ΛΒ. ΛΓ. ΛΔ. αὐτὰ ταῦτα προσήκοντα ἐςὶ καὶ τοῖς τριγωνικοῖς Πρίσμασιν, ἅττα ἡμίση τῶν παραλληλεπιπέδων ὄντα ἐςὶν, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ΚΗ'. Προτάσεως· Καὶ τοίνυν

Τὰ Τριγωνικὰ πρίσματα, ὧν ἴσα τὰ ὕψη, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ Βάσεις· καὶ ἑπομένως ἐὰν ἴσας ἔχοντα ἦ τάςτε βάσεις καὶ τὰ ὕψη, καὶ ἀλλήλοις αὐτὰ ἴσα ἔςαι. Α'. κ. 461.

Ἐὰν ᾖ ὅμοια, τούτων ὁ λόγος τριπλασίων ἔςαι τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν τῶν ἀπεναντίον τῶν ἴσων Γωνιῶν· καὶ ἑπομένως τὰ τῆς ΛΓ'. Προτ. Πορίσματα κἀκείνοις προσεπανήκοντα ἐςί. Β'.

Καὶ ἐὰν ἴσα, ἀντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη· καὶ εἰ ἀντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἴσα ἐςί. Γ'.

Σχόλιον.

Τὸ δέ τοι ἐνταῦθα ἐν Προτ. ΛΔ'. περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀποδειχθὲν, δειχθήσεται ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. Προτ. Θ'. καὶ περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματ. τῆς Θ'. περὶ παντὸς Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ ΙΕ'. Προτ. περὶ τῶν Κώνων, καὶ τῶν Κυλίνδρων.

Πρότασις ΛΕ.

Διεξοδικωτάτη οὖσα ὑπεργεῖ εἰς δεῖξιν τῇ ἐφεξῆς, ἣν αὐτοὶ καὶ ταύτης χωρὶς ἀποδείξομεν.

Πρότασις Λϛ.

„Ἐὰν τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν (α, β, γ), τὸ ἐκ τῶν τριῶν ςερεὸν „Παραλληλεπίπεδον (δθ), ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (β) ςερεῷ παραλληλε„πιπέδῳ (ιν), ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. κ. 462.

Ἡ τοῦ Παραλληλεπιπέδου δθ βάσις ζδ, ἐχέτω Πλευρὰν τὴν εζ = α, καὶ τὴν ἑτέραν Πλευρὰν εδ = γ, τὴν δὲ δὴ τῇ βάσει ἐφιςαμένην Πλευρὰν εη = τῇ μέσῃ β, καὶ ὅτως ἔςαι τὸ δθ Παραλληλεπίπεδον ἐκ τῶν τριῶν α, β, γ. Εἶτα τοῦ Παραλληλεπιπέδου ιν αἱ τρεῖς πλευραὶ λχ, ιχ, χμ (καὶ ἑπομένως καὶ αἱ λοιπαὶ) ἴσαι ἔςωσαν τῇ μέσῃ β· ἡ δὲ κατὰ τὸ χ ςερεὰ Γωνία τούτου τῇ κατὰ τὸ ε ςερεᾷ Γωνίᾳ ἐκείνου ἴση γινέσθω, καὶ ὅτως ἔςαι τὸ ιν παραλληλεπίπεδον ἀπὸ τῆς μέσης β, καὶ ἰσογώνιον τῷ προτέρῳ· φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἴσον.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. καὶ κατασκ. ὡς ζε : λχ, ὅτως ἀντιςρόφως ιχ :

δε, ἔσονται αἱ Βάσεις (1) δζ καὶ ιλ ἴσαι ἀλλήλαις. Ἀλλὰ γὰρ καὶ αἱ στερεαὶ Γωνίαι αἱ πρὸς τῷ ε, καὶ τῷ χ ἴσαι εἰσὶν, ἐὰν ἄρα ἐντὸς ἀλλήλων τεθῶσι, προσεφαρμόσουσι (2), καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν Εὐθειῶν ευ καὶ χμ, τὰ Σημεῖα μ καὶ η εἰς ταυτὸ συμπεσοῦνται· Καὶ τὸ αὐτὸ ἄρα ἔσται ἑκατέρου τῶν στερεῶν πρὸς κάθετον ὕψος, ἀμέλειτοι ἀπὸ τῶν συνιόντων σημείων μ καὶ η ἐπὶ τὴν ὑποκειμένην βάσιν· ὥστε (3) τὰ στερεὰ δθ, ιν ἴσα ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Σημειωτέον δὲ ἐνταῦθα τοῦθ' ὅ μέγιστον τυγχάνει τὴν χρῆσιν, ὡς ἐκ τριῶν Εὐθειῶν ἥπερ ἔτυχεν ἐπ' ἀλλήλαις (4) ἀγομένων, ἰσομέγεθες ἀεὶ τὸ στερεὸν Παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν ὂν (τουτέστιν ὑπὸ ὀρθογωνίων ἐπιπέδων περιεχόμενον) ἀνακύπτει.

αβγα γαβ. βγα.
1 2 3

Ἔνθα τῶν στοιχείων τὰ μὲν πρῶτα δύω τὴν Βάσιν παρίστησι, τὸ δὲ τρίτον τὸ ὕψος. Παραθῶμεν οὖν τὸ πρῶτον τῶν Σχημάτων τῷ δευτέρῳ.

Βάσις αβ πρὸς βάσιν γα (διὰ τὴν Α': τοῦ ς'.), ὡς β Πλευρὰ πρὸς γ Πλευράν, τουτέστιν ἀντιστρόφως ὡς β ὕψος πρὸς γ ὕψος· Ἄρα διὰ τὴν ΛΔ'.

αβγ = γαβ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δείξεις, καὶ τὸ Α'. τῷ Γ'., καὶ τὸ Γ'. τῷ Β'. ἴσα τυγχάνειν.

Πρότασις ΛΖ.

„Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Παραλληλεπί„πεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· Καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' „αὐτῶν στερεὰ Παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλο„γον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Δῆλον ἐκ τῆς ΛΔ'. τοῦ Ε'. Βιβλίου. Οἱ γὰρ τῶν Παραλληλεπιπέδων λόγοι, διὰ τὴν ΛΓ'. τοῦ παρόντος, ἔσονται τριπλασίονες τῶν λόγων, οὓς αἱ Εὐθεῖαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ οἱ (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσί.

Τὸ δὲ ἀνάπαλιν δῆλον αὖθις ἐκ τῆς ΛΕ'. τοῦ Ε'. Οἱ γὰρ λόγοι τῶν Παραλληλεπιπέδων (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσὶ, τριπλασίονες (5) ὄντες τῶν οὓς ἔχουσι

(1) ΙΔ. τοῦ ς'. (2) ΙΑ. ὅρ. ια'. (3) ΛΑ. τοῦ ια'. (4) Ὅρα τὸ Α. Σχόλ. τῆς Μ. τοῦ ια'. (5) ΛΓ. τοῦ ια'.

λόγοις αἱ ὁμόλογοι τῶν Πλευρῶν, ἀφ' ὧν τὰ ὅμοια Παραλληλεπίπεδα ὁμοίως ἀναγράφεται· καὶ ἑπομένως τῶν τοιούτων Πλευρῶν οἱ λόγοι (1) ἔσονται ἴσοι.

Η' δὲ Πρότασις ἀληθεύει, ἐφ' ὁποιωνοῦν στερεῶν ὁμοίων καθόλου ἐκτεινομένη· πάντα γὰρ τριπλασίονα ἔχει τὸν λόγον τοῦ λόγου τῶν κατ' αὐτὰ πλευρῶν, ὡς ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. δῆλον γενήσεται.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ε'ντεῦθεν τὴν μέθοδον ἀρυόμεθα τοῦ τὰς Κυβικὰς τῶν ῥιζῶν πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν· Ε'ὰν γὰρ ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιασθῶσιν αἱ ὑπὸ τοῖς Κυβικοῖς ῥιζικοῖς σημείοις πηλικότητες, καὶ τῷ γινομένῳ σημεῖον Κυβικῆς ῥίζης προταχθῇ, δοθήσεται ὅτω τὸ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν Κυβικῶν ῥιζῶν παραγόμενον. Οἷον ἔστω $\sqrt{5}^3$ πολλαπλασιαστέα ἐν $\sqrt{4}^3$, καὶ παραγόμ. ἔσται $\sqrt{20}^3$· ὡς γὰρ ὁ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ βούλεται λόγος, ἡ μονὰς ἐστὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιαστήν, ἤτοι $1 : \sqrt{4}^3$, ὡς ὁ πολλαπλασιαστέος (τουτέστι $\sqrt{5}^3$) πρὸς τὸ ἀνακύπτον· Α'ρα (διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότ.) ὁ τῆς μονάδος Κῦβος ἔσται πρὸς τὸν Κύβον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς ὁ τοῦ πολλαπλασιαστέου Κῦβος πρὸς τὸν τοῦ παραγομένου· τουτέστιν ἐὰν ἀντὶ τοῦ γινομένου ὑποτεθῇ Γ, ἔσται δὴ $1 : 4 :: 5 : \Gamma^K$, ἀλλὰ $1 : 4 :: 5 : 20$, ἄρα $\Gamma^K = 20$, καὶ $\Gamma = \sqrt{20}^3$.

Παραπλησίως κατὰ τὸν τῆς διαιρέσεως ὅρον δειχθήσεται, ὅτι $\sqrt{20}^3$ ἐὰν διαιρεθῇ διὰ $\sqrt{5}^3$, πηλίκον δώσει $\sqrt{4}^3$. Ο'ρα τὸ Α'. Πόρ. τῆς ΚΒ'. τοῦ ε'.

Καὶ ἐν γένει τῶν ῥιζικῶν πηλικοτήτων, ὁποιασοῦν ἂν εἶεν τάξεως, ἤτοι εἴδους, τὰ γινόμενα ἢ τὰ πηλίκα λαμβάνεται πολλαπλασιασμῷ, ἢ διαιρέσει τῶν ὑπὸ τοῖς ῥιζικοῖς σημείοις πηλικοτήτων, καὶ προσεπισημειώσει τῶν αὐτῶν ῥιζικῶν σημείων, ἐπὶ τοῖς γινομένοις αὐτοῖς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ τοῖς πηλίκοις διὰ τῆς διαιρέσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΗ.

Ταύτην φθάσαντες ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν, ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΓ'. τοῦ παρόντος Βιβλίου Πρότασιν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΘ.

„Ε'ὰν στερεοῦ Παραλληλεπιπέδου (αβ) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων (αγ, δβ), κ. 463.

(1) ΛΕ. τοῦ ε'.

„αἱ Πλευραὶ (αε, ζγ, αζ, εγ, καὶ δθ, ηβ, δη, θβ) δίχα τμηθῶσι, διὰ „δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα (ιλπξ, φκμρ) ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ (στ) τῶν „ἐπιπέδων, καὶ ἡ τοῦ κεραιοῦ παραλληλεπιπέδου Διάμετρος (αβ) δίχα τέμνει „σιν ἀλλήλας.

Ἀχθήτωσαν Εὐθεῖαι αἱ σα, σγ, τδ, τβ, καὶ διὰ τὰς δίχα τετμημένας δη, θβ, καὶ δθ, ηβ, καὶ τὴν ρφ Εὐθεῖαν τὴν ταῖς δη, θβ παράλληλον, καὶ τὴν Εὐθεῖαν ξπ τὴν ταῖς δθ, ηβ (1), διαιρεθήσεται τὸ ηθ Παραλληλόγραμμον εἰς τέσσαρα Παραλληλόγραμμα ἴσα, τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις (2) ὅμοιά τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα· διὸ τὰ ξρ καὶ φπ ἐπιτεθέντα ἀλλήλοις ἐφαρμόσει, καὶ δτ = τβ (3)· Ἔτι τὰ Παραλληλόγραμμα ξρ, φπ, ἔχοντα Γωνίας τὰς ὑπὸ ξδρ, φβπ κοινὰς, μετὰ τοῦ ηθ ὁμοίου αὐτοῖς ὄντος Παραλληλογράμμου, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον (4) εἰσίν· ὅθεν ἡ δτβ (5) Γραμμὴ εὐθεῖα ἐστίν· ὡσαύτως καὶ ἡ ασγ εὐθεῖα ἐστὶ, καὶ ασ = σγ· Ἤδη μὲν οὖν ἡ αδ παράλληλός τε καὶ ἴση ἐστὶ τῇ ζη (6), ἥτε ζη παράλληλός τε καὶ ἴση ἐστὶ τῇ γβ, ἄρα (7) αἱ αδ, γβ παράλληλοί τε εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ ἴσαι· ταύτῃ τοι καὶ αἱ αγ, δβ, αἱ ταύταις ἐπιζευγνύουσαι, παράλληλοί τε εἰσὶ (8) καὶ ἴσαι ἀλλήλαις· διὸ καὶ αἱ αὐτῶν ἡμίσειαι ασ, βτ ἴσαι ἔσονται. Παρὰ ταῦτα δὲ αἱ αβ, στ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ (9) αγβδ· ὥστε ἐπὶ τῶν Τριγώνων ασυ, βτυ, διὰ τὰς ὑπὸ αυσ, βυτ, τὰς κατὰ κορυφὴν ἀντικειμένας, καὶ κατ' ἀκολουθίαν (10) ἴσας, καὶ διὰ τὰς ἐναλλὰξ ὑπὸ ασυ, βτυ ἴσας καὶ αὐτὰς (11) ὄσας, καὶ διὰ τὰς ασ, βτ Πλευρὰς, ἴσας καὶ αὐτὰς ἀποδειχθείσας, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα (12) ἴσα ἔσται, καὶ συ = υτ, καὶ αυ = υβ· Ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ στ, καὶ ἡ Διάμετρος αβ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Ἐπὶ παντὸς οὖν Παραλληλεπιπέδου, ἅπασαι αἱ Διάμετροι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον υ.

Πρότασις Μ.

κ. 464. „Ἐὰν ᾖ δύο Πρίσματα τριγωνικὰ ἰσοϋψῆ (αβζηξγ καὶ ικλφχπ), καὶ

(1) ΛΓ. τοῦ α΄. (2) ΚΖ. καὶ ΛΔ. τοῦ α΄., καὶ Ὅρ. Α. τοῦ ε΄. (3) Λξ. Ζ΄. καὶ Λ. (4) Κς. τοῦ ε΄. (5) Ὅρ. ΛΖ. τοῦ α΄. (6) ΚΔ. τοῦ ια΄. καὶ ΛΔ. τοῦ α΄. (7) Θ. τοῦ ια΄. καὶ Λξ. α΄. (8) ΛΓ. τοῦ α΄. (9) Πόρ. τῆς Ζ. τοῦ ια΄. (10) ΙΕ. τοῦ α΄. (11) ΚΖ. τοῦ α΄. (12) Κς. τοῦ α΄.

„τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν Παραλληλόγραμμον (ξβ), τὸ δὲ Τρίγωνον (ιχλ), διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ Παραλληλόγραμμον τοῦ Τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ Πρίσματα.

Ἐὰν γὰρ πληρωθῇ τὰ Παραλληλεπίπεδα κρ καὶ γθ, ἔσται (1) αὐτὰ ἴσα, διὰ τὴν τῶν βάσεων γα, μκ, καὶ τὴν τῶν ὑψῶν ἰσότητα· τοιγαροῦν καὶ τὰ καθ' ἡμίσειαν (2) αὐτῶν Πρίσματα ἔσονται ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Εἰσὶ γὰρ τὰ δύο ταῦτα τριγωνικὰ Πρίσματα, παραλληλεπιπέδων ἴσων, ταῖς διαγωνίοις τετμημένων, ἡμίσειαι, τοσούτῳ μόνον διαφέροντα, ὅτι ἐπὶ θατέρου ἡ τομὴ κατὰ τὴν Διαγώνιον τῆς βάσεως τελεῖται, ἐπὶ δὲ θατέρου οὐχ οὕτως.

Σχόλιον Α'.

Ἐκ τῶν εἰς τόδε ἀποδεδειγμένων, σαφὴς ἡ τῶν τριγωνικῶν Πρισμάτων καταμέτρησις, καὶ τῶν τετραγωνικῶν, ὧν τὰ ἀπεναντίον τετραγωνικὰ ἐπίπεδα παράλληλα ἐστὶ, τουτέστι τῶν Παραλληλεπιπέδων, τοῦ ὕψους δηλονότι διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιασμῷ ἀγομένου. Οἷον ἐὰν ᾖ τὸ ὕψος ποδ. 10, ἡ δὲ βάσις ποδ. τετραγ. 100 (καταμετρηθήσεται δὲ ἡ βάσις διὰ τοῦ Σχολ. τῆς Λς'. ἢ τῆς ΜΑ' τοῦ Α'.), πολλαπλασιαζέσθω 10 διὰ 100, καὶ ἀνακύψει 1000, οἵτινες εἰσὶ πόδ. κυβικοὶ, ἐξ ὧν τὸ στερεὸν τοῦ Πρίσματος συγκεκρότηται.

Ἡ δὲ δεῖξις προχειροτάτη. Καθάπερ γὰρ τὸ Ὀρθογώνιον, οὕτωτοι καὶ τὸ ὀρθὸν Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τοῦ ὕψους ἐπιπολλαπλασιαζομένου τῇ βάσει· Τοιγαροῦν καὶ ἅπαν ὁποιονοῦν Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τοῦ ὕψους ἐπιπολλαπλασιαζομένου τῇ βάσει, ὅτι (διὰ τὴν ΛΑ') ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθῷ Παραλληλεπιπέδῳ, τῷ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καθιστάμενῳ, καὶ ἐν τῷ ἴσῳ ὑψώματι.

Εἶτα ἐπεὶ τὸ ὅλον Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τοῦ ὕψους τῇ ὅλῃ βάσει ἐπιπολλαπλασιαζομένου, φανερὸν ὡς ἡ τοῦ Παραλληλεπιπέδου ἡμίσεια (τὸ τριγωνικὸν δηλονότι Πρίσμα διὰ τὴν ΚΗ') παραγόμενον ἔσται ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ ἐπιπολλαπλασιαζομένου τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως, τουτέστι τῷ Τριγώνῳ ιλκ (ὅρα τὸ ἀνωτ. Σχῆμα).

Σχόλιον Β'.

Διὰ τὸ τὰ πολύγωνα Πρίσματα εἰς τριγωνικὰ ἀναλύεσθαι ἔχειν, ἢ γοῦν καὶ εἰς Τριγωνικὰ, ὧν ἡ τε βάσις καὶ τὸ ὕψος ἴσα (3) ἀποκαθίσταται, ὅσα

(1) ΛΑ. τοῦ ια'. (2) ΚΗ. τοῦ ια'. (3) ΚΒ. τοῦ ς'.

δή ποτε περὶ τῶν τριγωνικῶν Πρισμάτων ἐν τοῖς Πρίσμασι τῆς ΛΔ'. Προτ. παραδίδοται, καὶ ἐν τῷ Α'. Σχολ. τῆς δε τῆς Μ'. Προτάσ., ἅπαντα ἀληθεύει περὶ ὁποιωνοῦν πολυγωνίων Πρισμάτων λεγόμενα. Δόξαν μέν τοι τῷ Ταχεετίῳ, ἐκ τῶν ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. περὶ Πυραμίδων ἀποδεικνυμένων, ἅπαντα ἐπιφέρειν ἐκεῖνα, περιττὸν ἡμᾶς ἀλλαχόθεν ταῦτα πειρωμένους ἐπάγειν, τοῖς πρωτοπείροις βραδύτερον ἀσχολεῖν.

Τῶν ςοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ'.

Ἡμῖν δὲ Η'.

Ὅπερ ἐν τοῖς πρὸ τοῦδε βιβλίοις διὰ φροντίδος ἡμῖν ἐγένετο, τὴν τῶν μαθηματικῶν ςοιχείων ἔκθεσιν, ῥᾳοτέραν τε παραχεῖν καὶ ἐπιτομωτέραν, τοῦτο μάλιςα ἐπιμελητέον ἡμῖν ἂν εἴη ἐπὶ τοῦ ἐν χερσὶ ΙΒ'., ἐν ᾧ τὰ πραγματευόμενα τῶν ἀναγκαιοτάτων τυγχάνοντα, ἀπαγορεύειν πολλάκις τοὺς πρωτοπείρους, παρὰ τὸ τῶν δείξεων διεξοδικὸν καὶ ἐργῶδες παραίτια γίνεται, εἰς ἀπόγνωσιν μονονουχὶ τούτους ἐμβάλλοντα· πρόθεσις δὲ ἡμῖν τὸ τραχὺ ἐξομαλιοῦντας τῆς εἰσηγήσεως, μηδὲ τῆς κατὰ τοὺς Γεωμέτρας ἀκριβοῦς τῶν δείξεων ἀποςήσεσθαι. Πότερον δ' ἄρα κατὰ σκοπὸν πρόβη χωρῆσαν ἡμῖν τὸ ἐγχείρημα, ὁ μετιὼν ἐπιγνώσεται, εἰ ταῦτα δὴ τὰ ἡμέτερα πρὸς τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς πλάτος ἐκτεταμένα, παραθέσθαι μὴ κατοκνήσειε.

Ὑποθέμενος οὖν ὁ Εὐκλείδης ἐν τῷ πρὸ τούτου Βιβλ. τὰ τῶν ςερεῶν ςοιχεῖα, καὶ τῶν εὐχρεςέρων ἐν σώμασιν, ὡς ἐπιφανείαις ἐπιπέδοις πεπερατωμένων ὁρισάμενος τὰ μέτρα, ἐπὶ τοῦ παρόντος ΙΒ', τὰ ὑπὸ κυρτῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα ςερεά, οἷοι Κύλινδροί τε εἰσὶ καὶ Κῶνοι, καὶ Σφαῖραι διαςκέπτεται, καὶ ταῦτα πρὸς ἄλληλα παρατίθησι, καὶ τούτων τὰ μέτρα προσδιορίζεται. Ἀνυσιμώτατον δὲ τὸ παρὸν Βιβλίον ὁμολογεῖται, ὡς περιέχον τὰς ἀρχὰς, αἷς οἱ ἐνδοξότατοι τῶν Γεωμετρῶν καὶ πρὸ πάντων ὁ Ἀρχιμήδης τὰς θρυλλουμένας ἐκείνας περί τε Κυλίνδρου, καὶ Κώνου, καὶ Σφαίρας ἀποδείξεις ἐπωκοδόμησαν.

Ὅ ρ ι σ μ ο ί.

Πυραμίς ἐςι σχῆμα ςερεὸν (ψλ) ἐπιπέδοις τριγωνικοῖς (αλγ, γλζ, ζλβ, βλα) περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδυ (ψ) πρὸς ἑνὶ σημείῳ (λ) συνεςώς. Α. κ 465.

Τὸ μὲν οὖν ἐπίπεδον ψ, Βάσις λέγεται· ἔςι δὲ ἤτοι Τρίγωνον, ἢ Τετράγωνον, ἢ ὁποιονοῦν ἄλλο Εὐθύγραμμον, ἀφ' οὗ τῶν Πλευρῶν ἑκάςυ τὰ Τρίγωνα ἀνεγείρεται, τὰ εἰς τὸ αὐτὸ συνιόντα σημεῖον τὸ λ, ὁ Κορυφὴ λέγεται.

Καθάπερ τὸ Τρίγωνον ἐν τοῖς εὐθυγράμμοις τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων, οὕτω τοι καὶ ἡ τριγωνικὴ Πυραμὶς ἡ ἀπὸ Τριγώνυ βάσεως συνεςῶτα, ἐν τοῖς ςερεοῖς τὸ πρώτιςον ἐςὶ καὶ ἁπλούςατον.

Ἐὰν ἔξω τοῦ ἐπιπέδυ Κύκλυ τινὸς (γλ) λιφθῇ τι Σημεῖον τὸ (α), ἀφ' οὗ Εὐθεῖά τις ἀχθείη μὴ πεπερασμένη ἡ αζ, ἁπτομένη τοῦ Κύκλυ κατὰ τὸ γ, ἡ δὴ, μένοντος κατὰ χῶραν τοῦ α, περὶ τὴν τοῦ Κύκλυ Περιφέρειαν περιαγομένη αγζ, αὐτόσε πάλιν ἐπανέλθοι, ὅθεν κινεῖσθαι τὸ πρῶτον ἤρξατο, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῆς Εὐθείας αγζ περιγεγραμμένη, Κωνικὴ καλεῖται ἐπιφάνεια, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῆς καὶ τοῦ Κύκλυ γλ περιειλημμένον Σῶμα, Κῶνος. Β'. κ. 466.

Κορυφὴ δὲ τοῦ Κώνυ ἡ κατὰ τὸ α.

Βάσις δὲ τοῦ Κώνυ ὁ Κύκλος γλ.

Ἄξων δὲ τοῦ Κώνυ ἡ Εὐθεῖα αβ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ Κέντρον τῆς Βάσεως ἐπιζευγνυμένη.

Πλευρὰ δὲ τοῦ Κώνυ ἡ αγ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν τῆς Βάσεως ἀγομένη, ἣν ὅλην εἶναι ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ Κώνυ ἐπιφανείᾳ, ἐξ αὐτῆς τῆς τοῦ Κώνυ γενέσεως δῆλον.

Κῶνος ὀρθός ἐςιν, οὗ ὁ ἄξων (αβ) πρὸς ὀρθὰς ἐφίςαται τῇ Βάσει. κ. 467.

Κῶνος δὲ σκαληνὸς, ἤτοι πλάγιος, οὗ ὁ ἄξων αβ ἐφεςὼς ἐςι τῇ Βάσει μὴ πρὸς ὀρθάς.

Γεννᾶσθαι δὲ ἔτι νοεῖται ὁ ὀρθὸς Κῶνος ὑπὸ Τριγώνυ ὀρθογωνίυ τοῦ γβα, τοῦ περὶ τὴν ἑτέραν (αβ) τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχυσῶν Πλευρῶν περιαγομένυ.

Ἐὰν περὶ δύω Κύκλυς ἴσυς τε καὶ παράλληλυς (γλ, ξπ), Εὐθεῖα μὴ πεπερασμένη (ἡ γξζ) περιαχθῇ, ἕως οὗ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπανέλθοι, ὅθεν κινεῖσθαι τὴν ἀρχὴν ἤρξατο, οὕτως ὡςε κινυμένη, ἑαυτῇ τε καὶ τῇ ἐπιζευγνυούσῃ τὰ τῶν Κύκλων κέντρα Εὐθείᾳ βα παράλληλος ἀεὶ εἶναι, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῆς Εὐθείας (γξζ) περιγραφομένη, ἐπιφάνεια καλεῖται Κυλινδρικὴ, τὸ δὲ Γ'. κ. 468.

ὑπὸ ταύτης τῆς ἐπιφανείας, καὶ τῶν δισσῶν κυκλικῶν Βάσεων περιειλημμένον στερεὸν, Κύλινδρος.

Βάσεις τοῦ Κυλίνδρου εἰσὶν οἱ Κύκλοι (γλ, ξπ).

Ἄξων δὲ τοῦ Κυλίνδρου ἡ Εὐθεῖα (αβ), ἡ τὰ Κέντρα ἐπιζευγνύουσα.

Πλευρὰ δὲ τοῦ Κυλίνδρου ἡ Εὐθεῖα (ξγ), ἡ ἐν τῇ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ οὖσα, καὶ τῆς διττῆς Βάσεως ἁπτομένη.

Κύλινδρος δὲ ὀρθός ἐστιν, ἐὰν ὁ ἄξων ἐπὶ τὴς βάσεως πρὸς ὀρθὰς ᾖ.

Κύλινδρος δὲ σκαληνὸς, ἐὰν ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν βάσιν μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ.

Γεννᾶται δὲ ὁ Κύλινδρος ὁ ὀρθὸς ὑπὸ Ὀρθογωνίου (ξγβα), τοῦ περὶ τὴν μίαν τῶν ἐν αὐτῷ Πλευρῶν (αβ) περιαγομένου.

κ. 469. Δ'. Κῶνοι καὶ Κύλινδροι ὅμοιοι εἰσὶν, ὧν οἱ ἄξονες ακ, ψξ, καὶ αἱ τῶν βάσεων Διάμετροι βζ, πρ ἀνάλογον εἰσὶν, ὥστε οἱ ἄξονες ἐπὶ τῶν βάσεων ἤτοι ὀρθοί εἰσὶν, ἢ ἐπίσης ἐγκεκλιμένοι.

Ε'. Σφαῖρα ἐστὶ στερεὸν ὑπὸ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας περιειλημμένον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ ἀπότινος τῶν ἐντὸς Σημείου ἀγόμεναι Εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Τὸ δὲ ἐντὸς ἐκεῖνο σημεῖον Κέντρον καλεῖται.

Σφαίρας δὲ Διάμετρος, ἡ διὰ τοῦ Κέντρου ἀγομένη καὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν ἑκατέρωθεν περατουμένη.

Γεννᾶται δὲ ἡ Σφαῖρα, ἡμικυκλίου περὶ τὴν Διάμετρον αὐτοῦ μένουσαν ἀγομένου.

ς'. Μεγέθη δὲ εἰς Σχήματα ἄττα ἐγγράφεσθαι, ἢ περιγράφεσθαι λέγεται, τουτέστι Σχήματα ἐλάσσονα ἢ μείζονα, εἰς σχῆμάτι ἀποτελουτᾶν λέγεται, ἐὰν τοῦ εἰς ὃ ἀπολήγει ἐγγραφόμενα ἢ περιγραφόμενα, ποσότητι τέως, οἱασοῦν δοθείσης ἐλάσσονι, διαφέρειν ἔχωσι.

Ἐὰν οὖν τὰ εἴς τι ἐγγραφόμενα ἐλλείπῃ ἐκείνου, ἐλλείψει οἱασοῦν δοθείσης ἐλάσσονι, τὰ ἐγγραφόμενα εἰς ἐκεῖνο ἀπολήγειν εἰρήσεται· καὶ ἐὰν τὰ περιγραφόμενα ὑπερβάλλῃ ἐκεῖνο ὑπεροχῇ, οἱασοῦν ὁμοίως δοθείσης ἐλάσσονι, τὰ περιγραφόμενα ὡσαύτως εἰς αὐτὸ ἐκεῖνο ἀποτελουτᾶν εἰρήσεται.

κ 470. Ζ'. Ἐὰν γένηται Τρίγωνον τὸ βαγ ἐν Ἡμικυκλίῳ βδλγ, ἐπὶ δὲ τῶν Πλευρῶν βα, αγ, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, ἡμικύκλια ἐλάσσονα καταγραφῇ τὰ βνα, αμγ, τὰ καμπυλόγραμμα τῶν Σχημάτων βδαν, αλγμ, τὰ ἐκτὸς μὲν ὑπὸ τῆς Ἡμιπεριφερείας τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, ἐντὸς δὲ ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μείζονος περατούμενα, ἀπὸ τοῦ ἐξευρόντος αὐτὰ, Μηνίσκοι σύζυγοι Ἱπποκράτους τοῦ Χίου κατονομάζονται.

Ἐὰν τὰ τόξα βδα, αλγ ἴσα ᾖ, τεταρτημόρια δηλονότι τῆς τοῦ μείζο-

νος Κύκλȣ Περιφερείας τυγχάνοντα, καλείσθωσαν οἱ τοιοίδε Μηνίσκοι τεταρτημοριοί.

Ἐὰν ἡ Εὐθεῖα ση ἀγομένη, τὰ τȣ̃ τεταρτημοριοῦ Μηνίσκȣ τόξα ἀνάλογον τέμνῃ κατὰ τὰ Σημεῖα ε ȣ̃ η, ὥςε εἶναι τὸ τόξον βε πρὸς τὸ τόξον εα, ὡς τὸ τόξον βη πρὸς τὸ τόξον ηα, καλείσθων τὰ ἐμβαδὸν αεη, βεη, ἀπόμοιραι τȣ̃ Μηνίσκȣ τȣ̃ τεταρτημοριοῦ.

Τȣ̃ Μηνίσκȣ, ἢ τȣ̃ αὐτȣ̃ Τετραγώνȣ ἀπόμοιρα λέγεται, ἐὰν ταύτῃ ἴσον εὐθύγραμμον Σχῆμα συςαθῆναι ἔχῃ. Η'.

Πρότασις Α.

„Τὰ ἐν τοῖς Κύκλοις ὅμοια Πολύγωνα πρὸς ἄλληλα ἐςὶν, ὡς τὰ ἀ- „πὸ τῶν Διαμέτρων (αζ, ιγ) Τετράγωνα, ȣ̃ δὴ ȣ̃ τὰ ἀπὸ τῶν Ἡμιδια- „μέτρων (αψ, ιχ), τȣτέςι τὰ τοιαῦτα Πολύγωνα, ἐν διπλασίονι λόγῳ „εἰσὶ τῶν Διαμέτρων, ἢ τῶν Ἡμιδιαμέτρων τῶν Κύκλων, ἐν οἷς ἐκεῖνα εἰσί. κ. 471.

Ἀχθήτωσαν αἱ αξ, ζβ, ιρ, λγ· ἐπεὶ οὖν τὰ Πολύγωνα ὑποτίθεται ὅμοια, ἴσαι ἔσονται (1) αἱ ὑπὸ ξβα, ρλι, ȣ̃ αἱ Πλευραὶ ξβ, βα, ταῖς Πλευραῖς ρλ, λι ἀνάλογον· ὥςε ἐπὶ τῶν Τριγώνων ξαβ, ριλ, αἱ (2) πρὸς τοῖς ξ ȣ̃ ρ σημείοις Γωνίαι ἴσαι εἰσίν· ἄρα ȣ̃ αἱ ὑπὸ βζα ȣ̃ λγι, αἱ ταῖς αὐταῖς Περιφερείαις βα, λι βεβηκεῖαι, ἴσαι (3) εἰσίν· Αἱ δὲ ὑπὸ ζβα, γλι, ἐν τοῖς Ἡμικυκλίοις εἰσὶ, καὶ ἑπομένως (4) ὀρθαὶ ȣ̃ ἴσαι· ἄρα ȣ̃ αἱ λοιπαὶ ὑπὸ βαζ, λιγ (5) ȣ̃ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἰσογώνια ἄρα ὄντα τὰ Τρίγωνα ζαβ, γιλ, ἔςαι (6) ȣ̃ ὅμοια· Ἤδη δὲ ἐπεὶ (ἐξ ὑποθ.) τὰ Πολύγωνα ὅμοια ἐςὶν, ἔςαι αὐτὰ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ διπλασίονι (7) τȣ̃ λόγȣ τῶν Πλευρῶν βα, λι, ὥςε διὰ τὰ δειχθέντα, ἐν διπλασίονι λόγῳ τȣ̃ τῶν Διαμέτρων αζ, ιγ, καὶ ἑπομένως ȣ̃ (8) τῶν Ἡμιδιαμέτρων. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Αἱ τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Πολυγώνων Περίμετροι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ Διάμετροι. Α'.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐδείχθη αβ : λι : : αζ : ιγ, ȣ̃ ξβ ἔςαι πρὸς ρλ : : αζ : ιγ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων Πλευρῶν ὁμοίως. Καὶ τοίνυν (9) πᾶσαι ἅμα αἱ

(1) Ὁρ. Α. τȣ̃ ς'. (2) ς. τȣ̃ ς'. (3) ΚΑ. τȣ̃ ȣ̃'. (4) ΛΑ. τȣ̃ γ'. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'. (6) Δ. τȣ̃ ς'. (7) Κ. τȣ̃ ς'. (8) ΙΕ. τȣ̃ ε'. (9) ΙΒ. τȣ̃ ε'.

πλευραὶ πρὸς πάσας ἅμα, τετέςι Περίμετρος πρὸς Περίμετρον, ἔσονται ὡς αζ πρὸς ιγ.

β. Τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Εὐθυγράμμων, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν Κύκλων Διάμετροι.

Λῆμμα.

„Τὰ ἐν τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον ἀποτελευτᾷ.

κ. 472. Ἐγγραφήτω Τετράγωνον τὸ αγβδ, καὶ ἐγγραφὲν, ἐπεὶ ἡμίσεια (1) ἐςὶ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ περὶ τὸν Κύκλον, μεῖζον ἔςαι δήπȣ τῆς ἡμισείας τȣ̃ Κύκλȣ· καὶ εἰ τοίνυν αὐτὸ ἀπὸ τȣ̃ Κύκλȣ ἀφαιρεθείη, πλέον τι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Εἶτα ȣ τῶν τόξων δίχα τετμημένων κατὰ ε, κ, ι, θ, ἐγγραφήτω Ὀκτάγωνον, καὶ κατὰ τὸ ε ἁπτέσθω τȣ̃ Κύκλȣ ἡ ζη, ȣ πρὸς αὐτὴν προεκβαλλόμεναι προσπιπτέτωσαν αἱ βγ ȣ δα, κατὰ τὰ Σημεῖα η ȣ ζ· καὶ ἔςαι δὴ τὸ γζ παραλληλόγραμμον (2), ἒ ἐπεὶ τὸ Τρίγωνον γεα (3) ἡμίσεια ἐςὶν, ἔςαι αὐτὸ πλέον τι τῆς ἡμισείας τȣ̃ τμήματος γεα· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ȣ τὰ Τρίγωνα ακδ, διβ, κξ: τῶν κατ' αὐτὰ τμημάτων, πλέον τι τῆς ἡμισείας εἰσὶν ἕκαςον μὲν ἑκάςȣ, πάντα δὲ πάντων· καὶ τῶν ἄρα Τριγώνων ἀπὸ τῶν τμημάτων ἐκείνων, ταυτὸν δ' εἰπεῖν ἀπὸ τȣ̃ λοιπȣ̃ τȣ̃ Κύκλȣ ἀφαιρεθέντων, πλέον τι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Παραπλησίῳ δὲ τῷ λόγῳ, ȣ εἴπερ ἐφεξῆς τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα ἐγγραφείη, διπλῷ τῷ ἀριθμῷ τῶν Γωνιῶν πληθυνόμενα, ἀπὸ τȣ̃ λοιπȣ̃ τȣ̃ Κύκλȣ, ὑπὲρ τὴν ἡμίσειαν ἀεὶ ἀφαιρεῖσθαι ἀποδειχθήσεται· καὶ ἔςαι ἄρα τελευταῖον τὸ λοιπὸν (4) παντὸς τȣ̃ δοθέντος ἔλαττον. Ἔνθεντοι τὰ ἐγγραφόμενα Πολύγωνα ἐλλείψει τȣ̃ Κύκλȣ, πηλικότητι οἱασῆν δοθείσης ἐλάσσονι· ὅπερ ἐςιν, εἰς τὸν Κύκλον τέως ἀποτελευτήσȣσι (5). Ο. Ε. Δ.

Μεθόδῳ δὲ ȣδὲν τῆς ἐκτεθείσης διαφερȣ́σῃ ἔχοι ἂν ἀποδειχθῆναι, ὅτι ȣ τὰ εἰς τὸν Κύκλον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς αὐτὸν ἐκεῖνον τέως ȣ ἀπολήξȣσιν· ἐπεὶ μέντοι ȣ τόδε πρὸς τοῖς ἄλλοις, ȣ δὴ ȣ τὸ προληφθὲν Λῆμμα ȣχ ἧττον, ἐν τῇ Γ'. Προτάσει τῶν ἀρχιμηδείων Θεωρημάτων διείληπται, περιττὸν ἐνταῦθα περὶ τȣ́τȣ τὸ πλείω ὑποσυνάψαι ἐκρίναμεν.

Πρότασις Β.

„Οἱ Κύκλοι πρὸς ἀλλήλȣς εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων Τετρά-

(1) Σχόλ. ς. ȣ Ζ. τȣ̃ δ'. (2) Πόρ. ΚΖ. ΚΗ. ȣ ΚΘ τȣ̃ γ'. (3) ΜΑ. τȣ̃ α'. (4) Δῆλον ἐκ τȣ̃ Α. Λήμμ. τȣ̃ Σχολ. τȣ̃ μετὰ τὴν ΙΑ. τȣ̃ ς'. (5) Ὅρ. ς. τȣ̃ ιβ'.

„γωνα, ἢ ὡς ἂν τοῦτ' αὐτὸ ἰσοδυνάμως ἐξείποις, ὁ τῶν Κύκλων λόγος διπλασίων ἐςὶ τοῦ τῶν Διαμέτρων.

Τῶν ὁμοίων Πολυγώνων τῶν εἰς τοὺς Κύκλους ἀεὶ καὶ ἀεὶ ἐγγραφομένων, ὁ λόγος διπλασίων ἐςὶ (1) τοῦ τῶν Διαμέτρων, τὰ δ' ὅτως ἐγγραφόμενα τοῖς Κύκλοις Πολύγωνα, εἰς αὐτοὺς τέως (2) καὶ ἀπολήγουσιν· ἄρα (διὰ τὸ ἑπόμενον καθόλου Πόρισμα) καὶ ὁ τῶν Κύκλων λόγος τοῦ τῶν Διαμέτρων διπλασίων ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα καθόλου.

„Εἰ τὰ ἐν δυσί τισι Σχήμασιν (Α, Β) ἐγγραφόμενα εἰς αὐτὰ τέως „καὶ ἀπολήγουσιν, ὃν ἂν λόγον ἔχοιε πρὸς ἄλληλα τὰ ἐγγραφόμενα, τὸν „αὐτὸν τοῦτον ἕξει καὶ τὰ ἐν οἷς Σχήματα.

Ἔςω λόγος Χ πρὸς Ψ, ὃν τὰ ἐγγραφόμενα ἀεὶ ἔχει πρὸς ἄλληλα. Εἰμὴ τοίνυν ὁ τῶν σχημάτων Α, Β λόγος ὁ αὐτός ἐςι τῷ Χ πρὸς Ψ, ὃν ἀεὶ ἔχει τὰ τοῖς σχήμασιν ἐγγραφόμενα, ἔςω δὴ Α'. ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β, μείζων τοῦ λόγου Χ πρὸς Ψ· καὶ ἄλλη τις ἄρα Πηλικότης ἡ Ρ ἐλάσσων ἴσα τοῦ σχήματος Α, ἔςαι πρὸς τὸ σχῆμα Β ὡς Χ πρὸς Ψ· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐγγραφόμενα (ἐξ ὑποθ.) εἰς τὰ Α καὶ Β ἀπολήγουσι τελευτῶντα, ἔσονταί τινα τοῖς Α καὶ Β σχήμασιν ἐγγραφόμενα, ἅτινα ἂν τούτων ἐλλείποι (3) ἐλάσσονι πηλικότητι, ἢ τὸ Ρ ἐλλεῖπον ἐςὶ τοῦ Σχήματος Α. Ἔςωσαν οὖν ἐκεῖνα Γ καὶ Ζ· τοιγαροῦν τὸ Γ μεῖζον ἔςαι τοῦ Ρ· καὶ δὴ τὸ Γ ἔςαι πρὸς τὸ Β, ἐν λόγῳ μείζονι (4) ἢ τὸ Ρ πρὸς τὸ Β, τουτέςι (καθάπερ ἐτίθετο) ἢ τὸ Χ πρὸς τὸ Ψ, ἤτοι (διὰ τὴν ὑπόθ.) τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ· Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἐν μείζονι λόγῳ ἐςὶν ἢ πρὸς τὸ Ζ, ἔςαι τὸ Β σχῆμα ἔλαττον τοῦ αὐτῷ (5) ἐγγραφομένου Ζ, τὸ ὅλον τοῦ ἰδίου μέρους. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος Β πρὸς Α, μείζων ἂν ἂν εἴη τοῦ Ψ πρὸς Χ, (τουτέςιν ὅτι (6) ἀδύνατον εἶναι τὸν λόγον Α πρὸς Β ἐλάσσονα τοῦ λόγου Χ πρὸς Ψ)· ὁ ἄρα λόγος Α πρὸς Β, ἴσος ἐςὶ τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ. Ο. Ε. Δ.

Ρ
ΑΒΧΨ
ΓΖ

Παραπλησίᾳ δὲ τῇ μεθόδῳ ἀποδειχθήσεται, καὶ Σχήματα δύω τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν, ὃν ἀεὶ ἔχει τὰ περιγραφόμενα, καὶ εἰς ἐκεῖνα τέως ἀπολήγοντα· οὕτως

(1) Α. τοῦ ιβ'. (2) Διὰ τὸ Λῆμ. (3) Ο'ρ. ς'. τοῦ ιβ'. (4) Η. τοῦ ε'. (5) Ι. τοῦ ε'. (6) Κς τοῦ ε'.

Γ Z
Α Β Χ Ψ
Ρ

Ἔςω ὁ λόγος Χ πρὸς Ψ, ὃν τὰ περιγραφόμενα ἀεὶ ἔχει πρὸς ἄλληλα· Εἰ μὴ οὖν ὁ λόγος τῶν σχημάτων Α πρὸς Β, ὁ αὐτός ἐςι τῷ Χ πρὸς Ψ, ὃν ἀεὶ ἔχειν νοεῖται τὰ εἰς τὰ σχήματα περιγραφόμενα, ἔςω ὁ λόγος Α πρὸς Β πρῶτον μείζων τοῦ λόγου Χ πρὸς Ψ· Καὶ ἔςαι τοίνυν τὸ Α πρὸς ἄλλο τι Μέγεθος τὸ Ρ, ὃ μεῖζον εἴη ἐκείνου, ὡς Χ πρὸς Ψ· καὶ ἐπειδὴ τὰ περιγραφόμενα καθ' ὑπόθ. εἰς τὰ σχήματα Α καὶ Β ἀπολήγοντα τελευτᾷ, ἔσονταί τινα τοῖς σχήμασιν Α καὶ Β περιγραφόμενα, ἅτινα αὐτὰ ὑπερέχει πηλικότητι (1) ἐλάσσονι, ἧς τὸ Ρ ὑπερέχει τὸ σχῆμα Β· Ἔςω γοῦν ἐκεῖνα τὰ Γ καὶ Ζ, καὶ τὸ ἄρα Ζ ἔλαττον ἔςαι τοῦ Ρ· ὥςε (2) ὁ λόγος Α πρὸς Ζ, μείζων ἔςαι τοῦ λόγου Α πρὸς Ρ, τουτέςι τοῦ λόγου Χ πρὸς Ψ, ἤτοι Γ πρὸς Ζ. Ἐπειδὴ τοιγαροῦν ὁ λόγος Α πρὸς Ζ, μείζων ἐςὶ τοῦ λόγου Γ πρὸς Ζ, τὸ σχῆμα Α μεῖζον (3) ἔςαι τοῦ εἰς αὐτὸ περιγραφομένου Γ, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς Β μείζων ἂν εἴη τοῦ λόγου Χ πρὸς Ψ· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸν λόγον Β πρὸς Α, μὴ εἶναι τοῦ Ψ πρὸς Χ μείζονα, καὶ ἑπομένως (4) τὸν λόγον Α πρὸς Β, μὴ ἐλάσσονα εἶναι τοῦ λόγου Χ πρὸς Ψ. Εἴπερ τοίνυν ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς Β, οὐδὲ μείζων ἐςὶν, οὐδ' ἐλάσσων τοῦ λόγου Χ πρὸς Ψ, ἔςαι αὐτῷ ἴσος. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα τῆς Β'.
Προτάσεως.

Α'. Ὡς οὖν Κύκλος πρὸς Κύκλον, οὕτω Πολύγωνον τὸ ἐν ἐκείνῳ πρὸς Πολύγωνον τὸ ἐν τούτῳ, ἑκάτερα γὰρ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων εἰσὶ τῶν Κύκλων.

Β'. Ἔτι οἱ Κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν οἰκείων (5) Ἡμιδιαμέτρων, τουτέςιν (6) ὡς τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων.

Γ'. Καὶ τῶν Κύκλων δὲ, ὧν αἱ Διάμετροι, ἢ αἱ Ἡμιδιάμετροι δῆλαι, ἐνταῦθεν ὁ λόγος ἐπιγνωσθήσεται, τῇ εὑρέσει δηλονότι (7) τῆς ἐπὶ τῶν δοθεισῶν Διαμέτρων τρίτης ἀνάλογον, πρὸς ἣν ἡ τοῦ Α'. Κύκλου Διάμετρος τὸν αὐτὸν (8) ἕξει λόγον, ὃν ὁ Α'. αὐτὸς Κύκλος πρὸς τὸν Β'. Οἷον ἔςω δὴ ἡ τοῦ Α' Κύκλου Διάμετρος ποδ. 4, ἡ δὲ τοῦ Β'. ποδ. 6, καὶ ἐπεὶ 4, 6, 9 συνεχῶς ἀνάλογον (9) εἰσὶν, ἔςαι ὁ Α'. Κύκλος πρὸς τὸν Β'., ὡς 4 πρὸς 9.

---

(1) Ὁρ. ς. τοῦ ιβ'. (2) Η. τοῦ ε'. (3) Ι. τοῦ ε'. (4) Κς. τοῦ ε'. (5) ΙΕ. καὶ ΛΔ. τοῦ ε'. (6) Σχόλιον μετὰ τὴν Κ. τοῦ ς'. (7) ΙΔ. τοῦ ς'. (8) Διὰ ταύτ. καὶ τὸν Ι. Ὁρ. τοῦ ε'. (9) Γ. Πόρ. τῆς ΙΖ. τοῦ ς'.

Ἐντεῦθεν δέ τοι καὶ τὸν τυχόντα Κύκλον, κατὰ λόγον τὸν δοθέντα αὔξειν, ἢ μειῶν ἐξέσται, ὡς ἀνωτέρω (1) σεσημείωται. Οἷον προκείσθω δὴ Κύκλον καταγράψειν, ὃς ἂν εἴη διπλάσιος τοῦ δοθέντος πενταπλάσιος· ἔστω δέ τοι ἡ τοῦ δοθέντος Ἡμιδιάμετρος αβ· Ταύτης οὖν μεταξὺ καὶ τῆς Εὐθείας βγ, ἥτις ἂν εἴη πενταπλασίων τῆς αβ, εὑρεθήτω δὴ μέση ἀνάλογος ἡ βχ· Ὁ τοίνυν Κύκλος, ὃς ἂν Διαστήματι τῷ κατὰ τὴν βχ καταγραφείη, ἔσται τοῦ δοθέντος Κύκλου πενταπλάσιος. Δ.

Ἐὰν τέτταρες εὐθεῖαι ὦσιν ἀνάλογον, τὰ εὐθύγραμμα τῶν Σχημάτων τὰ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀπὸ τῶν δύω προτέρων, τοῖς ἐπὶ τῶν δύω ὑστέρων, ὡς ἐπὶ διαμέτρων ἢ ἡμιδιαμέτρων Κύκλοις ἀνάλογον εἰσί. Τῶν γὰρ δοθεισῶν ἀνάλογον ὐσῶν, καὶ δὴ καὶ τῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων, καὶ τῶν Κύκλων (2) ἐν λόγῳ ὄντων διπλασίονι τοῦ λόγου τοῦ τῶν αὐτῶν Εὐθειῶν, ἔσονται δήπου καὶ τὰ Εὐθύγραμμα (3) τοῖς Κύκλοις ἀνάλογον. Ε.

Ἔτι δὲ ἀνάπαλιν, ἐὰν Σχήματα δύω εὐθύγραμμα ὅμοια δυσὶ Κύκλοις ἀνάλογον ᾖ, ἔσονται αἱ τῶν Εὐθυγράμμων ὁμόλογοι πλευραὶ ταῖς τῶν Κύκλων διαμέτροις ἀνάλογον· Ἐπειδὴ γὰρ οἱ τῶν Σχημάτων, καὶ τῶν Κύκλων λόγοι ἴσοι ἀλλήλοις τυγχάνουσι, διπλασίονες (4) ὄντες τῶν λόγων, οὓς ἔχουσιν αἵτε ὁμόλογοι πλευραὶ, καὶ αἱ διάμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἔσονται δὴ (5) καὶ οἱ λόγοι ὅτοι ἀλλήλοις ἴσοι. ς'.

Ἔνθεντοι ἐὰν τῷ δοθέντι Κύκλῳ Α ἴσον Τετράγωνον δοθῇ τὸ Π, εὑρεθήσεται Τετράγωνον ἕτερον τὸ Χ, ὅπερ ἂν ἑτέρῳ ὁτῳοῦν Κύκλῳ Γ ἴσον εἴη. Ἐπειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. Α πρὸς Π, ὡς Γ πρὸς Χ, ἔσται καὶ ἐναλλὰξ Α : Γ : : Π : Χ· καὶ ἑπομένως (6) ἡ Ἡμιδιάμετρος τοῦ Κύκλου Α πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον τοῦ Γ, ὡς ἡ Πλευρὰ τοῦ Τετραγώνου Π πρὸς τὴν τοῦ Χ. Ἐπεὶ δὲ αἱ τῶν Κύκλων Ἡμιδιάμετροι, καὶ ἡ τοῦ Τετραγώνου Π Πλευρὰ δέδονται, εὑρεθήσεται δὴ (7) ἡ Πλευρὰ τοῦ Τετραγώνου Χ, καὶ ἑπομένως (8) καὶ αὐτὸ τὸ Χ Τετράγωνον. Τὸ δ' ἐν τῷ δε τῷ Πορίσματι περὶ τῶν Τετραγώνων ῥηθὲν, τὸ αὐτὸ καὶ περὶ ὁποιωνῶν ἄλλων σχημάτων ἀλλήλοις ὁμοίων (9) εἰρημένον ἔστω. ζ'.

Ὁ ἐπὶ τῆς Ὑποτεινούσης αβ τοῦ ὀρθογωνίου Τριγώνου αβγ Κύκλος, ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ Κύκλοις, τοῖς ἐπὶ τῶν αγ, βγ Πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν· Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ, ἐπὶ τὴν Ὑποτείνουσαν κά- Η. κ. 473.

(1) Ὅρα Δ. Πόρ. τῆς Κ. τοῦ ς'. (2) Κ. τοῦ ς'. καὶ Β. τοῦ ιβ'. (3) ΛΔ. τοῦ ε'. (4) Κ. τοῦ ς'. καὶ Β. τοῦ μβ. (5) ΛΕ. τοῦ ε'. (6) Διὰ τὸ Ε. Πόρ. (7) ΙΒ. τοῦ ς'. (8) Μς. τοῦ α'. (9) ΙΒ. καὶ Ι. τοῦ ς'.

θετος κατενεχθῇ ἡ γξ, ἔσονται αβ, αγ, αξ (1) ∺, καὶ ὡσαύτως αβ, γβ, βξ (2) ∺, ὥστε ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος πρὸς τοὺς ἐπὶ αγ, γβ, ὡς ὁ (3) ἐπὶ αβ πρὸς τοὺς αξ, βξ· καὶ ἑπομένως ὁ Κύκλος ὁ ἐπὶ αβ (4) πρὸς τοὺς λοιποὺς Κύκλους ἅμα ληφθέντας, ἐστὶν ὡς αβ πρὸς $αξ + ξβ$· ἐπεὶ δὲ $αβ = αξ + ξβ$, ἔσται καὶ ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος δυσὶ τοῖς λοιποῖς ἅμα ληφθεῖσιν ἴσος.

Θ΄. Εὔθεντοι δοθεισῶν τῶν Διαμέτρων κύκλων ὡντινωνοῦν, ῥάδιον ἐστὶ τό,τε ἄθροισμα, καὶ τὴν διαφορὰν τῶν Κύκλων ἀποδοῦναι, τουτέστι Κύκλον εὑρεῖν, ὃς ἂν ὁποσοιτοῦν πλήθει τε καὶ μεγέθει δοθεῖσι Κύκλοις ἴσος ᾖ, ἢ γοῦν Κύκλον καταγράψαι, οὗ τὸ ἐμβαδὸν τῇ ὡντινωνοῦν ἀνίσων Κύκλων διαφορᾷ ἴσον εἴη· τῇ αὐτῇ ἐκείνῃ δηλονότι μεθόδῳ, δι᾽ ἧς τῶν Τετραγώνων τό,τε ἄθροισμα, καὶ ἡ διαφορὰ παρίσταται, ἐν τῷ Σχολίῳ τῆς ΜΖ΄. Προτ. τοῦ Α΄. Βιβλίου· πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ΄. τοῦ Α΄., ληπτέον τὸ Η΄. Πόρ. τῆς Β΄. τοῦ ΙΒ΄.

κ. 474. Ι΄. Κἀντεῦθεν καὶ τὸν τῶν συζύγων Μηνίσκων τετραγωνισμὸν, ὃν πρῶτος Ἱπποκράτης ὁ Χῖος διδάξας φέρεται, δυνατὸν λαβεῖν· ἔστω γὰρ γαβ Τρίγ. ὀρθογών., καὶ βαγ Ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς Διαμέτρου βγ, καὶ βνα Ἡμικύκλ. ἐπὶ τῆς αβ, καὶ αμγ ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἔσται τοίνυν τὸ Ἡμικύκλ. βαγ, τοῖς Ἡμικυκλ. βνα καὶ αμγ (5) ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον. Ἐὰν οὖν τὸ ἀμφοτέρωστε κοινὸν χωρίον ἀφαιρεθῇ, τουτέστι τὰ Τμήματα βα, αγ, ὑπολειφθήσονται οἱ δύο Μηνίσκοι βνα, αμγ, οἱ ὑπὸ τῶν κυκλικῶν γραμμῶν περατούμενοι, τῷ εὐθυγράμμῳ Τριγώνῳ βαγ ἴσοι. Ἐὰν δὲ ἡ βα Εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ αγ, τουτέστιν ἐὰν ὦσιν οἱ Μηνίσκοι τεταρτημορικοὶ, ἀχθείσης καθέτου τῆς αξ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν βγ, ἔσται τὸ μὲν βαξ Τρίγωνον ἴσον τῷ Μηνίσκῳ βνα, τὸ δὲ γξα ἴσον τῷ Μηνίσκῳ γμα. Ο. Ε. Ε.

Σχόλιον Α΄.

κ. 475. Τὰ τῶν Κύκλων ὅμοια Τμήματα αβξ, ιλρ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων, καὶ δὴ καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Εὐθειῶν αξ, ιρ, αἳ τὰ τῶν Τμημάτων ὑποτείνουσι τόξα. Τῶν γὰρ τόξων αβξ, ιλρ, δίχα τμηθέντων κατὰ τὰ β καὶ λ, ἐπιζευχθεισῶν τε τῶν αβ, βξ, καὶ ιλ, λρ, διὰ τὰ διχοτομηθέντα τόξα, αἱ ὑποτείνουσαι (6) ἔσονται ἴσαι, τουτέστιν $αβ = ξβ$, καὶ $ιλ = ρλ$, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ αβξ (7) $= ιλρ$· ὥστε τὰ Τρίγωνα (8) αβξ, ιλρ ὅ-

---

(1) Δ. Πόρ. τῆς Η. τοῦ ϛ΄. (2) Αὐτ. (3) Διὰ ταύτ. τὴν Πρότ. καὶ Ὅρ. Ι. τοῦ ε΄. (4) ΚΔ. τοῦ ε΄. (5) Η. Πόρ. ταύτ. (6) ΚΖ. τοῦ γ΄. (7) Β. Πόρ. τῆς ΛΓ. τοῦ ϛ΄. (8) ϛ. τοῦ ϛ΄.

μοια ἐςίν· ἑπομένως δὲ (1) ἐν λόγῳ διπλασίονι εἰσὶ τῶν Πλευρῶν αβ καὶ ιλ, ἡ γῶν (2) τῶν διαμέτρων αζ, ιγ, τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις, ἡ καὶ τῶν ὑποτεινουσῶν αξ, ιρ. Τῷ δὲ συνεχεῖ τῶν τόξων αβ, βξ, καὶ ιλ, λρ διχασμῷ, πολύγωνα Σχήματα ὅμοια ἀεὶ ἐγγραφήσεται τοῖς τμήμασι, καὶ ἐπὶ βάσεων τῶν αὐτῶν αξ, ιρ, ἃ τέως εἰς αὐτὰ τὰ τόξα ἀπολήγει· Τοιγαρῶν καὶ τὰ τόξα αὐτὰ (3) αβξ, ιλρ εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων αζ, ιγ, ἡ τῶν ὑποτεινουσῶν αξ, ιρ. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον Β'.

Τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν ἑπτωνῶν μὲν συζύγων Μηνίσκων ἅμα, τῶν δὲ τεταρτημορικῶν καὶ χωρὶς, ἐν τῷ Γ'. Πορίσματι ὑποτεθέντος, ἐξέςω δὴ καὶ ἄλλ' ἄττα περὶ τοῦ τεταρτημορικοῦ Μηνίσκου, περί τε τοῦ τετραγωνισμοῦ τῆς ἀπομοίρας τοῦ αὐτοῦ, καὶ περὶ τῆς μεθόδου τῆς κατατομῆς αὐτοῦ, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ὑποσυνάψαι.

Πληρούσθω ὁ τοῦ τεταρτημορικοῦ Μηνίσκου ἐλάσσων Κύκλος, καὶ τούτου ἡ Περιφέρεια διελεύσεται διὰ τοῦ Κέντρου ξ τοῦ μείζονος Κύκλου. Ἐὰν οὖν κατὰ τὸ ἐξώτερον τοῦ Μηνίσκου τόξον βνα, λιφθῇ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ξε, αὕτη τεμεῖ τὰ τοῦ Μηνίσκου ἑκάτερα τόξα ἀνάλογον, κατὰ τὰ σημεῖα ε καὶ δ, καὶ διὰ τοῦτο τὸν Μηνίσκον τεμεῖ κατὰ διττὴν ἀπόμοιραν (4) τὴν μὲν αεδ, τὴν δὲ βεδ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ βξε Γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ μὲν τοῦ μείζονος κύκλου ἐςὶ, πρὸς δὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐλάσσονος, τὸ τόξον βε (5) ἔςαι δὶς τοσούτων μοιρῶν, ὅσων τὸ βδ· καὶ ἑπομένως ἡ Ἡμιπεριφέρεια βεα ἐςὶ πρὸς τὸ τεταρτημόριον βδα, ὡς τὸ τόξον βε πρὸς τὸ τόξον βδ, τουτέςιν (6) ὡς τόξον εα πρὸς τόξον δα· καὶ ἐναλλὰξ τόξον βε πρὸς τόξον εα, ὡς τόξον βδ πρὸς τόξον δα. Α'. κ. 476.

Ἐὰν τὰ τόξα εβ, εα ἴσα ᾖ, τουτέςιν ἐὰν τὸ σημεῖον ε συμπέσῃ τῷ ν, τῷ μεσαιτάτῳ σημείῳ τοῦ ἡμικυκλίου βνα, αἱ εὐθεῖαι νβ, να ἐπιζευγνύμεναι, πληρώσουσι τὸ Τετράγωνον ναξβ, τὸ εἰς τὸν ἐλάσσονα κύκλον ἐγγεγραμμένον, τοῦ δὲ μείζονος Κύκλου ἐφάψονται κατὰ τὰ σημεῖα α καὶ β. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ βνα Ἡμιπεριφέρεια τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ ν, ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι νβ, να, τεταρτημορικῶν τόξων ὑποτείνουσαι, ἤτοι (7) πλευ- Β'. κ. 477.

(1) ΙΘ. τοῦ ς'. (2) Β. Πόρ. τῆς Α. τοῦ ιβ'. (3) Διὰ τὸ καθόλου Πόρισμα. (4) Ὅρ. Ζ. τοῦ ιβ'. (5) Ἔπεται ἐκ τοῦ Δ. Πορίσμ. τῆς Ε. Προτ. τοῦ δ'. (6) Ις. καὶ Ζ. τοῦ ε'. (7) ς. τοῦ δ'.

ραὶ τȣ̃ Τετραγώνȣ, ὃ ἐν τῷ ἐλάσσονι κύκλῳ δύναται ἐγγραφῆναι· διὰ δὲ τὰς ἴσας τȣ̃ μείζονος κύκλȣ ἡμιδιαμέτρȣς βξ, αξ, ἔσονται ϗ αὗται αἱ ἡμιδιάμετροι ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ βξα, αἱ λοιπαὶ δύο τȣ̃ Τετραγώνȣ πλευραὶ, τȣ̃ ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ δυναμένȣ ἐγγράφεσθαι. Ἐπεὶ δὲ ἅπαν Τετράγωνον (1) ἐςὶν ὀρθογώνιον, αἱ ὑπὸ νβξ, ναξ ὀρθαὶ ἔσονται, καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι νβ, να, τȣ̃ μείζονος Κύκλȣ (2) ἐφάψονται.

Γ'. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα εβ, εα (ὅρα τὸ Σχ. τȣ̃ Α'. Πορ.) ἄνισα ᾖ, ϗ αἱ ὑποτείνȣσαι εβ, εα ἄνισοι ἔσονται· ϗ ἐὰν μὲν ἡ εα μείζων ᾖ τῆς εβ, διὰ τὴν ὑπὸ βεα τὴν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν ἴσαν, ἡ ὑπὸ εβα (3) ἡμισείας ὀρθῆς μείζων ἔςαι, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ ἡμισείας ὀρθῆς ἐλάσσων. Ἔνθεντοι ἡ ὑπὸ εαξ (τȣτέςιν ἡ ὑπὸ εαβ ἡμισείᾳ ὀρθῆς τῇ βαξ ἐπαυξηθεῖσα) ἔςαι ὀρθῆς ἐλάσσων· καὶ τοίνυν ἡ εα τεμεῖ πȣ τὸ τεταρτημοριχὸν τόξον βδα τȣ̃ μείζονος Κύκλȣ (4), οἷον κατὰ τὸ η.

Δ'. Ἐπιζευχθεῖσα οὖν ἡ Εὐθεῖα βη, αὕτη τȣ̃ ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ βεη βάσις ἡ αὐτὴ, ϗ τȣ̃ βδη τόξȣ ὑποτείνȣσα ἔςαι, ὡς δῆλον· αἱ δὲ ὑπὸ εηβ, εβη ἔσονται ἴσαι, τȣτέςιν ἑκατέρα ἡμίσεια ὀρθῆς· διὰ γὰρ τὰς ὑπὸ αηβ, εηβ, τὰς (5) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, ϗ τὴν ὑπὸ αηβ τὴν ἐν τῷ τεταρτημοριχῷ τμήματι (6) ἡμιόλειον ἓσαν ὀρθῆς, ἔςαι ἡ ὑπὸ εηβ ἡμίσεια ὀρθῆς, καὶ διὰ τὴν ὑπὸ ηεβ ὀρθὴν τυγχάνȣσαν, ἔςαι (7) ϗ ἡ ὑπὸ εβη ἡμίσεια ϗ αὐτὴ ὀρθῆς.

Ε'. Ἡ Βάσις βη τȣ̃ ὀρθογωνίȣ ἰσοσκελȣ̃ς Τριγώνȣ εβη, ὑπὸ τῆς εξ εὐθείας δίχατȣ ϗ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται· ἡ γὰρ ὑπὸ βεξ τȣ̃ ἐπὶ τȣ̃ τεταρτημοριχοῦ τόξȣ βξ τȣ̃ ἐλάσσονος Κύκλȣ (8) ἡμίσειά ἐςιν ὀρθῆς· διὸ ἡ ὑπὸ βεη ὀρθὴ ὑπὸ τῆς εὐθείας βξ δίχα τέμνεται. Ἀλλὰ γὰρ ἡ ὑπὸ βεη ἐςὶν ἡ τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς κατὰ κορυφὴν Γωνία, ταύτητοι ἡ ἐκείνην διχοτομȣ̃σα Εὐθεῖα (9), ἡ αὐτὴ ϗ τὴν Βάσιν βη κατὰ τὸ ζ δίχα τεμεῖ, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς δὲ ϗ κάθετος ἔςαι.

ς'. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα βζε, ηζε, ἀλλήλαις τε ϗ τῷ ὅλῳ βεη, ϗ δὴ ϗ τῷ βξα Τριγώνῳ ὅμοια ἐςὶν· ἅπαντα γάρ ἐςι Τρίγωνα ὀρθογώνιά τε ϗ ἰσοσκελῆ, οἷα Τετραγώνων ἡμίση.

Ζ'. Ἐπειδὴ ἡ βζ ἐπὶ τῆς δξ (ἥτις τȣ̃ μείζονος κύκλȣ ἡμιδιάμετρος τυγχάνει) πρὸς ὀρθὰς ἐςὶν, ἔςαι (10) αὕτη ὀρθὸν Ἡμίτονον τȣ̃ τόξȣ βδ, ϗ ἑπομένως (11) ἡ διπλάσιος τῆς βζ, ἤτοι ἡ βη, ἔςαι ὑποτείνȣσα τȣ̃ διπλασίȣ τό-

(1) Ὅρ. ΛΒ. τȣ̃ α'. (2) Ις. τȣ̃ γ'. (3) ΙΗ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'. (4) Ις. τȣ̃ γ'. (5) ΙΓ. τȣ̃ α'· (6) Α. Πόρ. τῆς Η. ϗ τῆς Θ. τȣ̃ δ'. (7) ς. Πόρ τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'. (8) Α. Πόρ. τῆς Η. ϗ τῆς Θ. τȣ̃ δ'. (9) Ἀριθ. Γ. τȣ̃ Σχολίȣ τῆς Κς. τȣ̃ α'. (10) Ὅρ. Ι. τȣ̃ γ'. (11) Πόρ. τῆς Λ. τȣ̃ γ'.

ξε τῆ βδ, τετέςι τῆ βδη. Ἀνωτέρω δὲ (ἐν ἀριθμ. Α΄.) ἐδείκνυτο, ὅτι τὸ βε τόξον τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ, δὶς τοσούτων μοιρῶν ἐςιν, ὅσων τὸ βδ τὸ ἐν τῷ μείζονι. Τὸ ἄρα βδη τόξον (τὸ διπλάσ. δηλον. τῆ βδ), ὅμοιόν ἐςι (1) τῷ τόξῳ βε, καὶ τὸ Τμῆμα βη, ὅμοιον τῷ Τμήματι βε.

Η΄ δὲ τῆ Μηνίσκε ἀπόμοιρα βεδ, ἴση ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ βεζ· Τὰ γὰρ ὅμοια Τμήματα βε, βη εἰσὶν (2) ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν Διαμέτρων βα, βγ· τετέςιν (3) ὡς 1 : πρὸς 2· ἔνθεντοι ἡ ἡμίσεια τῆ Τμήματος βδζ τῷ τμήματι βε ἴση ἔςαι. Ἐὰν τοίνυν ἀπὸ τῆς βεδ ἀπομοίρας ἀφαιρεθῇ τὸ Τμῆμα βε, ᾧ τὸ τάτῳ ἴσον, προςεθῇ ἡ τῆ Τμήματος ἡμίσειε βδζ, συςήσεται Τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ βεζ τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ ἴσον, ᾧ ἑπομένως (4) τετραγωνίζεται ἡ ἀπόμοιρα βεδ τῆ τεταρτημοριαῖ Μηνίσκε. Η΄

„Τὸν τεταρτημοριαῖον Μηνίσκον αδβν, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (οἷον „τὸν φπ πρὸς πρ) εἰς ἀπομοίρας διελεῖν τὰς αεδ, βεδ, ἑκατέρας τε τῶν „μερίδων τὸν τετραγωνιςμὸν ἀποδεῖναι. Θ΄

Η΄ Διάμετρος αβ τῆ ἐλάσσονος Ἡμικυκλίε αεβ, διαιρείσθω (5) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ ι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυκλίῳ, ἀπὸ τῆ σημείε ι ἀνιςάσθω τῇ Διαμέτρῳ βα κάθετος ἡ ιε, ἀπὸ δὲ τῆ ε ἐπὶ τὸ ξ, ὃ Κέντρον ἐςὶ τῆ μείζονος Κύκλε, ἐπιζευχθεῖσα ἡ εξ, κατατεμεῖ τὸν Μηνίσκον ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ· τὰ γὰρ ὅμοια Τρίγωνα (6) βαξ, βεζ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι (7) λόγῳ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αβ, βε, τετέςι (διὰ τὰς αβ, βε, βι ∺ (8)) ὡς (9) αβ : βι· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ιξ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ (10) ἔςαι τὸ βαξ Τρίγωνον πρὸς τὸ Τρίγωνον βιξ, διὰ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ πρὸς τὸ ξ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Τρίγωνον βαξ, πρὸς ἑκάτερον τῶν Τριγώνων βεζ, βιξ τὸν αὐτὸν (11) ἔχει λόγον, ἔςαι τὸ Τρίγων. (12) βιξ = τῷ Τριγ. βεζ = (13) τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ· ἀλλ' ὅλος ὁ Μηνίσκος τῷ Τριγώνῳ βαξ (14) ἴσος ἐςὶ, ᾧ ἄτως ἡ ἀπόμοιρα εαδ τῷ Τριγώνῳ (15) αιξ ἴσοῦται· τὸ δέ τοι Τρίγωνον αιξ πρὸς τὸ Τρίγωνον βιξ (16), ὡς αι πρὸς βι, τετέςιν ὡς φπ πρὸς πρ. Ο΄ ἄρα Μηνίσκος ὁ τεταρτημοριαῖος ἐν τῷ δοθέντι διατέμνεται λόγῳ, ᾧ ἄλλῳ τρόπῳ ὁ τῆς μερίδος βεδ τετραγωνισμὸς

(1) Ὅρ. Δ. τῆ ς΄. (2) Σχόλ. τῆς Α. τῆ παρ. (3) Διὰ τὸ Σχόλ. τῆς Κ. τῆ ς΄., ᾧ τὸ Α. Πόρ. τῆς ΜΖ. τῆ α΄. (4) Η. Ὅρ. τῆ ιβ΄. (5) Θ. τῆ ς΄. (6) Ἀρ. ς. τῆς παρ. (7) ΙΘ. τῆ ς΄. (8) Β. Πόρ. Η. τῆ ς΄. (9) Ι. Ὅρ. τῆ ε΄. (10) Α. τῆ ς. (11) ΙΑ. τῆ ε΄. (12) Θ. τῆ ε΄. (13) Ἀριθ. Η. τῆ παρ. (14) Πόρ. Ι. ταύτ. (15) Ἀξ. Γ. τῆ α΄. (16) Α. τῆ ς΄.

ἀποδέδοται. Ὅθεν δὴ τὴν αὐτὴν μερίδα καὶ τῷ Τριγώνῳ βιξ, καὶ δὴ καὶ τὴν μερίδα τὴν ἑτέραν αεδ τῷ τριγώνῳ αιξ ἴσην τυγχάνειν, δῆλον ἐγένετο, καὶ δίδοται ἄρα ἀμφοῖν τῶν μερίδων ὁ τετραγωνισμός.

κ. 478. Ι'. Ἀμφοῖν δὲ τῶν Κύκλων πληρωθέντων αβγ καὶ αξβν, ἀχθήτω πρὸς τὴν Διάμετρον τοῦ ἐλάσσονος αβ, παράλληλος ἡ Διάμετρος τοῦ μείζονος εζ, καὶ ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἑτέρα αὖθις Διάμετρος τοῦ αὐτοῦ μείζονος Κύκλου ἡ γδ, ἥτις προεκβληθεῖσα, τόν τε Μηνίσκον ανβ δίχα τεμεῖ εἰς τὰς μερίδας ανδ καὶ βνδ, τὰς ἀλλήλαις ἴσας, καὶ τὸ Τρίγωνον αξβ εἰς δύω ἴσα Τρίγωνα τὰ αθξ, βθξ, τὰ τῷ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις ὅμοια· Φημὶ δὴ ὅτι τοῦ μηνοειδοῦς χωρίου αηξιβεγζα τὰ κέρατα αηξζ καὶ βιξε, τοῖς τριγώνοις αθξ, βθξ, καὶ (1) ἑπομένως ταῖς τοῦ τεταρτημορικοῦ Μηνίσκου μερίσιν ανδ, βνδ, ἴσα εἰσὶν ἑκάτερον ἑκατέρῳ. Ἐπειδὴ γὰρ αβ^{T} = (2) αξ^{T} + βξ^{T} = 2 αξ^{T}, ἔσται (3) τὸ Τμῆμα αδβ τοῦ Τμήματος αηξ διπλοῦν, τὸ δ' ἥμισυ ἐκείνου αδθ ἴσον τῷ Τμήματι αηξ· τὰ δὲ ἐὰν ἀπὸ τῶν ὀκτημορίων τοῦ μείζονος κύκλου ἀφαιρεθῇ, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ αξδ καὶ αξζ, καταλειφθήσεται ἴσα τὰ αθξ καὶ αηξζ· ὁμοίως δὲ δείξω ὅτι καὶ τὸ βθξ = βιξε· καὶ τετραγωνίζεται ἄρα τὰ τοῦ ῥηθέντος μηνοειδοῦς χωρίου κέρατα αηξζ καὶ βιξε.

ΙΑ'. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ πληρώσθω τὸ Τετράγωνον βναξ· καὶ Κέντρῳ τῷ ν, Διαστήματι δὲ τῷ νβ, ἢ τῷ να = (4) ξβ ἢ ξα, γεγράφθω Τόξον τεταρτημορικὸν τὸ βλα, καὶ ἔστι βλαξ Μηνίσκος τεταρτημορικὸς, τῷ Μηνίσκῳ βναδ ὅμοιός τε καὶ ἴσος· ἔνθεντοι καὶ τῷ Τριγώνῳ βνα ἢ βξα (5) ἐξισωθήσεται· Ἀλλὰ τὰ κέρατα βιξε καὶ αηξζ ἅμα ληφθέντα, τῷ αὐτῷ Τριγώνῳ (6) συνεξισοῦται· τὸ ἄρα μικτόγραμμον χωρίον βλαζε, τῷ διττῷ Τριγώνῳ βξα, ταυτὸν εἰπεῖν τῷ Τετραγώνῳ βναξ, ἴσον ἐστί.

Πρότασις Γ. καὶ Δ.

Δυσεξοδικαί τε εἰσὶ καὶ τοῖς Νεανίσκοις δυσχερεῖς, καὶ πρὸς οὐδὲν εὔχρηστοῦσαι, ἢ πρὸς τὸ δι' αὐτῶν τὴν Ε'. ἀποδειχθῆναι, ἣν αὐτοὶ καὶ τούτων ἄνευ πολλῷ ῥᾴδιον ἀποδείξομεν.

---

(1) Ἀριθ. Θ. τοῦ παρόντ. Σχολ. (2) ΜΖ. τοῦ α'. (3) Διὰ τὸ Α. Σχόλ. ταύτ. καὶ Σχόλ. τῆς Κ. τοῦ ς'. (4) Ὁρ. ΛΒ. τοῦ α'. (5) Ι. Πόρ. ταύτ. (6) Ἀριθ. Γ'.

Πρὸς τὴν Ε΄. Πρότασιν.

Λῆμμα Α΄.

„Ἐὰν δύο Πυραμίδες τριγωνικαὶ, ἐπιπέδοις τμηθῶσι (τοῖς ξσε, ρχψ) „πρὸς τὰς βάσεις (αβγ, ιυπ) παραλλήλοις, ἀνάλογον (κατὰ ε ϗ ψ); ἔ- „σονται (ξσε, ρχψ) πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις (αγβ, ιπυ). κ. 479.

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ξσε, αβγ παράλληλα εἰσὶ, τέμνονται δὲ ὑπὸ ἐπιπέδων βζγ, αζβ, αζγ, ἔσονται αἱ κοιναὶ τομαὶ σε, βγ, ϗ ξσ, αβ, ϗ ξε, αγ (1) παράλληλοι· Ἄρα αἱ ὑπὸ ξσε, αβγ, ϗ σξε, βαγ, ϗ ξεσ, αγβ, ἑκάςη ἑκάςῃ (2) ἴσαι εἰσί· διὸ αἱ τομαὶ ξσε, αβγ, εἰσὶν (3) ὅμοιαι· τὸν αὐτὸν τρόπον ὁμοίως εἶναι δείξω ϗ τὰς τομὰς ρχψ, ιυπ· Ὥςε ὁ λόγος τῆς τομῆς αβγ πρὸς τὴν ξσε, διπλασίων (4) ἐςὶ τοῦ λόγου τῆς πλευρᾶς βγ πρὸς τὴν πλευρὰν σε, καὶ ὁ λόγος τῆς τομῆς ιυπ πρὸς τὴν ρχψ, διπλασίων ἐςὶ τοῦ λόγου τῶν Πλευρῶν υπ πρὸς χψ· Ἀλλ' οἱ λόγοι βγ : σε, ϗ υπ : χψ, οἱ αὐτοὶ εἰσὶν (ἔςι γὰρ βγ : σε : : γζ : εζ (5), τουτέςιν ἐξ ὑποθ. ὡς πλ πρὸς ψλ, ἤτοι (6) ὡς υπ πρὸς ψχ), τοιγαροῦν ὁ λόγος αβγ πρὸς ξσε (7) ὁ αὐτός ἐςι τῷ λόγῳ ιυπ πρὸς ρχψ. Ο. Ε. Δ.

Λῆμμα Β΄.

„Τὰ ἐν τῇ Πυραμίδι (ψγαζ) τρίγωνον ἐχούσῃ τὴν βάσιν εἰς ἄπειρον ἐγ- „γραφόμενα Πρίσματα, εἰς αὐτὴν τὴν Πυραμίδα ἀποτελευτᾷ. κ. 480.

Διαιρεθήτω ἡ τῆς Πυραμίδος πλευρὰ εἰς ὁσαοῦν μέρη ἴσα ἀλλήλοις αβ, βη, ηζ· διὰ δὲ β ϗ η, γενομένων τῶν τομῶν βεπ ϗ ηθν τῇ βάσει ψαγ παραλλήλων, ἐγγεγραμμένα νοείσθω τῇ Πυραμίδι Πρίσματα τριγωνικὰ τὰ βεπ μαξ καὶ ηθνκβφ, ὧν ἔξω τῆς Πυραμίδος προεκβληθέντων, νοείσθω περὶ τὴν Πυραμίδα περιγεγραμμένα Πρίσματα γιβα, πχηβ, νθζη· Ὑπεροχαὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα, εἰσὶ τὰ ςερεὰ ιμ, χκ, θη, ἅπερ ἅμα ληφθέντα ἴσα ἐςὶ τῷ Πρίσματι γιβα· καὶ γὰρ τὸ μὲν ηθ = δβ (8), ϗ ἑπομένως θη + χκ = πχηβ, τουτέςι (9) μεβα· τὰ ἄρα τρία θη + χκ + ιμ = γιβα. Ἐὰν οὖν ἡ αζ Πλευρὰ εἰς ἄπειρον διαιρεθῇ, ϗ ὁ τῶν Πρισμάτων ἀριθμὸς ἐπ' ἄπειρον πληθυνθῇ, ἡ αβ γενήσεται (10) οἱασοῦν δοθείσης ἐλάσ-

(1) Ιε. τοῦ ια΄. (2) Ι. τοῦ ια΄. (3) Δ. τοῦ ς΄. (4) ΙΘ. τοῦ ς΄. (5) Λ. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ ς΄. (6) Δύτ. (7) ΛΔ. τοῦ ε΄. (8) ΚΕ. τοῦ ια΄. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) Ἐκ τοῦ Β. Λήμ. τοῦ Σχολ. μετὰ τὴν ΙΑ. τοῦ ς΄.

σων· ἄρα καὶ τὸ Πρίσμα γιβα γενήσεται τέως παντὸς τοῦ δοθέντος ἔλαττον (1). Τῶν ἄρα περιγεγραμμένων Πρισμάτων (πολλῷ δὲ μᾶλλον τῆς Πυραμίδος ψγαζ, ἥτις μέρος ἴσα ἐστὶ τῶν περὶ αὐτὴν περιγραφομένων Πρισμάτων) ἡ ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα, γενήσεται παντὸς δοθέντος ἐλάσσων· καὶ ἑπομένως τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα εἰς αὐτὴν τέως (2) τὴν Πυραμίδα ἀποτελευτῶντα λήξουσιν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ε.

κ. 431. „Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὖσαι Πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι Βάσεις, „πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις (απρ, εσχ).

Κείσθω δὴ τὰ ἴσα ὕψη τῶν Πυραμίδων εἶναι τὰ αφ, εψ, ὧν εἰς μέρη ἴσα μεγέθει τε καὶ πλήθει τμηθέντων, καὶ διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, γενομένων τομῶν παραλλήλων ταῖς Βάσεσι, νοείσθω ἑκατέρᾳ τῶν Πυραμίδων Πρίσματα ἐγγεγράφθαι τριγωνικὰ ἰσοπλευρά τε, καὶ ἰσοϋψῆ· Ἤδη μὲν οὖν ἐπεὶ τὰ Πρίσματα λα, ιε, ἰσοϋψῆ ὄντα ἐστὶν, ἔστι τὸ λα Πρίσμα πρὸς τὸ ιε, ὡς Βάσις (3) λξβ πρὸς Βάσιν ιυκ, τουτέστιν (4) ὡς Βάσις πρα πρὸς Βάσιν σχε· Τὸν αὐτὸν τρόπον δείξω ἕκαστα τῶν Πρισμάτων τῶν ἐν τῇ Πυραμίδι πφαρ ἐγγεγραμμένων, εἶναι πρὸς ἕκαστα τῶν ἐν τῇ σψεχ, ὡς ἡ Βάσις παρ πρὸς τὴν Βάσιν σεχ· Ἄρα (5) καὶ ἅμα πάντα πρὸς ἅμα πάντα, ὡς Βάσις πρὸς Βάσιν· καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ (6) ἀπολήγει τέως εἰς αὐτὰς τὰς Πυραμίδας, ἔσονται καὶ αὐταὶ (7) ὡς αἱ Βάσεις. Ο. Ε. Δ.

Ἡ μὲν οὖν ἀποδοθεῖσα δεῖξις ὑποτίθησι τὰς αφ καὶ εψ Πλευρὰς ἴσας ὔσας, αὐτὰ τῶν Πυραμίδων τὰ ὕψη παρισᾶν, καὶ ἑπομένως ταῖς Βάσεσι παρ, σεχ εἶναι ὀρθάς· Τὰ ἴσα δὲ ἡ δεῖξις αὐτὴ δυνήσεται, καὶ ὅπως ἂν ἔχειν πλαγιασμοῦ πρὸς τὰς Βάσεις αἱ ἴσαι Πλευραὶ ὑποτεθεῖεν, νοουμένων δηλονότι ἀφ' ἑκατέρας τῶν κορυφῶν φ καὶ ψ καθέτων ἐπὶ τὰς βάσεις, καὶ τούτων εἰς ἴσα πλήθει τε καὶ μεγέθει τεμνομένων, καὶ διὰ τῶν διαιρέσεων ἐπιπέδων ἀγομένων παραλλήλων ταῖς Βάσεσιν, ἃ δὴ καὶ τὰς Εὐθείας φα, ψε διατεμοῦσιν (8) εἰς μέρη τοῖς ἐν ταῖς Καθέτοις ὅμοιά τε, καὶ ἰσάριθμα· καὶ ἄττα καὶ Βάσεις Πρισμάτων γεννήσονται ἰσαρίθμων τε καὶ ἰσοϋψῶν, τῶν ἐν ἑκατέρᾳ τῇ Πυραμίδι ἐγγεγραμμένων· διὸ δὴ καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ τῆς δείξεως προελεύσεται, ὡς εἴπερ αἱ Εὐθεῖαι φα, ψε, ταῖς Βάσεσι παρ, σεχ κάθετοι εἶεν.

---

(1) Δῆλον ἐκ τῆς ΚΕ. τοῦ ιά. (2) Ὁρ. ς. τοῦ ιβ. (3) Α. Πόρ. τῆς. ΛΔ. τοῦ ιά. (4) Λῆμ. Α'. (5) ΙΒ. τοῦ ε'. (6) Διὰ τὸ Λῆμ. (7) Καθόλου Πόρισμ. μετὰ τὴν Β. τοῦ ιβ. (8) ΙΖ. τοῦ ια'.