τεταρτημορίου μηχανικῶς ἔνι λαβεῖν Ὀρθογώνιον, ἢ Τετράγωνον ἴσον Κύκλῳ, ὃς ἂν ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημορίῳ ἡμιδιαμέτρου ἢ καταγεγραμμένος· κἀντεῦθεν ὁ Κύκλου παντὸς τετραγωνισμὸς μηχανικῶς ληφθήσεται. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τεταρτημορικοῦ τόξου (4), καὶ τῆς διαμέτρου, ὅθεν δὴ καὶ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μέσης (5)

(1) Α. Πόρ. (2) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ς'. καὶ Ζ'. τοῦ δ'. (3) Α. τοῦ ς'. (4) Πόρ. Δ. (5) ΙΓ. καὶ ΙΖ. τοῦ ς'.

ἀναλόγου, τῆς μεταξὺ τοῦ τε τόξου καὶ τῆς διαμέτρου, τῷ ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημορίῳ ἡμιδιαμέτρου Κύκλῳ συνεξισοῦται· Διὸ δὴ ἐκ τούτου, καὶ ὁτῳοῦν ἑτέρῳ δοθέντι Κύκλῳ ὀρθογώνιον, ἢ τετράγωνον ἴσον τεθείσεται, διὰ τοῦ Ζ' πορίσματος τῆς Β' Προτ. τοῦ ιβ' Βιβλ.

Μηχανικῶς δὲ ληφθήσεται ἡ τῷ τεταρτημορικῷ τόξῳ ἴση Εὐθεῖα, νήματος ἢ χάρτου τῷ τόξῳ προσαρμοζομένου, ἢ καὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπί τινι ἐπιπέδῳ πρὸς κανόνα κυλισμένου.

Πρότασις ς.

„Παντὸς Κύκλου ἡ περιφέρεια τὴν κατ' αὐτὸν διάμετρον, ἔλαττον μὲν „ἢ τρὶς σὺν ἑπτημορίῳ (ἤτοι $\frac{1}{7}$), πλέον δὲ ἢ τρὶς σὺν $\frac{10}{71}$ περιεκτήνοχε.

Τοῦτο δὴ τὸ θεώρημα ἀποδειξόμενος, πολύγωνα ἄττα τῶν τεταγμένων ὁ Ἀρχιμήδης προσείληφε, τὸ μὲν περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον, τὸ δὲ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένον, πλευρῶν 96 ὂν ἑκάτερον· εἶτ' ἀπέδειξεν, ὡς αἱ μὲν 96 πλευραὶ τοῦ περὶ τὸν κύκλον, περιέχουσαι εἰσὶ τὴν κατ' αὐτὸν διάμετρον ἧττον ἢ τρὶς καὶ $\frac{1}{7}$, ἐξ οὗ ἑπόμενον ἐςὶ τὴν περιφέρειαν, ὡς ἐκείνων οὖσαν ἐλάσσονα, ἔλαττον ἔτι τῆς διαμέτρου περιεκτικὴν εἶναι ἢ τρὶς καὶ $\frac{10}{71}$· αἱ δὲ δὴ τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου 96 πλευραὶ (καὶ δὴ καὶ ἡ περιφέρεια, ἥτις ἐκείνων μείζων ἐςὶ) τὴν κατὰ τὸν Κύκλον διάμετρον πλέον ἢ τρὶς καὶ $\frac{10}{71}$ περιέχουσιν· ἀλλ' ἤγε τοῦ τοιούτου δεῖξις, πλατυτέρα ἢ ὥςε ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐξενεχθῆναι, δόξειεν ἄν.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ λόγου τοῦ παντὸς ἄξιον ἐςὶ τὸ θεώρημα, ὡς καὶ βίβλον περὶ αὐτοῦ ὅλην τὸν Ἀρχιμήδην συγγεγραφέναι, ἀκατασκεύαςον ὅτω τοῖς τῶν Γεωμετρικῶν διασώταις, παραλειφθῆναι ἐν τούτοις, οὐκ ἂν ὀρθῶς ἔχειν μοι δοκεῖ. Ταύτηι τοι καὶ τὴν ἀρχιμήδειον τούτου κατασκευὴν, ἣν τοῖς τοῦ μεγάλου Βαρροβίου ςείχουσι ἴχνεσιν ἐκτιθέμεθα, λαβὼν ἔχου.

Μέρος Α'. Ἡ παντὸς Κύκλου περίμετρος, τὸ τριπλοῦν τῆς αβ διαμέτρου ὑπερέχει ὑπεροχῇ ἐλάσσονι, ἢ κατὰ τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς αὐτῆς διαμέτρου.

Ἔςω γ τὸ τοῦ Κύκλου κέντρον, καὶ αδ (τῇ ἡμιδιαμέτρῳ αγ ἴση (1)) πλευρὰ τοῦ Ἑξαγώνου τοῦ κανονικοῦ, ᾧπερ ἂν τῷ Κύκλῳ ἐγγράφοιτο· καὶ ἔςαι ἡ ὑπὸ αγδ (2) ἑκτημόριον τεττάρων ὀρθῶν. Δίχα δὴ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αγδ διὰ τῆς γε ἀχθείσης, ὑφ' ἧς καὶ ἡ αδ (3) δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ

(1) Πόρ. Α. τῆς ΙΒ. τοῦ δ'. (2) Κε. τοῦ γ'. καὶ Λ. Πόρ. τῆς ΔΓ. τοῦ ε'. (3) Ἀριθ. Γ. τοῦ Σχολ. τῆς Κς. τοῦ α'.

τὸ σ τμηθήσεται. Προαχθήτω δὲ ἡ γε, εἰς ὃ ἀπαντήσῃ τῇ εα ἁπτομένῃ τοῦ Κύκλου κατὰ τὸ α· καὶ κατὰ συνεχῆ τῶν πρὸς τῷ γ Γωνιῶν διχοτομίαν, ἀχθήτωσαν πρὸς τὴν ἁπτομένην αἱ γζ, γη, γθ, γκ, ὡς εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ αγδ = 2 αγε = 4 αγζ = 8 αγη = 16 αγθ = 32 αγκ. Εἴη δ' ἂν οὕτως ἡ ὑπὸ αγθ (ἤτοι αἱ 2 ὑπὸ αγκ) = $\frac{1}{32}$ (τουτέστιν ἐννενηκοστὸν ἑκτημόριον) τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· καὶ ἐὰν ἐπὶ τῆς ἁπτομένης προαχθείσης ληφθῇ αλ = ακ, καὶ ἐπιζευχθῇ γλ, ἔσται αγλ = αγκ (1). Ταύτητοι καὶ λγκ τῆς αγκ Γωνίας διπλασίων, τουτέστιν ἴση τῇ ὑπὸ αγθ, ἤτοι $\frac{1}{32}$ τεττάρων ὀρθῶν. Ἡ δὲ δὴ λκ Εὐθεῖα τοῦ τεταγμένου σχήματος, οὗ πλευραὶ ἓξ ἐπὶ ἐννενήκοντα, ὃ ἂν περὶ τὸν Κύκλον περιγραφείη, Πλευρὰ οὖσα ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ λκ ἐννενηκοντάκις ἑξάκις ληφθεῖσα, τῆς τοῦ Κύκλου περιφερείας (2) μείζων ἔσται· Εἰ τοίνυν δειχθείη τὰς 96 λκ ἅμα ἐλάσσονας εἶναι τῆς τρὶς ληφθείσης διαμέτρου αβ σὺν $\frac{1}{7}$· ἔσται δὴ πάντως καὶ ἡ τοῦ Κύκλου περιφέρεια ἐλάσσων τῆς τρὶς ληφθείσης διαμέτρου αὐτοῦ σὺν $\frac{1}{7}$.

Ὁμοίων ὄντων τῶν Τριγώνων γεα, γασ (3), ἔσται γε : εα : : γα : ασ· ἀλλὰ γα = (4) 2 ασ, ἄρα γε = 2 εα· ἐπεὶ δέ τοι ἡ ὑπὸ αγε δίχα τέτμηται διὰ τῆς γζ (5), ἔσται εγ : γα : : εζ : ζα· καὶ ἐν συνθέσει εγ + γα : γα : : εα : ζα, καὶ ἐναλλὰξ εγ + γα : εα : : γα : ζα· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ ζγ + γα : ζα : : γα : ηα, καὶ ηγ + γα : ηα : : γα : θα, καὶ τελευταῖον θγ + γα : θα : : γα : κα.

Κείσθω εγ = 306, ἔσται $εγ^{T}$ = 93636, ἡ δὲ δὴ (6) εα = 153· ὥστε $εα^{T}$ = 23409, καὶ $γα^{T}$ = ($εγ^{T}$ (7) — $εα^{T}$ = 93636 — 23409) 70227· ἀλλὰ $\sqrt{70225}$ = 265· ἄρα γα μείζων ἐστὶν ἢ ὅσον 265· καὶ εγ + γα μείζων ἢ 306 + 265 = 571· Ἐπεὶ δέ τοι εγ + γα : εα : : γα : ζα· ὁ δὲ λόγος εγ = γα : εα (8) μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου 571 πρὸς 153· ἔσται δὴ (9) καὶ ὁ λόγος γα πρὸς ζα, μείζων τοῦ λόγου 571 πρὸς 153, τουτέστιν (εἴτις ἑκάτερον τῶν ἀριθμῶν διὰ 8 πολυπλασιάσαι) τοῦ λόγου 4568 πρὸς 1224· Ἐὰν οὖν ζα = 1224 ὑποτεθῇ, ἔσται (10) ἡ γα μείζων ἢ ὅσον 4568.

Κείσθω τοίνυν ζα = 1224, καὶ ἔσται $ζα^{T}$ = 1498176· καὶ ἐπεὶ γα μείζων ἢ 4568, ἔσται $γα^{T}$ μεῖζον ἢ ὁ ἀριθμὸς 20866624· διὸ δὴ $γζ^{T}$ = $ζα^{T}$ + $αγ^{T}$ μεῖζον ἔσται, ἢ 1498176 + 20866624, τουτέστιν ἢ 22364800· ἀλλα-

---

(1) Δ. τοῦ α'. (2) Λξ. Β'. τῶν Ἀρχιμ. (3) Η. τοῦ ς'. (4) Ὡς ἀνωτ. (5) Γ. τοῦ ς'. (6) Ὡς ἀνωτ. (7) Β. Πρόβλ. μετὰ τὴν ΜΖ. τοῦ α'. (8) Η. τοῦ ε'. (9) Σχόλ. τῆς ΙΑ. τοῦ ε'. (10) Ι. τοῦ ε'.

μὴν √ 22363441 = 4729· ἄρα ζγ μείζων ἢ 4729, καὶ ζγ + γα μείζων ἢ 4729 + 4568, τουτέστιν ἢ 9297· Καὶ ἐπειδὴ ζγ + γα πρὸς ζα ἐστὶν ὡς γα πρὸς ηα· ὁ δέ τοι λόγος ζγ + γα πρὸς ζα, μείζων ἐστὶν ἢ 9297 πρὸς 1224· ἔσται καὶ ὁ λόγος γα πρὸς ηα, μείζων τοῦ 9297 πρὸς 1224· ὥστε εἴγε ηα = 1224 ὑποτεθείη, ἔσται γα μείζων ἢ 9297.

Κείσθω τοίνυν ηα = 1224, καὶ ἔσται ηα^{T} = 1498176· καὶ ἐπειδὴ γα μείζων ἢ 9297, ἔσται γα^{T} μεῖζον ἢ 86434209· καὶ ἔστω γη^{T} = ηα^{T} = γα^{T}, μεῖζον ἔσται ἢ 1498176 + 86434209, τουτέστι μεῖζον ἢ 87932385· ἀλλὰ √87928129 = 9377· ἄρα ἡ γη μείζων ἐστὶν ἢ 9377, καὶ ηγ + γα, μείζων ἢ 9377 + 9297, ἤτοι μείζων ἢ 18674· Καὶ ἐπείπερ ηγ + γα : ηα :: γα : θα· ὁ δὲ δὴ λόγος ηγ + γα : ηα μείζων τοῦ 18674 πρὸς 1224, τουτέστιν (εἴτις ἑκατέρου τὴν ἡμίσειαν λάβοι) τοῦ λόγου 9337 πρὸς 612, ἔσται ἄρα καὶ ὁ λόγος γα πρὸς θα, μείζων τοῦ λόγου 9337 πρὸς 612· Εἴπερ οὖν τεθείη θα = 612, ἔσται γα μείζων 9337.

Κείσθω τοίνυν θα = 612, καὶ ἔσται θα^{T} = 374544· ἐπεὶ δὲ ἡ γα μείζων 9337, ἔσται γα^{T} μεῖζον 87179569, καὶ ἔστω γθ^{T} = θα^{T} + γα^{T}. μεῖζον ἔσται 374544 + 87179569, τουτέστι μεῖζον 87554113· Ἀλλὰ √87553449 = 9357· ἄρα ἡ γθ μείζων ἐστὶν ἢ 9357· καὶ θγ + αγ μείζων ἔσται ἢ 9357 + 9337· ἀμέλειτοι μείζων ἢ 18694. Καὶ ἐπεὶ θγ + γα : θα :: γα : κα· ὅ,τε λόγος θγ + γα : θα μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου 18694 πρὸς 612, εἶτ' οὖν (ἑκατέρου ἡμισευθέντος) τοῦ λόγου 9347 πρὸς 306, ἔσται δὴ καὶ ὁ λόγος γα πρὸς κα μείζων τοῦ λόγου 9347 πρὸς 306. Ἐὰν τοίνυν ὑποτεθῇ 2 ακ (ὅπερ ἐστὶ λκ) = 306, ἔσται 2 αγ ἤτοι αβ μείζων 9347· ὅ,τε λόγος αβ πρὸς 9347, μείζων ἔσται τοῦ λόγου λκ πρὸς 306· καὶ ἑπομένως ὁ λόγος $3\frac{1}{7}$ αβ πρὸς $3\frac{1}{7}$ × 9347 = $29376\frac{3}{7}$, μείζων ἔσται (1) τοῦ λόγου 96 λκ, πρὸς 96 × 306 = 29376· Οὗτος δὲ ὁ ἕκατος λόγος ἰσότητος τυγχάνει ὤν, διὰ τὸ εἶναι 96 λκ = 29376· ἄρα $3\frac{1}{7}$ αβ μείζων ἢ $29376\frac{3}{7}$, καὶ ἔτι δὲ μείζων ἢ 29376, τουτέστιν ἢ 96 λκ· Ἡ τοῦ τεταγμένου ἄρα Πολυγώνου (ᾧ πλευραὶ 96) τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου περίμετρος, καὶ πολλῷ δὴ μᾶλλον ἡ τοῦ Κύκλου αὐτοῦ (περὶ ὃν τὸ τοιόνδε Πολύγωνον περιγέγραπται) περιφέρεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κατὰ τὸν αὐτὸν κύκλον $3\frac{1}{7}$ διαμέτρου. Ο. Ε. Δ.

---

(1) ΙΕ. τοῦ ε'.

Μέρος Β'.

„Η τȣ Κύκλου περιφέρεια, τὴν τȣ αὐτȣ Κύκλου διάμετρον αβ τρὶς „ληφθεῖσαν, ὑπερέχει ὑπεροχῇ μείζονι, ἢ ὅσον $\frac{10}{71}$ μόρια τῶν ἐκ τῆς αὐ„τῆς διαμέτρȣ.

Ἔςω δὴ τόξον τὸ αδ τῆς ὅλης τȣ Κύκλȣ περιφερείας ἑκτημόριον· συνεχεῖ δὲ διχοτομήσει γινέσθω τὸ τόξον αδ = 2 αε, = 4 αζ = 8 αη = 16 αθ, καὶ ἔςαι τὸ τόξον αθ $\frac{1}{32}$ τῆς ὅλης περιφερείας· ἀχθήτωσαν δὲ εὐθεῖαι βδ, βε, βζ, βη, βθ, καὶ εὐθεῖαι αδ, αε, αζ, αη, αθ. Ἔςαι δὲ αθ Πλευρὰ τȣ κανονικȣ σχήματος τȣ ἐκ πλευρῶν ἓξ ἐπὶ ἐννενήκοντα, ὅπερ ἂν εἰς τὸν κύκλον ἐγγράφοιτο, καὶ ὅπερ ἡ περίμετρος 96 αθ, τῆς τȣ Κύκλȣ περιφερείας ἐλάσσων ἐςὶ (1)· Τεμνέτωσαν οὖν ἀλλήλας αἱ εὐθεῖαι αδ, βε ἔνθα τὸ κ· διὰ δὲ τὰς ὑπὸ εβα, εαδ, τὰς ἐπὶ ἴσων τόξων, καὶ ἐπομένως (2) ἴσας, καὶ τὴν πρὸς τῷ ε κοινὴν, τὰ Τρίγωνα αβε, καε (3) ἔςαι ὅμοια· ἔνθεντοι αβ : ακ : : βε : εα· Καὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ αβδ, διὰ τὴν κατὰ τὸ β Γωνίαν, τὴν δίχα τεμνομένην (4) ὑπὸ τῆς Εὐθείας βκ, ἔςαι (5) δβ : βα : : δκ : κα· καὶ ἐν συνθέσει δβ + βα : βα : : δα : κα· καὶ ἐναλλὰξ δβ + βα : δα : : βα : κα : : (6) βε : εα· Ὡσαύτως δὲ ἀποδειχθήσεται εβ + βα : εα : : βζ : ζα· καὶ ζβ + βα : ζα : : βη : ηα· καὶ ηβ + βα : ηα : : βη : ηα.

Κείσθω οὖν βα = 1560, καὶ ἔςαι $\beta\alpha^{\mathrm{T}}$ = 2433600· καὶ δα = τῇ ἡμιδιαμέτρῳ (7) αγ = 780· ὥςε $\delta\alpha^{\mathrm{T}}$ = 608400, καὶ $\delta\beta^{\mathrm{T}} = \beta\alpha^{\mathrm{T}} - \delta\alpha^{\mathrm{T}}$ = 1825200· Ἀλλὰ √1825201 = 1351· καὶ τοίνυν δβ ἐλάσσων ἐςὶν ἢ 1351· καὶ δβ + βα ἐλάσσων ἢ 1351 + 1560 = 2911· Ἔνθεντοι ὁ λόγος 2911 πρὸς 780, τȣτέςιν (εἰ τῶν ἀριθμῶν ἑκάτερος διὰ 100 πολλαπλασιαθείη) ὁ λόγος 291100 πρὸς 78000, μείζων ἐςὶ τȣ λόγȣ δβ + βα πρὸς δα, ἤτοι τȣ βε πρὸς εα· Ἐὰν ὖν ὑποτεθῇ εα = 78000, ἔςαι βε ἐλάσσων 291100.

Κείσθω τοίνυν εα = 78000, καὶ ἔςαι $\varepsilon\alpha^{\mathrm{T}}$ = 6084000000· καὶ ἐπειδὴ βε ἐλάσσων ἢ 291100, ἔςαι $\beta\varepsilon^{\mathrm{T}}$ ἔλαττον ἢ 84739210000· καὶ $\beta\alpha^{\mathrm{T}} = \beta\varepsilon^{\mathrm{K}} + \varepsilon\alpha^{\mathrm{T}}$, ἔλαττον ἢ 90823210000· Ἀλλαμὴν √90826890625 = 301375· ἄρα βα ἐλάσσων ἐςὶν ἢ 301375, καὶ εβ + βα ἐλάσσων ἢ 291100 + 301375 = 592475· Ταύτηνοι ὁ λόγος 592475 πρὸς 78000, τȣτέςιν

---

(1) Δξ. α'. τῶν Αρχιμ. (2) ΚΘ. Βιβλ. Γ. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ α'. καὶ Πρότ. Δ. τȣ ς'. (4) ΚΘ. τȣ γ'. (5) Γ. τȣ ς'. (6) Ὡς ἀνωτ. (7) Δ. Πόρισ. τῆς ΙΒ. τȣ δ'.

(εἴτις τὰς ἀριθμὰς διὰ 324 διελόμενος, τὰ ἐντεῦθεν πηλίκα διὰ 11 ἐπιπολλαπλασιάσειε) ὁ λόγος 20053 πρὸς 2640, τῦ λόγυ εβ + βα πρὸς εα, τυτέςι τῦ βζ πρὸς ζα μείζων ἔςαι· καὶ εἰ τοίνυν θείημεν ζα = 2640, ἔςαι δὴ βζ ἐλάσσων ἢ 20053.

Κείθω τοίνυν ζα = 2640, καὶ ἔςαι ζα^{T} = 6969600· καὶ ἐπειδὴ βζ ἐλάσσων ἐςὶ 20053, ἔςαι βζ^{T} ἔλαττον ἢ 402122809, καὶ βα^{T} = βζ^{T} + ζα^{T} ἔλαττον ἢ 409092409· Ἀλλὰ √ 409131529 = 20227· ἄρα βα ἐλάσσων ἢ 20227, καὶ ζβ + βα ἐλάσσων 40280· ὥςε ὁ λόγος 40280 πρὸς 2640, τυτέςιν (εἴτις ἑκάτερον διέλοι διὰ 40, ἐπιπολλαπλασιάσειε δὲ τὰ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντα πηλίκα διὰ 6) ὁ λόγος 6042 πρὸς 396, μείζων ἐςὶ τῦ λόγυ ζβ + βα πρὸς ζα, τυτέςι τῦ βη πρὸς ηα· Ἐὰν οὖν τεθῇ ηα = 396, ἔςαι βη ἐλάσσων ἢ 6042.

Κείθω τοίνυν ηα = 396, καὶ ἔςαι ηα^{T} = 156816· καὶ ἐπειδὴ βη ἐλάσσων ἐςὶν ἢ 6042, ἔςαι βη^{T} ἔλαττον ἢ 36505764, καὶ βα^{T} = βη^{T} + ηα^{T} ἔλαττον ἢ 36662580· Ἀλλαμὴν √ 36663025 = 6055· ἄρα βα ἐλάσσων ἐςὶν ἢ 6055, καὶ βη + ηα ἐλάσσων ἢ 12097· Ἔνθεντοι ὁ λόγος 12097 πρὸς 396, τυτέςιν (ἑκατέρυ διπλασιαθέντος) ὁ λόγος 24194 πρὸς 792 μείζων ἐςὶ τῦ λόγυ ηβ + βα πρὸς ηα, ἤτοι τῦ λόγυ βθ πρὸς θα· Ἐὰν οὖν τεθῇ θα = 792, ἔςαι βθ ἐλάσσων ἢ 24194.

Κείθω τοίνυν θα = 792, καὶ ἔςαι θα^{T} = 627264, καὶ ἐπειδὴ βθ ἐλάσσων ἢ 24194, ἔςαι βθ^{T} ἔλαττον ἢ 585349636· καὶ βα^{T} = βθ^{T} + θα^{T} ἔλαττον ἢ 585976900· Ἀλλὰ √ 585978849 = 24207· ἄρα ἡ βα ἐλάσσων ἐςὶν ἢ 24207· ὅτυ λόγος αθ πρὸς αβ, μείζων ἐςὶ τῦ λόγου 792 πρὸς 24207· τυτέςιν (ἑκατέρυ διαιρεθέντος διὰ 3) μείζων τῦ λόγου 264 πρὸς 8069· καὶ ἑπομένως ὁ λόγος 96 αθ πρὸς αβ, μείζων ἐςὶ τῦ λόγυ 96 × 264 = 25344 πρὸς 8069· καὶ ἐπειδὴ 25344, τυτέςι 25344 × 1, ὑπερέχει 25343 $\frac{34}{71}$, ὅπερ ἐςιν 8069 × 3 $\frac{10}{71}$, ἔςαι (1) ὁ λόγος 25344 πρὸς 8069 μείζων τῦ λόγυ 3 $\frac{10}{71}$ πρὸς 1· ὅθεν δὴ (2) ὁ λόγος 96 αθ πρὸς αβ μείζων ἐςὶ τῦ λόγυ 3 $\frac{10}{71}$ πρὸς 1· Καὶ τοίνυν (3) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων μεῖζον τῦ ὑπὸ τῶν μέσων, τυτέςιν 96 αθ, ἥτις ἐςὶν ἡ περίμετρος τῦ Πολυγώνυ, ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφοιτο, καὶ ἑπομένως ἡ τῦ Κύκλυ, εἰς ὃν ἂν ἐγγράφοιτο περιφέρεια, μείζων ἔςαι ἢ 3 $\frac{10}{71}$ ἡ διάμετρος αβ. Ο. Ε. Δ.

---

(1) Ζ. Πόρ. τῆς Ις. τῦ ς΄. (2) Σχόλ. τῆς Ιδ. τῦ ε΄. (3) ς. Πόρ. τῆς Ις. τῦ ς΄.

Ὡς εἴπερ ἤδη εἰς Πολύγωνα τῶν πολυπλευροτέρων ἔτι τὸν κατὰ τὴν Γεωμετρίαν λογισμὸν ἐπεκτείνοιμεν, τὰ τεθέντα ὅρια ἔτι καὶ ἔτι ἂν μᾶλλον συρεῖλαι ἔχοιμεν πέρατος ἄνευ, καὶ ἐς ἄπειρον ὑπὸ τῆς ἀληθοῦς ἀναλογίας ἐγγὺς ἰέναι, ὃ δὴ καὶ γέγονε Λυδόλφῳ τῷ Κεύσωίῳ, καὶ Γριμβεργέρῳ, καὶ Μετίῳ, καὶ Σνελλίῳ, καὶ ἄλλοις.

Ἐπεὶ δὲ δὴ (ὅρα Σχ. 2) ἡ ἁπτομένη μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τοῦ περιγεγραμμένου Πενταγώνου περίμετρον δίδωσι, τὸ δέ τοι ἡμίτονον μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζόμενον, τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου παρέχεται· ὡσαύτως δὲ ἡ μὲν τῆς ἡμιμοίρας ἁπτομένη διὰ 720 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τοῦ περιγεγραμμένου Πολυγώνου, οὗ πλευραὶ 360, τὸ δέ τοι ἡμίτονον τῆς ἡμιμοίρας διὰ 720 ἐπιπολλαπλασιαζόμενον τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὗ ὁμοίως πλευραὶ 360, περίμετρον συγκροτεῖ, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον, εὔδηλον ὅπως ἐκ τῶν καταγεγραμμένων ἤδη πινάκων τῶν τε ἡμιτόνων, καὶ τῶν ἁπτομένων, οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ εὑρεθῆναι δυνήσονται.

Κατάλογος τῶν εἰς τόδε εὑρημένων ἐπισημοτέρων Ἀναλογιῶν.

Πρώτη γοῦν ἡ κατ' Ἀρχιμήδην οὕτως ἔχουσα.

Διάμετρος 7.

Περιφέρεια 22 μείζων τῆς ἀληθοῦς.

Διάμετρος 71.

Περιφέρεια 223 ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς.

Καὶ γὰρ $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$· καὶ $\frac{223}{71} = 3\frac{10}{71}$·

Οἱ μὲν οὖν λόγοι 22 πρὸς 7, καὶ 223 πρὸς 71, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἑπόμενον ἀναγόμενοι (ὃ δὴ γίνεται, καθ' ὃν δὴ λόγον καὶ τὰ ἀριθμητικὰ τῶν πλασμάτων, ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀνακαλεῖται), λόγους δώσουσι τοὺς ἐφεξῆς δὴ τούτους 1562 πρὸς 497, καὶ 1561 πρὸς 497.

Καὶ τεθείσης τοίνυν τῆς διαμέτρου μερῶν 497.

Ἔσται ἡ ὑπερπίπτουσα τῆς ἀληθοῦς περιφέρεια 1562.

Ἡ δὲ εἴσω πίπτουσα, καὶ τῆς ἀληθοῦς ἐλάσσων 1561.

Ὥστε ἑκατέρα τῆς ἀκριβῶς ἀληθευούσης διενήνοχε πηλικότητι ἐλάσσονι τῆς, ἥπερ ἂν εἴη τῆς ὅλης διαμέτρου $\frac{1}{497}$.

Ἐὰν δὲ οἱ λόγοι 7 πρὸς 22, καὶ 71 πρὸς 223 ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἑπόμενον ἐπαναχθῶσι, προκύψουσι δὴ οἱ λόγοι οὗτοι 1561 πρὸς 4906, καὶ 1562 πρὸς 4906.

Καὶ τεθείσης τοίνυν τῆς περιφερείας μερῶν 4906.

Ἔσται ἡ μὲν ἐλάττων ἴσα τῆς ἀληθοῦς διάμετρος 1561.

Ἡ δέ τοι μείζων 1562.

Ὥςε ἑκατέρα τῆς ἀκριβῶς ἀληθευούσης διαμέτρε διεννήνοχε πηλικότητι ἐλάσσονι τῆς, ἥπερ ἂν εἴη τῆς ὅλης περιφερείας $\frac{1}{4968}$.

Ἣν δὲ δὴ Μέτιος παρέδωκεν ἀναλογίαν, μακρῷ τῆς κατ' Ἀρχιμήδην πρὸς ἀκρίβειαν ἐςὶ διαφέρουσα· καθ' ἣν,

Ἡ μὲν Διάμετρος 113.

Ἡ δὲ Περιφέρεια 355.

Ἁπασῶν γὰρ τῶν ἐν βραχέσιν ἀριθμοῖς παριςαμένων, ὐδεμία τῦ ἀληθῆς γίνεται ἐγγυτέρω· Ταύτη γὰρ τῆς διαμέτρε ὑποτεθείσης 10,000,000 προκύπτει ἡ περιφέρεια 31,415,929, ἡ δὴ τῆς ἀληθῦς κατά γε τὸν πρῶτον χαρακτῆρα 9, διαφέρει ὑπεροχῇ μικρόντι μείζονι, ἢ ὅσον ἐςὶ τῆς διαμέτρε δύο δεκατημιλλιομόρια.

Ἀλλὰ γὰρ ἑκατέρας μακρῷ τυγχάνει ἀκριβεςέρα, ἡ δισσὴ ἐκείνη ἡ κατὰ Λυδόλφον τὸν Κεῦσόνιον, ὧν τῆς μὲν οἱ ὅροι χαρακτῆρσί συγκείμενοι εἰσὶ 21, τῆς δὲ 36.

Διάμετρος.

100,000000,000000,000000.

Περιφέρεια ἡ μείζων τῆς ἀληθῦς.

314,159265,358979,323847.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθῦς.

314,159265,358979,323846.

Ἡ δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ τῆς διαμέτρε ἓν ἐςὶ μόριον, οὗ παρονομαςὴς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος καὶ 20 σημείων τῦ μηδενὸς συγκροτέμενος· ἔνθεντοι καὶ ἑκατέρα τῆς ἀληθῦς περιφερείας διεννηνοχεῖα ἐςὶ, πηλικότητι τῦ ῥηθέντος μορίε ἐλάσσονι· ἀμέλειτοι ἑκατοντάκις μιλλιονάκις μιλλιονάκις μιλλιοςῷ.

Διάμετρος.

100000,000000,000000,000000,000000,000000.

Περιφέρεια μείζων τῆς ἀληθῦς.

314159,265358,979323,846264,338327,950289.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθῦς.

314159,265358,979323,846264,338327,950288.

Ἡ δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ, ἐν αἷς ἡ ἀληθὴς μεσιτεύει, τῆς διαμέτρε μόριον ἐςὶν, οὗ παρονομαςὴς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος καὶ 35 χαρακτήρων μηδενικῶν συγκροτέμενος· ὃ δὴ μόριον πρός γε τὴν διάμετρον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὴν ὅλην γῆν ψάμμε κόκκος. Οὐδὲ γὰρ ὑπὸ τρόπων ἡ τῆς

γῆς Σφαῖρα ψάμμων συνολῦται, ὅσα δή ποτε τῶν τηλικούτων μορίων ἡ διάμετρος περιέχει.

Εἰς κενὸν ἄρ' ἄντις προσωτέρω χωρήσειε, κἂν εἰς ἄπειρον χωρεῖν δυνατὸν, εἴτις γεωμετρικῶς συλλογιζόμενος, κατὰ τὴν ὑπὸ Σνελλίου παραδοθεῖσαν πρόχειρον μέθοδον, τὸν λόγον προαγαγεῖν ἐθελήσειε.

Τεθείσης γὰρ δὴ τῆς περιφερείας μερῶν.

1,000000,000000,000000,000000,000000,000000.

Ἔςαι δὴ ἡ διάμετρος ὅτι ἔγγιςα μερῶν.

0,318309,886183,790671,537767,926745,028724.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Ἐπειδὴ ἐν ἀριθμοῖς ἥττον ἀκριβέσιν ἐςὶν ἡ τοῦ Κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον, ὡς 22 πρὸς 7, ἔςαι δὴ ὁ Κύκλος ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, πρὸς τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 11 πρὸς 7· πρὸς δέ γε τὸ περιγεγραμμένον, ὡς 11 πρὸς 14· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς 22 πρὸς 7· ἃ δὴ πάντα ἐκ τοῦ Β'. Πορ. τῆς πρὸ ταύτης Προτ. ἑπόμενα ἐςί. Α'.

Ἐπεὶ δὲ ἐν ἀριθμοῖς ἀκριβεςέροις, ἡ τοῦ Κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον λόγον ἔχει, ὃν 355 πρὸς 113· ἔςαι δὴ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 226· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 355 πρὸς 452· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 113. Β'.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῆς περιφερείας ὑποτεθῇ μονὰς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἑαυτῇ ἑπόμενα φέρουσα, ἔςαι ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 100000 πρὸς 63662· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 100000 πρὸς 127324· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ὡς 100000 πρὸς 31831 ὡς ἔγγιςα. Γ'.

Ἐὰν δὲ τελευταῖον ἀντὶ τῆς διαμέτρου ὑποτεθῇ μονὰς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἑπόμενα φέρουσα, ἔςαι ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 157080 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 78540 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ὡς 314159 πρὸς 100000, ὅτι ἔγγιςα. Δ'.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Αἱ δὲ δὴ τῆς ἐκτεθείσης ἀναλογίας ἐπισημότατοι ἐπικαρπίαι, εἰσὶ καὶ αἱ ἑφεξῆς.

„Εὕρεσις τῆς Διαμέτρου ἐκ τῆς περιφερείας.

Μιᾶς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν ἀναλογιῶν, ὁ τῶν ὅρων μείζων πρῶτος τετάχθω, δεύτερος δὲ ὁ ἐλάσσων· κείσθω δὲ εἰς τρίτον ὅρον ἡ περιφέρεια· Τῶν δὲ τριῶν τετωνὶ κειμένων ὅρων, κατὰ τὴν χρυσῆν ἀκόυσαν μέθοδον, ζητείσθω ὁ τέταρτος ἀνάλογον, ὃς δὴ ἡ ζητουμένη ἔσται διάμετρος.

Οἷον εἰ τεθείη ἡ τοῦ μεγίστου κατὰ γῆν Κύκλου περιφέρεια, μιλίων εἶναι τῶν κατὰ Βέλγας ὡρικῶν 8640, καὶ ζητηθείη ἡ τῆς γῆς ἐντεῦθεν διάμετρος, οὕτως οἱ ὅροι τετάξονται.

355 : 113 : : 8640 :

Καὶ ἐπιπολαπλασιασθέντος τοῦ Β' τῶν ὅρων διὰ τοῦ Γ', καὶ τοῦ ἀνακύπτοντος διὰ τοῦ πρώτου διαιρεθέντος, μίλια πρόεισι Βελγικὰ 2750 $\frac{14}{71}$ εἰς τὴν γῆς διάμετρον.

„Σεσημειώσθω, ὅτι ἐξιπατῆσθαι πεφώραται ὁ Ταχυέτιος ἐν τούτοις, „τῇ περιμέτρῳ τῆς γῆς μίλια Βελγικὰ 8640 ἀποδούς. Ἐκ γὰρ τῆς κατὰ „Σνέλλιον καταμετρήσεως, τῆς περιμέτρου μίλια Βελγικὰ 6840 (ὡς ἔστι μα„θεῖν παρὰ Οὐαρενίῳ) περιεχήσης, οὗτος ἔλαθε τὰς ἑκατοντάδας καὶ χιλιά„δας ἀντιμεταξήσας. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τοῦ κατὰ Σνέλλιον ἀριθμοῦ, ἐξέσται τοῖς „μαθητιῶσι γυμνασίας χάριν καθ' ἑαυτοὺς ἀναλογίσασθαι, ὅσῃ τις ἐξ ἐκείνου „δοθέντος ἡ τῆς γῆς ἂν εἴη διάμετρος.

„Εὕρεσις τῆς Περιφερείας ἐκ τῆς Διαμέτρου.

Μιᾶς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν Ἀναλογιῶν ὁ ἐλάσσων ὅρος πρῶτος τετάχθω, ὁ δὲ μείζων δεύτερος· ἡ δὲ δοθεῖσα διάμετρος εἰς τρίτον ὑποκείσθω· Κἀκτούτων δὴ τῶν τριῶν δοθέντων ὁ τέταρτος ἀνάλογον ζητείσθω· οὗτος γὰρ δώσει τὴν ζητουμένην περιφέρειαν.

Οἷον εἴπερ ἡ τῆς γῆς διάμετρος μίλια Βελγικὰ ὡρικὰ περιέχειν ὑποτεθείη 2750 $\frac{14}{71}$, ζητηθείη δὲ ἡ περίμετρος, οὕτως οἱ ὅροι τετάξονται.

113 : 355 : : 2750 $\frac{14}{71}$

Καὶ ἐπιπολαπλασιασθέντος μὲν τοῦ Β' διὰ τοῦ Γ', διαιρεθέντος δὲ τοῦ παραγομένου διὰ τοῦ Α', προελεύσεται μίλια Βελγικὰ 8640, εἰς τὴν γῆς περίμετρον.

Ὡς δὲ βραχύτι λίαν ἡ περίμετρος αὕτη τῆς ἀληθοῦς ὑπερπίπτει, εἴρηται ἡμῖν ἀνωτέρω· ὑπεροχῇ γὰρ δηλονότι μικρῷ μείζονι, ἢ ὅσον τῆς κατὰ γῆν ἡμιδιαμέτρου δύο ἐστὶ δεκαμιλιοστημόρια, τουτέστιν 9 περίπου, ἢ 10 ποσὶ Ρουλανδικοῖς, ἐξ ὧν 18000 τὸ ὡρικὸν συνίσταται μίλιον. Ἐὰν δὲ τῶν κατὰ Λυδόλφον ἀναλογιῶν, καὶ τῇ προτέρᾳ ζῆς οἱ ὅροι ἐκ χαρακτήρων κε σύγ-

κειται) χρησώμεθα, εὑρεθήσεται ἡ περίμετρος ἀνεπαισθήτως τῆς ἀληθοῦς διαφέρουσα, ὑ μόνον τῆς διαμέτρου τεθείσης μιλλίων Βελγικῶν 2750, ὅση ἡ τῆς γῆς, ἀλλὰ ᾗ ἦν ἡ διάμετρος αὐτὴ ὑποτεθείη, ἑκατὸν εἶναι μιλλιονίων ἐκ μιλλίων τῶν αὐτῶν, ὅση τυχὸν ἡ τοῦ σφαιρώματος διάμετρος ἐστί. Ταύτης γὰρ δὴ κειμένης προκύψει ἡ περιφέρεια τῆς ἀληθοῦς διεννηοχεῖα πηλικότητι ἐλάσσονι, ἢ ὅσον ποδὸς Ῥυνλανδικοῦ ἑκατοστὸν μιλλιοστημόριον. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῇ εὑρέσει τῆς περιμέτρου τῆς γῆς, τῇ κατ' Ἀρχιμήδην ἀναλογίᾳ χρησώμεθα, ἡ τῶν περιφερειῶν διαφορὰ τῆς γε τῆς ἀληθοῦς μείζονος, ᾗ τῆς ἐλάσσονος, ὑπὲρ τὰ ς Βελγικὰ μίλλια ἔσται· Διὸ δὴ τῇ κατ' Ἀρχιμήδην ἀναλογίᾳ, ὅτι μὴ ἐπὶ βραχυτάτου μεγέθους, ἡκιστα χρηστέον· χρηστέον δὲ μᾶλλον τῇ κατὰ Μέτιον ὡς λυσιτελεστέρᾳ, ἅτε δὴ ᾗ ἐξ ὅρων οὐ πάνυ πολλῶν συγκειμένη, ᾗ πλέον ἢ χιλιάκις πρὸς ἀκρίβειαν διαφερέσθω.

„Η' τοῦ Κύκλου καταμέτρησις.

Η' ἡμιδιάμετρος τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ἐπιπολαπλασιαζομένη, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Κύκλου παρέχεται· ὡς δῆλον ἐκ τοῦ Α' Πορίσμ. τῆς ε'. τοῦ παρόντος Βιβλ. Προτάσεως.

Οἷον ἐὰν τὴν τῆς γῆς ἡμιδιάμετρον μιλλίων οὖσαν (τοῦ κλάσματος ἀμελουμένου) Βελγικῶν 1375, διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς γῆς πολλαπλασιάσωμεν, τουτέστι διὰ μιλλίων Βελγικῶν 4320, προκύψει δὴ μίλλια Βελγικὰ τετράγωνα 5,940000, εἰς τὸν τῆς γῆς Κύκλον μέγιστον. Η' δὲ διαφορὰ τοῦ κυκλικοῦ εὑρεθέντος χωρὶς ἀπὸ τοῦ ἀληθοῦς λαμβάνεται, εἴπερ ἡ τῆς εὑρεθείσης ἡμιπεριφερείας ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ἀληθοῦς διαφορὰ, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἡμιδιάμετρον ἐπιπολαπλασιάζοιτο· ἢ γὰρ, εἴπερ ἡ διαφορὰ τῆς εὑρεθείσης ἡμιδιαμέτρου ἀπὸ τῆς ἀληθοῦς, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἡμιπεριφέρειαν ἐπιπολαπλασιάζοιτο.

„Η' τοῦ Κυκλικοῦ τομέως αεβη, ἢ αεγη, κ. 1.

„Δοθείσης τῆς τοῦ Κύκλου ἡμιδιαμέτρου αε,

„Καὶ τοῦ κατὰ τὸν τομέα τόξου εβη, εγη καταμέτρησις.

Γινέσθω ὡς 113 πρὸς 355, οὕτως (1) ἡ δοθεῖσα ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν τοῦ Κύκλου ἡμιπεριφέρειαν. Εἶτα ὡς αἱ μοῖραι 360 πρὸς τὰς μοίρας τοῦ δοθέντος τόξου, οὕτως (2) ἡ ἡμιπεριφέρεια ἡ ἤδη ἐξευρεθεῖσα, πρὸς τὴν τοῦ κατὰ τὸν τομέα τόξου ἡμίσειαν εβ, ἢ εγ· Τούτου οὖν διὰ τῆς δοθείσης ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιαθέντος (3), τὸ τοῦ ζητουμένου τομέως ἐμβαδὸν ἀνακύψει.

(1) ΙΕ. τοῦ ε'. (2) Διὰ τὴν αὐτήν. (3) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ παρόντ., ᾗ Σχ. τῆς ΜΑ. τοῦ α'.

Καὶ ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῦ εὐθυγράμμυ Τριγώνυ ανη, τῷ μείζονι τομεῖ αεβη προςεθῇ, ἢ γῦν ἀπὸ τῦ ἐλάσσονος αεγη ἀφαιρεθῇ, παρέςαι τὸ τῦ Κύκλυ τμῆμα ἤτοι τὸ μεῖζον εδηβ, ἢ τὸ ἔλαττον εδηγ· τὸ δὲ ςῦ δε τῦ Τριγώνυ ἐμβαδὸν (1) ἐςὶ τὸ ὀρθογώνιον αδ × δε· ἔςι δὲ ἡ εδ (2) ἡμίτονον, καὶ αδ συνημίτονον τῦ τόξυ εβ, εἶτ' οὖν τῦ εγ· Ἐκ τῶν τῦ Τμήματος ἄρα δοθέντων τόξων εβη, ἢ εγη, καὶ τῆς βάσεως εη, ἢ γῦν ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρυ εα, καὶ τῆς βάσεως εη δοθεισῶν, ἢ τέως ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρυ εα, καὶ τῦ τόξυ εβη, ἢ γῦν εγη, εὑρεθήσονται αἱ εδ καὶ δα, ἐξ ὧν δὴ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῦ Τριγώνυ εαη. Ἀλλὰ γὰρ δὴ τὰ τοιαῦτα παρὰ τῆς Τριγωνομετρίας μάλιςα ζητητέα.

„Η' τῶν Κυλίνδρων, καὶ τῶν Κώνων καταμέτρησις.

Ταύτην δὴ ὧδε προτίθημι, ὡς ἐκ τῆς τῦ Κύκλυ καταμετρήσεως ἠρτημένην· Ἅπας οὖν Κύλινδρος, καὶ πᾶν Πρίσμα παράγεται ἐκ τῦ ὕψυς ἐπὶ τὴν βάσιν πολυπλασιαζομένυ, ὁ δέτοι Κῶνος καὶ ἡ Πυραμὶς ἐκ τριτημορίυ τῦ ὕψυς διὰ τῆς βάσεως πολυπλασιαζομένυ· τριτημόρια γὰρ τῶν τε Κυλίνδρων, καὶ τῶν Πρισμάτων εἰσὶ, τῶν βάσιν τε καὶ ὕψος ἴσων, κατὰ τὴν Ι' καὶ Ζ' τῦ ιβ'. Βιβλίυ.

Ἔςω τοίνυν βάσις Κυλίνδρυ, ἢ Κώνυ ποδῶν οὖσα 50 τετραγώνων, τὸ δὲ ὕψος ποδ. 100· καὶ πολλαπλασιαθέντων δὲ 100 διὰ 50, προκύψυσι πόδες Κυβικοὶ 5000 εἰς τὸ τῦ Κυλίνδρυ ςερεόν· πολλαπλασιαθέντων διὰ τριτημορίυ τῦ ὕψυς 100, τυτέςι διὰ 33 $\frac{1}{3}$ τῶν 50, προκύψυσι πόδες Κυβικοὶ 1666 $\frac{2}{3}$ εἰς τὸ ςερεὸν τὸ τῦ Κώνυ.

κ. 12. „Καταμέτρησις Κώνυ κολοβῦ υπρξ, δοθεισῶν τῶν παραλλήλων „βάσεων ζζ καὶ σσ, καὶ τῦ ὕψυς υδ.

Εἰς ἐπίλυσιν τῦ προτεθέντος προβλήματος τὸ Λῆμμα τὸ ἐφεξῆς προσληπτέον.

Ὃν ἔχει λόγον ἡ τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν ἡμιδιαμέτρων διαφορὰ νυ — πδ, πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἡμιδιάμετρον πδ, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ ὕψος τῦ κολοβῦ Κώνου νδ, πρὸς τὸ ὕψος τῦ ἐνδεόντος δο. Ἀχθείσης γὰρ ἐπὶ τῦ νυο Τριγώνυ τῆς δι' Εὐθείας παραλλήλυ πρὸς τὴν ον, ἔςαι (3) υι : ιν : : υδ : δο· ἀλλὰ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον νιδπ, ἔςι (4) ιν = πδ, καὶ ἑπομένως υι = νυ — πδ· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

---

(1) Σχόλ. ΜΔ. τῦ α'. (2) Ὁρ. Ι. τῦ γ'. καὶ Δ. Πόρ. τῆς Γ. τῦ γ'. (3) Β. τῦ ς'. (4) ΛΔ. τῦ α'.

Καὶ τοίνυν τῶν τριῶν δοθέντων, δῆλα ὁ τέταρτος δο εὑρεθήσεται, ὅπερ ἐςὶ τὸ ὕψος τὸ τῆ ἐνδέοντος πορ· οὗ δὴ ὕψους τριτημόριον, εἴγε ἐπὶ τὴν βάσιν σσ ἐπιπολαπλασθείη, δώσει δήπου τὸ ἐνδέον πορ. Εἶτα ἐὰν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν οδ + δυ, τουτέςι τῆ ὕψους τριτημόριον τῆ Κώνου ὁλοχερούς, ἐπιπολαπλασιασθῇ διὰ τῆς βάσεως ζζ, δώσει δὴ τὸν Κῶνον ὁλοχερῆ νοξ· ἀφ' οὗ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ἐνδέον πορ, ὑπολειφθήσεται ὁ Κῶνος ὁ κολοβὸς νπρξ.

Σημειωτέον ἀλλ' οὖν, ὡς οὐ μόνον ἐπὶ τῆς τῆ ὀρθῆ, ἀλλ' οὐδὲν ἧττον καὶ ἐπὶ τῆς τῆ σκαληνῆ κολοβῆ Κώνου καταμετρήσεως, ἡ ἀπόδειξις συντελέσει, ὡς δῆλον ἐξ ὧν ἐν τοῖς περὶ τῆς κολοβῆς Πυραμίδος καταμετρήσεως, ἐν τῷ ΙΒ' τῶν ςοιχείων εἴρηται.

Πρότασις Ζ.

„Αἱ τῶν Κύκλων περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διάμετροι, ἢ „αἱ ἡμιδιάμετροι. κ. 13.

Τῶν γὰρ ὁμοίων πολυγώνων τῶν εἰς τοὺς Κύκλους ἐγγράφεσθαι δυναμένων ἐπ' ἄπειρον, αἱ περίμετροι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι (1) αζ, ιγ· Ἀλλαμὴν αἱ περίμετροι τέως ἐπ' αὐτὰς δὴ (2) τὰς περιφερείας ἀποτελευτῶσιν· ἄρα καὶ αἱ περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Η.

„Η τῆ Πρίσματος ἐπιφάνεια, τῆ τε εἰς τὸν κύλινδρον περιγεγραμμέ- „νου, καὶ τῆ ἐγγεγραμμένου, ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῆ κυλίνδρου „πλευρὰ, ἡ δὲ βάσις ἴση τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τῆ Πρίσματος. κ. 14.

Μέρος Α'. Η τῆ περιγεγραμμένου Πρίσματος ἐπιφάνεια ἅπτεται τῆ κυλίνδρου κατὰ τὰς Εὐθείας εα, νζ, κξ, αἵτινες εἰσὶ τῆ κυλίνδρου πλευραί· αἱ δὲ (τῆ κυλίνδρου ἐξ ὑποθ. ὀρθῆ ὄντος) ἐπὶ τῆ κατὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδου (3) ὀρθαὶ εἰσὶ, καὶ ἑπομένως καὶ πρὸς τὰς γη, ημ, κξ: εὐθείας (4) πρὸς ὀρθὰς ἐφεςήκασιν· εἰσὶ δὲ καὶ ἀλλήλαις ἴσαι, ὥςε μίατις ὁποιαῦν τῶν τῆ κυλίνδρου πλευρῶν ἁπάντων τῶν ὀρθογωνίων γξ, ξμ, μθ, κξ, κοινὸν ὕψωμα ἐςί· καὶ τοίνυν ἡ τῆ περιγεγραμμένου Πρίσματος ἐπιφάνεια, ἴση (5) ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπό τε τῆς περιμέτρου τῆς κατὰ τὸ Πρίσμα βάσεως, καὶ τοῦ κατ' αὐτὸ τὸ πρίσμα, ἢ γῆν τὸν Κύλινδρον ὕψους, εἴτ' οὖν τῆς πλευρᾶς, περιεχομένῳ.

---

(1) Πόρ. Α. τῆς Α. τῆ ιβ'. (2) Γ. τῆ παρόντ. (3) Ὁρ. Γ. τῆ ιβ'. καὶ Πρότ. Η. τῆ ια'. (4) Ὁρ. Γ. τῆ ια'. (5) Κατὰ τὴν Α. τῆ ς'.

Ὡσαύτως δὲ δείκνυται καὶ τὸ Β' Μέρος. Ἡ γὰρ τοῦ ἐγγεγραμμένου Κυλίνδρου πλευρὰ βδ, ἡ κι, ἡ πο, κξ:, κοινὸν τυγχάνει παραπλησίως ὕψος τῶν ὀρθογωνίων βδικ, ικοπ, ἃ τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου Πρίσματος συνίστησιν ἐπιφάνειαν.

Πρότασις Θ.

„Ἡ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν Κῶνον περιγεγραμμένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδοῦς βάσεως περίμετρος ζθλδ, ὕψος δὲ ἡ τοῦ Κώνου πλευρὰ βη.

„Ἡ δὲ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς εἰς τὸν ὀρθὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδοῦς βάσεως περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ κάθετος βξ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως ἀγομένη πλευράν.

κ. 15. Ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰς ἐπαφὰς η, κ, μ, αἱ εὐθεῖαι βη, βκ, βμ· καὶ ἔσονται αἱ εὐθεῖαι αὗται τοῦ Κώνου πλευραὶ, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου ἴσαι. Ἐπεὶ δὲ ὁ Ἄξων βα ὀρθός ἐστι (1) πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ζκδ, ἔσται δὴ (2) καὶ τὸ ηβα ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ζκδ ὀρθόν· ὥστε ἡ θη (3) κάθετος ἐστὶ πρὸς τὴν αη, ἥτις ἐστὶν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ζκδ καὶ ηβα· καὶ ἑπομένως ἡ θη (4) ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ηβα, κἀντεῦθεν καὶ κάθετος (5) πρὸς τὴν βη· καὶ ἡ τοῦ Κώνου ἄρα πλευρὰ ηβ, ὕψος τοῦ Τριγώνου ζβθ ἴσα ἐστί· Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον ἡ τοῦ Κώνου πλευρὰ, ὕψος ἔσται καὶ τῶν λοιπῶν θβλ, λβδ, κξ:. Ἀρ' οὖν τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπό τε τῆς περιμέτρου ζθλδ, καὶ τῆς τοῦ Κώνου πλευρᾶς συνιστάμενον, ἴσον ἐστὶ (6) τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραμμένης, ἐξαιρουμένης τῆς βάσεως. Ο. Η. τὸ Α'.

Παραπλησία δὲ καὶ ἡ τοῦ Β'. Μέρους ἐστὶν ἀπόδειξις.

Κείσθωσαν γὰρ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως, τῆς κατὰ τὴν κανονικὴν ἐγγεγραμμένην πυραμίδα, ταῖς πλευραῖς τῆς περιγεγραμμένης παράλληλοι· καὶ τεμνέτω ἡ πλευρὰ γι τὸ ἐπίπεδον ηβα κατὰ τὸ ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οβ· καὶ ἔσται ἡ γι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αοβ (7) ὀρθή, καὶ ἑπομένως πρός γε τὰς εὐθείας αο, βο, τήν τε ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ Κώνου (8) κάθετος· ἀλλ' ἅπασαι αἱ τοιαίδε εὐθεῖαι αο, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν τῆς πολυγώνου τεταγμένης βάσεως πλευρῶν κάθε-

(1) Ἐξ ὑποθ. (2) ΙΗ. τοῦ ια'. (3) ΙΗ. τοῦ γ'. (4) Κατὰ τὸν Δ. Ὁρ. τοῦ ια'. (5) Γ. Ὁρισμ. τοῦ ια'. (6) Δῆλον ἐκ τῆς Α. τοῦ ε'. (7) Η. τοῦ ια'. (8) Γ. Ὁρ. τοῦ ια'.