

ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σιμείας λ., τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ βέβη δύο Εὔθειαι πρὸς ὄρθας οὐκ ἀναπήσονται, ἔρχεται δὲ τοῦ Εὔθεια, ἵτις μόνη ἀπὸ τῆς λ. Σιμείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ξεβ πρὸς ὄρθας ἀχθῆναι δύναται, πεσεῖται (1) ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τοιᾶς χρ.

Πρότασις ΙΔ.

κε. 435.

„Πρὸς ἀπίπεδα (2η, λπ) ἡ αὐτὴ Εὔθεια (αβ) ὄρθη ἐστι, παράλληλα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα.

Ἐπὶ θατέρων τῶν ἐπιπέδων ζητοῦσιν τὸ τυχόν γ, καὶ δὲ αὐτῶν ἀχθῆντω γε παράλληλος πρὸς τὴν αβ, ἀπαντῶσα τῷ ἐπιπέδῳ λπ κατὰ τὸ ε. Εἰςαὶ γενὴ γε (2) ὄρθη πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ζητεῖ λπ. ΕἼναι δὲ ἐπιζευχθῶσιν αἱ Εὔθειαι αγ, βε, ἔσονται αἱ Γωνίαι αἱ β (3) ὄρθαι. ἔρχεται αἱ αγ, βε (4) παράλληλοι εἰσὶ, τὸ δὲ αγεβ Παραλληλόγραμμον, οὐ δὲ γε, ἵτις ἐδείχθη πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ὄρθη ἔσται, ιση ἐστὶ (5) τῇ αβ. Ωσαύτως δεῖξω, καὶ ὅσαι ἂν ἀχθῶσι πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα Ορθαί, ἀπάσις ισαὶ εἶναι. Τοιγαρεν (6) τὰ ἐπίπεδα εἰσὶ παράλληλα. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΕ.

κε. 436.

„Ἐὰν δύο Εὔθειαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων (βα, γα), παρὰ δύο Εὔθειας, ἀπτομέναις ἀλλήλων (εδ, ζδ) παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ζηταὶ, παράλληλα ἐστὶ τὰ δὲ αὐτῶν ἐπίπεδα.

Αἴπὸ τῆς αὐτῆς αἱ ὄρθη πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον (7), ἀγέθωσαν δὲ καὶ αἱ ηδ, οἱ παράλληλοι πρὸς τὰς δε, δζ· καὶ ἔσονται αἱ αὐταὶ παράλληλοι (8) καὶ πρὸς τὰς αβ, αγ· Εἴπειδη τοίνυν αἱ ὑπὸ ιη, ιη εἰσὶν (9) Ορθαί, ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ γαη (10) βαη Ορθαί· Ήτο γαταὶ οὐ πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον ὄρθη ἔσται, καὶ πρὸς τὸ βγ (11) ὄρθη ἐστι· Τὰ ἔρχα βγ, εζ° (12) ἐπίπεδα παράλληλα ἐσίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ιζ.

κε. 437.

„Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (αβ, γδ) ὑπὸ ἐπιπέδων τινὸς τέμνηται, (τῆς εθζη), αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ (εδ, ηζ) παράλληλοι εἰσὶ.

(1) Εἴκ κατασκ. (2) Η. τῆς ια'. (3) Γ. Ορισμ. τῆς ια'. (4) ΚΘ. τῆς α'. (5) ΠΔ. τῆς α'. (6) Η. Ορισμ. τῆς ια'. (7) ΙΔ. τῆς ια'. (8) Θ. τῆς ια'. (9) Γ. Ορισ. τῆς ια'. (10) ΚΖ. τῆς α'. (11) Δ. τῆς ια'. (12) Διὰ τὴν ἀνατ.

Α' οὐκέτι, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπίπεδῳ τῷ τέμνοντι γίγνεται, συμπεσθεῖται κατά της συμμείου τὸ ι (1). Ως δὲ ἐπειδὴ σλαβεῖται, γηι εἰσὶν (2) ἐν τοῖς ἐπίπεδοις αβ· γδ προεκβληθεῖται, καὶ τάγας ἐπίπεδα προεκβληθέντα συμπεσθεῖται κατὰ τὸ ι· ὅπερ ἄτοπον ἔστιν, ἀτε κατὰ τὸ Η. τῶν Ορίσμῶν τῷ παρόντος φερόμενον.

Σ χ ó λ : ο υ .

Εάν δούτων ἐπίπεδων αζ, βζ, αἱ μετὰ τρίτων ἐπίπεδων τῇ αε κοινᾷ τομαὶ αδ, βε ωσι παράλληλοι, γίγνεται καὶ δὶ ἀλλήλων τῶν αζ, βζ κοινὴ τομὴ γζ ταῖς αδ, βε παράλληλος. Τεμνέονται γάρ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἐπίπεδοις παραλλήλοις τοῖς αβγ, δεζ, ζη ἕσονται (3) αβ, βγ, γα, ταῖς δε, εζ, ζδ παραλλήλοις τῶν τριῶν ἑκάστη ἑκάστη· ὡς (4) ή ὑπὸ αβγ = δεζ, η βχγ = εδζ· Αλλὰ γάρ (διὰ τὸ Παραλλήλογραμμον αε) αβ = δε (5), τοιγχρεῖ (6) βγ = εζ, η γα = ζδ· Παραλλήλοις δὲ τυγχάνειν τὰς βγ, εζ, η τὰς γα, ζδ φεύγειν ἐδείχθη, ἀρα (7) ή γζ η ταῖς αδ η βε παραλλήλοις ἔστι.

Πρότασις ΙΖ.

„Εάν δύω Εὐθεῖαι βδ, ηδ ὑπὸ παραλλήλων ἐπίπεδων τέμνονται, εἰς ι. 439. „τὰς αὐτὰς λόγιες τυγχάνουσιν.

„Αλλήλωσαν ἐν τοῖς ἐπίπεδοις φέντε το, αἱ Εὐθεῖαι βη, ηδ, ηγ ἐπεξύγιαν ή βδ διηκνεσσα διὰ τῷ ἐπίπεδῳ ρσ κατὰ τὸ ζ, ἐπεξύγιαν δε ηγ αἱ ζγ, ζη. Τὸ γάν διὰ τῷ Τριγώνῳ βδ δὲ ἐπίπεδον τέμνον τὰ παράλληλα τῶν ἐπίπεδων, κοινὰς τριμέτρες ποιεῖται τὰς ζγ, δδ (8) παραλλήλοις· ὡς ε βγ : γδ : βδ : ζδ (9). Πάλιν τὸ Τριγώνον βηδ τέμνον τὰ παραλλήλα τῶν ἐπίπεδων, τομὰς ποιεῖται (10) τὰς βη, ζη παραλλήλοις· ἀρα ηι : ιδ : : βζ : ζδ (11), τυτέσιν (ώς δέδεικται) ως βγ : γδ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΗ.

„Εάν Εὐθεῖαι (ζε) ἐπίπεδη τινὶ (αβ) πρὸς ὄρθας η, καὶ πάντα τὰ ι. 440. „δὶ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπίπεδῳ (αβ) πρὸς ὄρθας γίγνεται.

Αγέοδω διὰ τῆς ζε ἐπίπεδου, οἷον τὸ ηγ, κοινὴν ἔχον τομὴν μετὰ τῆς αβ τὴν γδ· ἐν αὐτῷ δὲ ἀλλήλωσαν κάθετοι πρὸς τὴν γδ κοινὴν το-

(1) Α. Πόρ. μετὰ τὴν ΑΑ τῷ α'. (2) Α. τῷ ια'. (3) Διὰ ταύτην. (4) Ι. τῷ ια'.
(5) ΑΔ. τῷ α'. (6) Αε. τῷ α'. (7) ΑΓ. τῷ α'. (8) Διὰ τὴν ανατ. (9) Β. τῷ ζ'.
(10) Διὰ τὴν ανατ. (11) Β. τῷ ζ'.

μήν αἱ καὶ ἐπεὶ ή ἡ (1) ὁρθή ἐστι πρὸς τὴν γῆν, ἔσονται αἱ καὶ (2) παράλιοι πρὸς τὴν γῆν τίθεται δὲ ή ἡ γῆ ὁρθή εἶναι τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ἀλλα
καὶ αἱ καὶ ὁρθαὶ (3) εἰσὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ὡς τὸ ἐπίπεδον γη (4) τῷ ἐπι-
πέδῳ αβ ὁρθὸς ἐστι.

Πρότασις ΙΘ.

κ. 441.

, „Εὐαγδύο ἐπίπεδα (μζ, ηδ) τέμνοντα ἄλιλα, ἐπιπέδῳ τινὶ (αβ) πρὸς
,, ὁρθὰς ἔχεις οὐκέτι αὐτῶν τοιην (κλ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) πρὸς ὁρθὰς ἐσται.
Ἐπειδὴ τὸ μζ ἐπίπεδον ὁρθὴν ἔχει λαχὸν τὴν θέσιν ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ
αβ, δῆλον (5) ως ἀπὸ τῇ λα δυνατὸν Κάθετον ἀχθῆναι ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ,
ἐν ἐπιπέδῳ τῷ μζ, ὅτις ἂν ἀμέλει ἐν τῷ μζ ἐπιπέδῳ ἀχθεῖται, κάθετος εἴη
ἐπὶ τῆς κοινῆς τοιης εξ. Ωσαύτως δὲ διὰ τὸ ὁρθὸν τίθεσθαι καὶ τὸ ηδ τῷ
αβ (6) ἀχθεῖν ἂν καθι τῷ ηδ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τῇ αὐτῇ Συμεὼν λ., Κάθετος ἐπὶ^{τῷ}
τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ αβ· Α' οὐδὲ γάρ ἀπὸ τῇ λα Συμεὼν (7), μία ἂν
ἀχθεῖν μόνη ὁρθὴ τῷ αβ· Α' ὁ ἐπάναγκες τὴν ἀπὸ λ Ορθὴν τῷ αβ, ἐν
ἀμφοῖν εἶναι τοῖς ἐπιπέδοις τῷ τῷ μζ, καὶ τῷ ηδ, καὶ ταύτην εἶναι ἐπομένως τὴν
τέτων κοινῆν τοιην, τετέσι τὴν λα. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Κ.

κ. 442.

, „Εὖαγρες Ἀρνίτης (α) ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν περιέχεται (βαγρ,
„γαδ, δαβ), δύο δποιαιεν τῆς λοιπῆς μείζουνες εἰσὶ πάντη μεταλλαμβανόμεναι.
Ἐὰν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι ἴσαι ἄλιλας ὥστι, δῆλον τὸ εἰργμένον· Εὖαν δὲ ἄνι-
σοι, ἔσω δὴ μεγύει τέτων ή ὑπὸ βαδ, καὶ ἔσαι καὶ σύγτω δυεῖν τῶν λοιπῶν ἀ-
λάσσων ἀμα εἰλιημμένων. Α' φαιρεῖσθαι γάρ ἀπὸ τῆς μεγύεις ὑπὸ βαδ ή
ὑπὸ βαε iση τῇ ὑπὸ βαγ, γινέσθωσάν τε iσαι αἱ αγ, αε, διὰ δὲ τῇ επάν-
γέσθω Εὔθεικ, ἀπαντῶτα ταῖς αβ, αδ κατὰ τὰ β καὶ δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν
αἱ βγ, δγ· Καὶ ἐπεὶ (8) αἱ ὑπὸ βαδ, βαγ iσαι εἰσὶ, καὶ αἱ Πλευραὶ βα, αε
iσαι ταῖς Πλευραῖς βα, αγ, καὶ αἱ Βάσεις βε, βγ iσαι (9) ἔσονται καὶ αὐταί.
Α' οὐδὲ γάρ βγ, γδ μείζουνες (10) εἰσὶ τῆς βδ, ἀφαιρεῖσθων ἄρα τῶν iσων βε,
βγ, ή γδ μείζων τῆς εδ· Α' οὐδὲ αἱ Πλευραὶ εα, αδ, iσαι ταῖς Πλευραῖς (11)
γα, αδ· ἄρα ή ὑπὸ γαδ (12) μείζων τῆς ὑπὸ εαδ· Εὖδεχθη δὲ ή ὑπὸ βαγ

(1) Εἴ τοις. καὶ διὰ τὸν Γ. Ορεισμ. τῷ α. (2) ΚΘ. τῇ α. (3) Η. τῇ α. (4)
Δ. Πειπλ. τῇ α. (5) Ορ. Δ. τῇ α. (6) Διὰ τὸν αὐτ. (7) ΗΓ. τῇ α. (8) Εἰ τῇ
ταῖς. (9) Δ. τῇ α. (10) Κ. τῇ α. (11) Εἰ κατ. (12) ΛΒ. τῇ α.

ιση ἔτα τῇ ὑπὸ βασ. Αἱ δύω ἄρα ἀμα βαγ, γαδ, μείζονες εἰτὶ τῆς ὅλης ὑπὸ βαδ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΑ.

,, Απασα σερεὰ Γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων Ορθῶν περιέχεται.

Εἶσω Γωνία σερεὰν α, ταῖς δὲ Γωνίαις ταῖς ἐπιπέδοις ὑφ' ὧν αὐτὴ περιέχεται, υποτεινέσθωσαν αἱ Εὐθεῖαι βγ, γδ, δε, εζ, ζβ, ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἀπιπέδῳ αἱ πᾶσαι εἶναι υποτιθέμεναι. Τέττα οὖν γινομένη, Πυραμίς συστάθηται(1), ἡς ἡ Βάσις ἐσὶ τὸ Πολύγωνον βγδεζ, κορυφὴ δὲ ἡ α, πλευραὶ δὲ τοσαῦτα Τρίγωνα η, δ, ε, κ, λ, ὅσαι αἱ ἐπίπεδοι Γωνίαι αἱ συνιστῶσαι τὴν σερεάν α. Ηδη μὲν ὥν ἐπειδὴ αἱ δύω Γωνίαι ὑπὸ αβζ καὶ αγγ (2) μείζονες εἰτὶ τῆς ὑπὸ ζβγ, καὶ αἱ δύω αγβ, αγδ μείζονες τῆς ὑπὸ βγδ, καὶ ζτῶς ἐφεξῆς, ἔσονται τῶν Τριγώνων η, δ, ε, κ, λ, αἱ περὶ τὴν Βάσιν Γωνίαι ἀμα ληφθεῖται, ἀπασῶν ἀμα τῶν Γωνιῶν τῆς Βάσεως β, γ, δ, ε, ζ μείζονες. Α' ἂλλ' αἱ τῆς Βάσεως Γωνίαι συνάμα τέσσαρτην Ορθᾶς, δις τοσαύτης συναποτελῆσιν (3) Ορθὰς, ὅσαι εἰσὶν αἱ Πλευραὶ, ἢ (ἢ ταυτὸν ἐξιν) ὅσα τὰ Τρίγωνα. Αἳρα πᾶσαι αἱ τῶν Τριγώνων περὶ τὴν Βάσιν Γωνίαι συνάμα τέσσαρτην Ορθᾶς, συναποτελῆσιν Ορθὰς πλέον, ἢ δις τοσαύτας, ὅσα τὰ Τρίγωνα. Λ' ἂλλ' αἱ αὐταὶ Γωνίαι αἱ περὶ τὴν Βάσιν, συνάμα ταῖς Γωνίαις ὑφ' ὧν περιέχεται ἡ σερεὰ, συναποτελῆσι δις τοσαύτας Ορθᾶς (4), ὅσα τὰ Τρίγωνα. Αἱ ἄρα Γωνίαι ὑφ' ὧν ἡ σερεὰ Γωνία αἱ περιέχεται Ορθῶν τεσσάρων ἐλάσσουνες εἰσί. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς πρὸ αὐτῆς ἀπόχει τίσβαλεῖν, ὡς ἐκ τριῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν, αἱ ἀν ὁστιν Ορθῶν τεσσάρων ἐλάσσουνες, εἰ μόνον αἱ δύω τῆς λοιπῆς μείζονες ὥστι πάντη μεταλαμβανόμεναι, Γωνία σερεὰ συνίσαθαι δύναται.

Σχόλιον.

Ἐκ δὲ τῆς αὐτῆς ταύτης κατασκευάζεται καὶ τὸ διαβόητον Θεώρημα, ὅτι τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων κανονικῶν ὅντων καὶ ίσων, τρία μόνα εἴσιν ἀττα Σῶμα κανονικὸν περιέχειν δύνανται ἀμέλειτοι τῶν μὲν ίσοπλεύρων Τριγώ-

(1) Ορε Α. Ορ. τῇ ιβ'. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Β. Θεόρ. τῇ Σχολίᾳ τῇ μετὰ τὴν ΑΒ. τῇ α. (4) Διὰ τὴν ΑΒ. τῇ α.

ναυ, ἥτοι 4, ἥ 8, ἥ 20, τῶν δὲ Τετραγώνων 6, τῶν δὲ Πενταγώνων 12. ὡς πέντε μόνα ἀριθμεῖσθαι τὰ κανονικὰ Σώματα, οὐ Πυραμίδες οὐτὸς 4, τὸ Οκτάεδρον τὸ ὑπὸ 8, τὸ Εἰκοσάεδρον τὸ ὑπὸ 20 ίσοπλεύρων Τριγώνων περιεχόμενον, ὅτε Κύβος ὁ ὑπὸ Τετραγώνων 6, καὶ τὸ Δωδεκάεδρον τὸ ὑπὸ 12 Πενταγώνων ίσοπλεύρων τε καὶ ισογωνίων περιττάμενον. Οὗτοι δὲ Σώματα τεταγμένου τε κανονικὸν λέγεται τὸ ὑπὸ ἐπιπέδων κανονικῶν καὶ ἄλληλοις ίσων περιοριζόμενον, φαινόν.

Δεῖκν. Εἴ κανονικὸν ίσοπλεύρων Τριγώνων, Γωνία σερεὰ συσαρτῆναι ἔδυνται. Τρία γάρ ἐπὶ τέτω τελάχιστον (1) ἀπαιτεῖται.

Τὸ τριῶν οὖν ίσοπλεύρων Τριγώνων εἰς ἓν συμεῖον συνιόντων, Γωνία σερεὰ συνίσασθαι δύναται οὐ τῆς Πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων οὐ τῆς Οκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε οὐ τῆς Εἰκοσαέδρου, ἐπεὶ τῶν τε ίσοπλεύρων Τριγώνων Γωνιῶν, 3 λιθφθεῖσαι, καὶ 4, καὶ 5, ὁρθῶν τεσσάρων ἐλάσσονες εἰσὶν, οὓς ἐκ τῆς ΙΒ'. Πορίσματος τῆς ΛΒ'. τῆς Α'. συνάγεται.

Ἐπεὶ δέ τοι τρεῖς πενταγωνικαὶ Γωνίαι (2) τεσσάρων Ορθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ, Πεντάγωνα τρία εἰς ταυτὸ συνιόντα συμεῖον, Γωνίαν σερεὰν τὴν τετραγώνην συναποτελεῖν δύνανται.

Ως δὲ καὶ ὑπὸ τριῶν Τετραγώνων εἰς ἓν συμεῖον συνιόντων Γωνίαν κυβικὴν συσαρτῆναι δυνατὸν, καθ' αὐτὸ δῆλον. ὡς πέντε τὰ συνιζάμενα κανονικὰ Σώματα.

Οὗτοι δὲ παρὰ ταῦτα ἄλλο ἄν συσαρτεῖν κανονικὸν Σώμα, ἔτω δείκνυται.

Αἱ ἐξ τῆς ίσοπλεύρων Τριγώνων Γωνίαι συναποτελῆσι 4 Ορθίες, οὐ γάρ μία τριτημόρια δύο (3) Ορθίες, καὶ ἐκ τῆς ἀκολόθης αἱ ἐξ δυοκατέκα τριτημόρια Ορθίες δώσεται, ταυτὸν εἰπεῖν Ορθίας τέσσαρις. Τεύτητοι ὑπὸ ἐξ ίσοπλεύρων Τριγώνων Γωνία σερεὰ ἄν συσαρτεῖν· πολλῷ δὲ μᾶλλον ἐκ ἀν ἐκ πλειόνων.

Τὸ τεσσάρων Τετραγώνων Γωνίαν σερεὰν μή ἔχειν ἄν συσαρτῆναι καθ' αὐτὸ δῆλον, πολλῷ δὲ μᾶλλον μή ἐκ πλειόνων.

Γωνίαι πενταγωνικαὶ 4 Ορθῶν τεσσάρων μείζονες εἰσὶ, τέτων γάρ ἐκάστη ἐξ πεντημέριας δροθῆς (4) περιενήνοχε. Τὸ ἄρχ τεσσάρων Πενταγώνων Γωνία σερεὰ συσαρτῆναι ἀδυνατεῖ, πολλῷ δὲ μᾶλλον ὑπὸ πλειόνων.

Αὖτοι δὲ ἐξ ἄλλων ὅποιωνεν κανονικῶν Σχημάτων, Γωνία ἄν σερεάτις

(1) Ορ. I. τῆς τιμ. (2) Ως δῆλον ἐκ τῆς Α. Πόρ. τῆς ΙΑ. τῆς δ. (3) ΙΒ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τῆς α'. (4) Α. Πόρ. τῆς ΙΑ. τῆς δ.

συσαίη· Τρεῖς γάρ εἴξαγωνικαὶ Γωνίαι, τέσσαροιν Ορθαῖς ίσαι εἰσίν· ἡ γάρ μία τέσσαρα τριτημόρια Ορθᾶς περιείληφεν (1)· ὡς αἱ τρεῖς τριτημόρια. Ορθᾶς 12, ταυτὸν εἰπεῖν Ορθᾶς 4· Οὐκ ἄρα ἐκ τριῶν Εἴξαγώνων συσαίη ἄντις Γωνία σερβά· πολλῷ οὖν μᾶλλον ἐκ ἄντις πλειόνων.

Εἶπε δὲ αἱ τρεῖς εἴξαγωνικαὶ Γωνίαι· 4 Ορθαῖς ίσαι εἰσίν, αἱ τρεῖς ἄρα Γωνίαι ὅποιωνται ἄλλων Σχημάτων τῆς Εἴξαγώνς μειζόνων ὄντων, οἷον αἱ τρεῖς τῆς Επταγώνης, ἢ τῆς Οκταγώνης, καὶ ὁρθῶν τεσσάρων μείζουνες ἐστούται· Καὶ δῆλον ἄρα ὡς τῶν κανονικῶν Σχημάτων τὰ λοιπὰ πάντα, ἀνεπιτιθείως ἔχει πρός τὴν τῆς σερβᾶς Γωνίας σύσατιν, καὶ παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε ὅδεν ἄλλο Σῶμα κανονικὸν δοδήγεται.

Πρότασις ΚΒ.

„Εἳντις τρεῖς Γωνίαι ἐπίπεδοι (α , β , γ), ὅν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντη μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ίσαι Εὐθεῖαι· (αδ „ $=\alpha=\beta\zeta=\beta\eta=\gamma\delta=\gamma\iota$), δυνατὸν ἔσαι ἐκ τῶν ἐπιζευγνυθῶν ($\delta\theta$, „ $\zeta\eta$, $\delta\iota$) τὰς ίσας Εὐθείας Τρίγωνον συζήσασαι.

x. 444.

Εἲντις αἱ ἐπιζευγνύθσαι Εὐθεῖαι ίσαι ἄλληλαις ὥστιν, εὑδηλον ἔστιν ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον δυνατὸν εἶναι συζήσασθαι· Εἲντις δὲ ἄνισοι, καὶ τέτων μεγίζη μὲν ἡ δε ἐλάσσων εἴη τῶν λοιπῶν δύο $\zeta\eta + \delta\iota$, δυνατὸν καὶ ὅτις ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον (2) συζήσασθαι· Εἵσι δὲ ἐλάσσων· ἐπὶ γάρ τῆς γῆς συνεπάγεται Γωνία ἡ ὑπὸ $\zeta\eta$ ίση τῇ β , καὶ ἐξω γκ = γδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κδ, κι· διὰ γῆν τὰς κγ, γδ, αἱ ταῖς βζ, βη ισαὶ εἰσὶν ἐκατέρᾳ ἐκκατέρᾳ, καὶ τὴν ὑπὸ κγδ = β, ἐξαὶ (3) κδ = $\zeta\eta$. Εἶπε δὲ $\beta + \zeta\eta$, ταυτὸν εἰπεῖν ἡ ὑπὸ κγι· (4) μείζων τυγχάνει, (5) τῆς Γωνίας α , αἱ δὲ Πλευραὶ κγ, γι, ταῖς Πλευραῖς δα, αἱ ισαὶ εἰσὶν ἐκατέρᾳ ἐκατέρᾳ, ἄρα ἡ Βάσις καὶ τῆς Βάσεως δε μείζων (6) ὅτις ἐσίν· Αὖτα τὸ ἄθροισμα τῶν Πλευρῶν κδ + δι (ταῦται $\zeta\eta + \delta\iota$) μείζον ἐσὶ (7) τῆς κι, καὶ ἐπομένως πολλῷ μείζον τῆς δε. Αὕτα κτ:

Σχόλιον.

Εἶσω Τρίγωνα τρία ἴσοσκελῆ (ὧς ἐπὶ τῇ ἀνωτ. Σχήμ.) αδε, βζη, γδι, ὅν τὰ σκέλη αδ, αε, βζ, βη, γδ, γι ἄλληλοις ισαὶ εἰσὶ, καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν Γωνίαι α , β , γ ἀμα λιφθεῖσαι τεσσάρων Ορθῶν ἐλάσσουνες, ἄλλ

x. 445.

(1) Β. Πόρ. τῆς Ι.Ε. τῆς δ'. (2) ΚΒ. τῆς α'. (3) Δ. τῆς α'. (4) Εκ κατ. (5) Εξ ὑποδ. (6) ΚΔ. τῆς α'. (7) Κ. τῆς α'.

ὅτως ὡς τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζουναι εἶναι πάντη μεταλλακτικούμεναις, ὅποι
δὲ τῶν βάσεων αὐτῶν δε, ζη, θι Τριγωνού (1) τὸ λαν συνίσαθαι, ἔχον ἐν
αὐτῷ τὴν μὲν λα = δε, τὴν δέ μν = ζη, τὴν δὲ νλ = θι. ἐφ' ᾧ ἀν νοσοῦντο
δύο τῶν ἰσοσκελῶν Πλευραὶ αἱ προτεχεῖς ἀλλήλαις εἰς Εὐθεῖαν μίαν συνιέ-
ναι, ἀμέλειτοι τὰς μὲν γηι καὶ αἱ εἰς τὴν φλ, τὰς δὲ αἱ βζ εἰς τὴν φμ,
τὰς δὲ βη καὶ γηεῖς τὴν φν, συνιπλέναις τῆς κατὰ τὸ φ σερεχεῖς Γωνίας ὅποι
τῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν α, β, γ, καὶ συνεξισθεῖναι αἱ λαλήλαις τῶν φλ, φμ,
φν. Τέτων οὕτω προτεθέντων, ἐὰν περὶ τὸ Τριγωνού λαν (2) Κύκλος περι-
γραφῇ, ή καθετος φξ, ή ἀπὸ τῆς σερεχεῖς Γωνίας ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπί-
πεδου τῆς Κύκλος καταγομένη, ἐπ' αὐτὸ τὸ Κέντρον πεσεῖται.

Τῶν γὰρ ξλ, ξμ, ξν ἡγμένων, ἐπὶ τῶν ὁρθογωνίων Τριγωνών ξφλ,
ξφμ, ξφν, ἐςι (3) φλτ = φξτ + λξτ, καὶ φμτ = φξτ + μξτ, καὶ
φντ = φξτ + νξτ. Καὶ ἐὰν τούνυν ἀπὸ ἑκάστης τῶν ἰσων Τετραγωνών, (4)
φλτ, καὶ φμτ, καὶ φντ, ἀφαιρεθῆ τὸ φξτ, καταλειφθήσεται τὰ λξτ, καὶ
μξτ, καὶ νξτ ἀλλήλαις ἵσται, ὡς καὶ αἱ ξλ, ξμ, ξν ἴσαι ἔσονται Εὐθεῖαι.
καὶ ἐπομένως ὁ ίδιος λ., καὶ μ., καὶ ν διιῶν κύκλος, τὸ Κέντρον ἔχει (5) κατὰ τὸ ξ.

Η' δὲ τῆς Προτάσεως ἀλήθεια σαφής, καὶν ὁξυγώνιον ἢ τὸ λαν Τρι-
γωνού, καὶν ὁρθογώνιον, καὶν τέως ἀμβλυγώνιον. Οὐρα τὸ Σχόλ. τῆς Ε.
Προτ. τῆς Δ'. Βιβλία, καὶ παράθε τὰ ἐκστίστε ἐν ἀριθμ. Β'. Σχήματα τοῖς ἐν-
ταῦθα προκειμένοις τριστι.

Πόρισμα.

Τῶν τοιότων ἰσοσκελῶν Τριγωνών αδε, βζη, γθι τεθέντων, ἐὰν ἐκ τῶν
κατ' αὐτὰ βάσεων Τριγωνού τὸ λαν συνισθῆ, ἐςι τῶν ἰσων σκελῶν ἐποιο-
νθν οἷον τὸ αδ, ή τὸ αε, ή τὸ βζ, καὶ μείζον τῆς Ήμιδιαμέτρου τῆς Κύκλος
τῆς περὶ τὸ Τριγωνού τὸ λαν περιγεγραμμένη. Καὶ γὰρ αδ (6) = φλ, καὶ ἐπὶ^τ
τῆς ὁρθογωνίας Τριγωνής ξφλ, ή πλευρὴ φλ ή ὑποτείνεται τὴν ὁρθήν Γωνί-
αν, μείζων ἐσὶ (7) τῆς ξλ τῆς ὑποτείνεστις (8) τὴν ὁξεῖαν.

Πρότασις ΚΓ.

„Εκ τριῶν Γωνιῶν ἐπιπέδων (α, β, γ), ὃν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζουνες

(1) Λιὰ τὴν ἐν χερσὶ ταύτην καὶ τὴν ΚΒ. τῆς α'. (2) Ε. τῆς δ. (3) ΜΒ. τῆς α'. (4)
ΑΞ. ΙΕ. τῆς α'. (5) Θ. τῆς γ'. (6) Εκ κατ. (7) ΙΘ. τῆς α'. (8) Ε. Πόρ. τῆς ΑΒ.
τῆς α'.

, εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι (1), σερέαν Γωνίαν συζήσασθαι. Δεῖ δὴ (2)
,, τὰς τρεῖς τεσσάρων Ορθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Γινέσθωσαν ἄπασαι αἱ τῶν Γωνιῶν Πλευραὶ (τετέσιν αἱ αδ., αε., βζ., βη., γθ., γι.) ἀλλήλαις ἴσαι· καὶ ἐπιχειρεύσθεισῶν τῶν δε., γη., δι., συνεσάσθω (3) Τρίγωνον τὸ λμν., θτικός ἀν αἱ Πλευραὶ λμ., μγ., νλ., ταῖς δε., γη., δι. ἴσαι εἴεν, ἐκάση ἐκάση, καὶ περὶ τὸ Τρίγωνον (4) Κύκλος γεγράφθω, οὐ Ήμιδιάμετρος ἢ Ξλ. Καὶ ἐπειδὴ τῶν Γωνιῶν α., β., γ. ἐκάση τῶν Πλευρῶν τῆς Ήμιδιάμετρες Ξλ. (5) μείζων ὅστα ἐστιν, ἔσαι καὶ τὸ αδτ μείζου τῆς Ξλτ. Εὑρεθήτω τοίνυν (6) Πλευρά τις ξφ Τετραγώνε, ω̄ ἀν τὸ αδτ ὑπερέχοε τὸ Ξλτ., καὶ ἀπὸ τῆς Κέντρων ξ ἀνισάσθω (7) ξφ., τῷ ἐπιπέδῳ τῆς Κύκλων ορθή, ἐπειχεύχθωσάν τε αἱ φλ., φμ., φν. Λέγω δὴ ὡς ἐγένετο τὸ ζυτέμενον. Επειδὴ γὰρ ἡ ξ Γωνία ἐπὶ τῆς ξφλ Τριγώνων ορθή, ἔσαι φλτ = (8) φξτ + ξλτ = αδτ (9), καὶ φλ = αδ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθῆσται, ὅτι καὶ φμ = αε. Επεὶ δὲ καὶ λμ = δε., ἔσαι (10) ἡ ὑπὸ λφμ Γωνία = Γωνίᾳ τῇ α. Ωσαύτως δειχθῆσται ὡς καὶ ἡ ὑπὸ μφν = β, καὶ ἡ ὑπὸ νφλ = γ. Γέγονε τοίνυν τὸ ζυτέμενον.

Πρότασις ΚΔ.

, Τὰ ἐπίπεδα τὰ τὸ Παραλληλεπίπεδον περιέχοντα, Α'. Παραλληλόγραμμα εἰσί. Β'. τὰ ἀπεναντίενον ὅμοια. Γ'. καὶ ἴσα.

Μέρος Α'. Τὸ ἐπίπεδον αἱ τὸ τέμνουν τὰ ἐπίπεδα βζ., γθ., τὰ ἐκ τῆς ΙΓ. Ορισμ. παράλληλα, ποιεῖ (11) τὰς βχ., γε τοιαὶς παραλλήλες. Πάλιν τὸ ἐπίπεδον αἱ τὸ τέμνουν τὰ ἐπίπεδα αδ., βη., τὰ ἐκ τῆς ΙΓ'. Ορισμ. παράλληλα, ποιεῖται τὰς τοιαὶς (12) αε., βζ. παραλλήλες. ὥσε τὸ βιεζ παραλληλόγραμμον ἐστί. Τῷ δ' αὐτῷ τέτω λόγῳ καὶ τὰ λοιπὰ τῆς Παραλληλεπιπέδων ἐπίπεδα παραλληλόγραμμα ὔντα δειχθῆσται.

Μέρος Β'. Επειδὴ κατὰ τὸ Α'. Μέρος αἱ αβ., βγ., παράλληλοι εἰσὶ ταῖς εζ., γη., ἔσονται δὴ (13) αἱ ὑπὸ αφγ καὶ εγη ἴσαι ἀλλήλαις. Τὰ ἄρα Παραλληλόγραμμα βδ καὶ γθ ἴσογώνια (14) ἐστί. Ταύτητοι ἐπεὶ καὶ αἱ Πλευραὶ τέτοις ἐναλλάξ ἴσαι εἰσὶ (15), τετέσιν ἡ μὲν αβ = εζ., ἡ δὲ βγ =

(1) Εκ τῆς Κ. τῆς ια. (2) Εκ τῆς ΚΛ. τῆς ια. (3) ΚΒ. τῆς ια. καὶ ΚΒ. τῆς α. (4) Ε. τῆς δ. (5) Άια τὸ Πόρ. τὸ τῆς ἀνωτ. Σχολίε. (6) Κατὰ τὸ Β. Πρόβλημα τῆς Σχολίας τῆς μετὰ τὴν ΜΖ. τῆς α. (7) ΙΒ. τῆς ια. (8) ΜΖ. τῆς α. (9) Εκ κατασκ. (10) Η. τῆς α. (11) Ιε. τῆς ια. (12) Άια τὴν αὐτ. (13) Ι. τῆς ια. (14) ΚΖ. καὶ ΛΔ. τῆς α. (15) ΛΔ. τῆς α.

ζη, ή δὲ γδ = ιθ, καὶ ή δα = θε, ὅμοια δύπτω (1) ἔσαι τὰ ἀπεναντίου Παραλληλόγραμμα βδ, ζθ. Ωσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἀπεναντίου τὰ λοιπὰ εἶναι ὁμοια.

Μέρος Γ'. Δῆλον ἄυτὸ ἔκτε τῆ Α'. Μέρας, καὶ τῆς Δ'. ή τῆς Η'. τῆ Α'.

Ἐπιχευχθεισῶν γάρ τῶν αγ, ἐη, ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αβγ, εζη, αἱ Πλευραὶ αβ, βγ, ταῖς Πλευραῖς εζ, ζη, ἐτέρᾳ τῇ ἐτέρᾳ ἴσαι εἰσὶ (2), ητε ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ εζη (3) ίση, καὶ Βάσις αγ Βάσει εη ίση (4) ἔσαι, καὶ Τρίγωνον τὸ αβγ Τριγώνῳ τῷ εζη ίσου. Αλλὰ τὰ ἀπεναντίου Παραλληλόγραμμα βδ, ζθ τῶν Τριγώνων (5) ἐκείνων διπλασίουα ἔσι, ἔσαι τὰ Παραλληλόγραμμα ἴσα. Ωσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ δύο ὅποιαῖν τῶν ἀπεναντίου Παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι.

Π ο ρίσ μ α τ α.

π. 447. A. Τὸ Παραλληλεπίπεδον αβ, ή καὶ Πρίσμα ὅποιον ὑπὸ τῆ ἐπιπέδῳ γδ τεμνόμενον τῇ τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ασ, φβ παραλλήλων, τοιμῇ ποιεῖται τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ὅμοιαν τε καὶ ίσην. Δειχθήσεται δὲ ὥσπερ ἐδείκνυται τῆς Προτάσ. ἀνωτ. τὸ Β'. καὶ τὸ Γ'.

B. Τῇ δ' αὐτῇ τοιμῇ τὰ περατεῖντα Παραλληλόγραμμα αζ, σζ, κτ., δικιρεθήσεται εἰς μέρη (6) Παραλληλόγραμμα τὰ αν, γζ, καὶ σν, δζ, κξ: ὅμοια (7) τοῖς μέρεσι σδ, δβ, εἰς ἀ πᾶσα Εὐθεῖα τῶν κατὰ τὰς Πλευρὰς, οἷον ή σβ, τῇ αὐτῇ τοιμῇ κατατέμνεται.

Καὶ παρὰ ταῦτα, ἐὰν τὸ σερεὸν τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλων τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τμιδὲν, παραλληλεπίπεδον η, τὰ Παραλληλόγραμμα μέρη τὰ ἀλλήλοις ἀντίθετα, εἰς ἀ διατέμνονται τὰ ἀπεναντίον πλευρικά. Επίπεδα, ὅμοιά τε (8) ἔσονται καὶ ίσα.

Π ρότασις ΚΕ.

π. 448. „Ἐὰν σερεὸν Παραλληλεπίπεδον (αβ), ή καὶ Πρίσμα ὅποιον, ἐπιπέδῳ δω (γδ) τμιδῆ ταραλλήλω ὅντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσαι ως ή „Βάσις εδ πρὸς τὴν Βάσιν δζ, ητω τὸ σερεὸν αδ πρὸς τὸ σερεὸν γβ.

Δείκνυται τὸν αὐτὸν τρόπον ως καὶ ή Α'. τῆς ζ'.

(1) Σχόλ. τῆς Ζ. τῆς ζ., καὶ Οφ. Α. τῆς ζ. (2) ΑΑ. τῆς α'. (3) Ι. τῆς ια'. (4) Α. τῆς α'. (5) ΑΑ. τῆς α'. (6) Εκ τῆ Α. Μέρας τῆς Προτ. (7) Α. τῆς ζ. καὶ Οφ. Ζα. τῆς ζ'. (8) Β. καὶ Γ. Μέρος τῆς Προτ.

Διαιρεθήτω ἡ δβ Εὐθεῖα εἰς ἵσα ὁποσαδύποτε μέρη, οἷον εἰς τέττα-
ρα δη, ηθ, θι, ιβ· καὶ ἐπὶ τῆς Βάσεως δξ, διὰ τῶν σημείων τῶν δικιρέ-
σεων η, θ, ι, ἀχθήτωσαν Εὐθεῖαι ηκ, θλ, ιμ, ταῖς τῆς Βάσεως δξ ἀ-
πεναντίου Πλευραῖς δη, βξ, παράλιλοι· Καὶ ὅτας ἡ Βάσις εἰς τέτταρα
(1) ὄμοιά τε, καὶ ἵσα (2) Παραλιλόγραμμα διαιρεθήσεται τὰ δκ, ηλ, θμ,
ιζ, δι ὡν δὴ τῶν Πλευρῶν ηκ, θλ, ιμ, διερχέθωσαν τὰ ἐπίπεδα ηξ,
θφ, ιπ, τοῖς τῷ σερεῇ ἐπιπέδῳ γράπτεντον ἐπιπέδοις γδ, οβ παράλ-
λιλα. Καὶ ὅτω δικιρέθηται ἐκεῖνο εἰς ἐπίπεδα σερεᾷ τέτταρι, τὰ δξ, ιφ,
θπ, ιρ, θων ἔκαστον (3) ὄμοιοις τε, καὶ ἵσοις πλήθειτε καὶ μεγέθει ἐπιπέδοις
περιεχόμενον ξεῖ, καὶ διὰ τῦτο ἀλλήλοις (4) ἵσα τυγχάνει. Ταύτητοι τὸ
ἐπίπεδαν δκ, καὶ τὸ σερεὸν δξ εἰσὶ τῶν ἐπομένων τῶν δξ καὶ γράμμα (5)
ὄμοια. Αὐτοὶ διερχόμενοι τοίνυν ἡ Εὐθεῖα δη ἀπὸ τῆς δσ ὥστε ἦν ἐξη, οἷον
διε, καὶ ὑπολειφθήσεται στ τῆς δη ἐλάσσων· ἀπὸ δὲ δὴ τῶν σημείων τῶν
διαιρέσεων υπὲ το, ἀχθήτωσαν Εὐθεῖαι, ταῖς τῆς Βάσεως εδ Πλευραῖς ταῖς
ἀπεναντίου εσ, νδ παράλιλοι, καὶ δὶ αὐτῶν ἀχθήτω τὰ ἐπίπεδα τοῖς ἀ-
πεναντίου τῷ σερεῇ αδ ἐπιπέδοις ασ, γράπτεντον παράλιλα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δη,
υτ, τῆς δη ἐκατέρᾳ ιση ἐσὶν, ἔσαι (6) καὶ τὰ Παραλιλόγραμμα νυ, υχ,
τῷ Παραλιλόγραμμῳ δι ὄμοιόν τε, καὶ ἵσον ἐκάτερον· καὶ δὴ καὶ ἐκάτερον
τῶν σερεῶν γυ, υψ, τῷ σερεῷ δξ (ἄτε δὴ ὄμοιοις (7) τε καὶ ἵσοις πλή-
θειτε καὶ μεγέθει ἐπιπέδοις περιεχόμενα) (8) ισον. Αὖτα γάρ διὰ τὴν στ
Εὐθεῖαν, ἢτις τῆς δη ἐλάσσων ἐσὶν, ἔσαι καὶ ἡ Βάσις ετ τῆς Βάσεως δκ
ἐλάσσων (9), καὶ τὸ σερεὸν ατ τῷ σερεῇ δξ ἐλαττον (ἐὰν γάρ τῶν σερεῶν
τέτων, ἐπὶ ἐπιπέδων ισων ὅντων τῶν ασ, γράπτεντον διατέρες διατέρον συ-
σαθῆναι ὑποτεδῆ, διὰ τὴν στ ἐλάσσονα ὕστε τῆς δη, τὸ σερεὸν ατ μέρει
τινī μόνον τῷ σερεῇ δξ συνεξιστώθησεται). Οσάκις τοίνυν τὸ ἐπίπεδον δκ
περιέχεται ἐν τῷ ἡγυμένῳ δσ, τοσάκις καὶ τὸ σερεὸν δξ ἐν τῷ ἡγυμένῳ
δα ἔσαι περιεχόμενον. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖξαι δυνατὸν, ὅσα δὴ ποτε
τῶν ἐπομένων (τῆς τε βάσεως δξ καὶ τῷ σερεῇ γράπτεντον δξ) ὄμοια μόρια ἐν τοῖς ἡ-
γυμένοις (τῆς τε βάσει εδ καὶ τῷ σερεῷ αδ) ισαρθριως ἐμπεριέχεσθαι· Αὐτὰ
(10) βάσις εδ πρὸς βάσιν δξ, ὡς τὸ σερεὸν αδ πρὸς τὸ σερεὸν γράπτεντον ο. Ε. Δ.

(1) ΚΖ. τῆς α'. καὶ Σχόλ. τῆς Ζ. τῆς ο'. μετὰ τῆς Α'. ΟἘρ. τῆς ζ'. (2) Αις. τῆς α'. (3)
ΚΖ. τῆς ια'. μετά τῶν Πορ. (4) ΙΕ. Οφισ. τῆς ια'. (5) Ζ. Ήρ. τῆς ο'. (6) Διὰ τὰ ἐν
(1) καὶ (2) ἀνωτ. σημειωσ. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. μετά τῶν Πορ. (8) Ήρ. ΙΕ. τῆς ια'. (9)
Α. τῆς ζ'. (10) Διὰ τὸ τῶν ισων λόγων γυνάρισμ, τὸ οὐ τοῖς Οφισμ. τῆς ο'.

Πρότασις Κ.

α. 450. „Πρὸς τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ), καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (α), τῇ „δοθείσῃ σερεφῇ Γωνίᾳ (γδεξ) ἵσην σερεφὰν Γωνίαν συζήσαθαι (τὴν αδίλ).

Σημείωσαι ὅτι τῶν γραμμάτων δὲ ᾧν ἡ σερεφή Γωνία εἰωθεν ἐπισημανεθεῖται, τὸ πρῶτον ταπτόμενον ἐσὶ τὸ κατὰ τὸ Σημεῖον, εὐ ω̄ ἡ Γωνία κείται· αὐτως ἡ σερεφή Γωνία αδίλ ἐσὶ πρὸς τῷ α, καὶ ἡ γδεξ ἐσὶ πρὸς τῷ γ.

Α'πὸ τῷ τυχόντος σημείων 2 τῶν ἐπὶ τῆς Εὐθείας γγ, ἄγε (1) τὴν γγ, τῷ ἐπιπέδῳ διγε ὁρθήν, καὶ ἐπίζευξον Εὐθείας τὰς 32, 2ε, εη, ιδ, ιγ, καὶ ποίησον τὴν αδ = γδ, καὶ Γωνίαν τὴν ὑπὸ θαὶ = δγε, καὶ τὴν αι = γε· ἐν δὲ τῷ θαὶ ἐπιπέδῳ ποίησον Γωνίαν τὴν ὑπὸ θαὶ = Γωνία τῇ ὑπὸ δγη, καὶ ακ = γη. Εἶτα ἀνάσησον (2) τὴν κλ ὁρθήν τῷ ἐπιπέδῳ θαὶ, καὶ ἔπω κλ = ιδ, καὶ ἐπεζεύχνω ἡ αλ. Οὕτω γάρ ἔσαι ἡ σερεφή Γωνία αδίλ ἵση τῇ δοθείσῃ γδεξ· ἐπίζευχθεισῶν γάρ τῶν θη, ιη, θλ, ιλ, δικὰ τὰς θαὶ, ακ, αι ταῖς δγ, γη ἵσαι εἰσὶν ἐτέρω τῇ ἐτέρῳ, καὶ τὰς ὑπὸ θαὶ καὶ δγη ἵσαι εἴσαι, ἔσαι (3) καὶ ἡ θη = δη. Παραπλησίως δὲ τῇ παραδέσσει τῶν Τριγώνων ακ, εγη, δειχθῆσται (4) ιι = ιε· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων θηλ, δηδ (5) δειχθῆσται θλ = δ2· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ιηλ, εηδ, ἡ ιλ = ε2· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ακλ, γηδ, ἡ αλ = γδ· Τὰ τοίνυν Τρίγωνα αθλ, γδ2 ἀδίλιοις ισόπλευρα ἐσὶ, καὶ δη (6) καὶ ισογώνια· ὅπερ ἡ ὑπὸ θαὶ = δγδ. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγου, καὶ τοῖς ισοπλεύροις Τριγώνοις αιλ, γεδ, ἡ ὑπὸ λαι = 2γε, ἀδιλὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαι = δγε (7). Εγένετο ἄρα τὸ ζητώμενον.

Πρότασις ΚΖ.

α. 451. „Α'πὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ), τῷ δοθέντι σερεφῷ Παραπλησπιπέδῳ „(γδ) ὄμοιόν τε, καὶ ὄμοιώς κείμενον σερεφὸν Παραπλησπιπέδου ἀναγράψαι.

Ἐν Γωνίαις ἐπιπέδοις βαθ, θαὶ, βαι, αι ἵσαι ἀν εἴεν ταῖς 2γε, εγη, 2γη, συνεπάσθω Γωνία σερεφή ἡ α (8) τῇ σερεφῇ Γωνίᾳ γη ἵση. Εἳτι δὲ ἔπω (9) 2γε : γε :: βα : αθ, καὶ γε : γη :: αθ : αι· Καὶ ὑπὸς ἔσαι δὲ ἱσε (10) 2γε : γη :: βα : αι. Πληρέσθω δὲ τὸ Παραπλησπιπέδον ακ· τότο γάρ ὄμοιον ἔσαι τῷ δοθέντι.

(1) Διὰ τὴν Ι.δ. τῷ αι· (2) Ι.Β. τῷ αι· (3) 4. τῷ α· (4) Α'.Ε. Γ. καὶ 4. Πρότ. τῷ α· (5) Διὰ τὸν Γ. Ο'.ε. τῷ αι· καὶ Α. Πρότ. τῷ λ· (6) Η. τῷ α· (7) Εἰκ. κατασκ. (8) Διὰ τὴν αιατ. (9) Ι.Β. τῷ ε· (10) Η.Β. τῷ ε·

Ε'κ γαρ τῆς κατασκευῆς τὰ Παραλληλόγραμμα β.δ., 2ε, ς δι, εη, ς
βι, ζη ὄμοια ἔστι, ς τέτων τὰ ἀπεναντίον (1) ἐκείνων τοῖς ἀπεναντίον· Ω̄ς
τὰ δέξια ἐπίπεδα τῷ σερεῖ ακ., τοῖς ἔξι ἐπιπέδοις τῷ σερεῖ γύδ ὄμοια ὄντα ἔστι,
καὶ ἐπομένως (2) τὰ σερεὰ ακ., γύδ ὄμοια ἔστι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

,, Εἳσται οὐδέν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς Διαγωνίας
,, (αγ., εη) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ σερεὸν ὑπὸ τῆς
,, ἐπιπέδου.

δε. 452.

Ἐπειδὴ (3) βη ς βε Παραλληλόγραμμα ἔστιν, αἱ γη, αἱ παράλληλοι
εἰσὶ τῇ αὐτῇ βζ· ἀρα ς πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσὶ (4), ς ἐπομένως
ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται εἰσὶν· ὥστε αἱ Εὐθεῖαι αγ., εη (5) ἐν ἐνὶ ς τῷ αὐ-
τῷ ἐπιπέδῳ εἰσὶ. Ήδη δὲ ὡς τῷ δι αὐτῶν ἐπιπέδῳ, τέμνεται τὸ παραλλη-
λεπίπεδον εἰς δύο Πρόσματα ίσα, ὡδέ πως δείκνυμι.

Νοεῖσθω τὸ Πρόσμα αειγυδ, ἐπὶ τῷ διίστιν ἐπιπέδῳ εαγη ἢτω κείμενον,
ὡς τὰς Γωνίας δ, δ, ἔχοντας ἀποκλινόσας πρὸς τὰς Γωνίας β, 2, ς φρυνερὸν
ὡς ἔτι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων βαθύ, ζεῦση κείσεται, καὶ τέως
δὴ μετὰ τὴν ἐφέρμοσιν συμπεσεῖται μὲν τὸ δ τῷ β, συμπεσεῖται δὲ τὸ δ
τῷ 2, ἐπὶ τὸ αὐτό· Πιπτέτω γάρ εἰ δυνατὸν τὸ δ ἔξω τῷ β, εἴον κατὰ τὸ ν·
ἢ μὲν οὖν ὑπὸ βαγ = (6) δγα· ἀλλ' ἡ ὑπὸ δγα = ναγ (ἢ γὰρ αὐτῇ Γωνία
ἔστιν)· Λόρα αἱ βαγ ς ναγ ίσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ὅπερ ἄτοπον. Συμπεσεῖται
τοίνυν τὸ δ Σημεῖον τῷ β, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ς τὸ δ τῷ 2, ὥστε τὸ
Πρόσμα αειγυδ προσεφαρμόζεται· τῷ Πρόσματι αγνεζβ, ς ἐπομένως (7)
ίσα ἔστι.

Ἄστι ἡ κατὰ Τακτέτιον δεῖξις, τοῖς μὲν δρόσοις τῶν Παραλληλεπιπέδων,
ῶν ἀμέλει τὰ κατὰ πλευράν ἐπίπεδα ταῖς βάσεσι πρὸς δρόσας ίσαται, προ-
σύκιστα ἔστι· τυχὸν δὲ ς ἐνός τινος, ἢ δευτέρην εἰδης τῶν πλαγίων ς ἀλλο-
τρίως ἔχει· Ε'πειδὴ μέντοι ἐν ταῖς ἐφεξῆς Προτάσεσι τεθέτε, καὶ τῇ μετά
τόδε Βιβλίο, ἐπὶ τὰ Παραλληλεπίπεδα καθόλου ὅπως ἦν ς ἔχοι, ὑποτί-
θεται ἡ δεῖξις ἐκτεπομένη, ἐπάναγκες ἔστιν ἐπὶ τὸν κατ' Εὐκλείδην συδογισ-
μὸν ἀναδραμεῖν, δι οὖν ἐπ' ἀκριβὲς ἀποδείκνυται, πάντα πάντη τὰ παραλλη-
λεπίπεδα, τὰ ἐπιπέδῳ τῷ αι, κατὰ τὰς Διαγωνίας τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων

(1) Κ.δ. τῇ α'. (2) Ορισμ. Θ. τῇ α'. (3) Κ.δ. τῇ α'. (4) Διὰ τὴν Θ. τῇ α'.
(5) Ζ. τῇ α'. (6) Κ.Ζ. τῇ α'. (7) Λ.ξ. 2.

αγ, ει τεμνόμενα, δίχα (ὅπέρ. ἐσιν εἰς Πρόσματα δύω ισά τε ἀλλήλοις ὄντα; ή δὴ καὶ ὅμοια) διατέμνεσθαι.

Τριγωνον γὰρ Τριγωνώφιον τὸ αβγ τῷ αδγ (1), καὶ (διὰ τὴν ἴσοτητα τῶν Γωνιῶν (2) β καὶ δ, καὶ τῶν (3) βαγ, δγα, καὶ τῶν βγα, δαγ) ὁμοιον (4). Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγου καὶ τὰ εζη, εδη Τριγωνα ισατε καὶ ὁμοια ἐσιν. Εἴτα δὲ δὴ καὶ ὁμοια (5) καὶ τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα αἱ καὶ γδ, καὶ ἔτι τὰ βηγ καὶ αδ· τὸ δὲ αἱ ἀμφοῖν κοινὸν· Τὰ ἄρα Πρόσματα αβγιεὶς καὶ αδγιεῖς, ὑπὸ ὁμοίων τε καὶ ισων πλήθεις καὶ μεγέθει ἐπιπέδων περιεχόμενα, ὁμοία τε ἐσιν (6) ἀλλήλοις καὶ ισα. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΘ. καὶ Δ.

κ. 453. „Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα (εζημ), καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸν ὑψος, καὶ διὰ τότο ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις (εζημ, ηαξλ) τυγχάνοντα σερεὰ Παραλληλεπίπεδα (Ζεαηκημγ καὶ ζεβθλέμι), ισα ἀλλήλοις ἐσι.

Ητοι γὰρ μεταξὺ τῶν κατὰ πλευρὰν πάραλληλῶν ἐπιπέδων εαξμ καὶ ζηλι ὑφίσαται, οὐδὲ χλ. Εἰςω δὴ τὸ Α'. ἐκ γῆν τῆς ΚΔ'. τῆς παρόντος καὶ τῆς Η'. τὸ Α'. Κιβλίς, δῆλον ὅτι τὰ Τριγωνα αεβ, γμξ, καὶ τὰ ηζη, καὶ ίσοπλευρά τε εἰσὶν ἀλλήλοις καὶ ισογώνια. Ταύτητοι ὡς ἐπὶ τῆς προλαβύσης, δειχθήσεται γὰρ Πρόσματα γμξλικ, αεβθζη ἀλλήλοις ἐπιτιθέμενα συνεφαρμόζειν τε, καὶ ισα (7) τυγχάνειν. Καὶ κοινῇ ἄρα τῆς σερεᾶ ζεβθληγμ προσθέντος, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα Ζεαηκημγ, ζεβθλέμι ισα εἶναι. Ο. Ε. Δ.

Αλλως. Εὐ τοῖς Παραλληλογράμμοις αεμγ, βεμξ αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ (8) ισαι ἀλλήλαις, τατέσιν αε = γμ, βε = ξμ, αγ = εμ = βξ, καὶ ἀρθεσησις τῆς κοινῆς βγ, αβ = γξ· ἄρα τὰ αβε, γξμ Τριγωνα, ἀλλήλοις ισόπλευρα ἐσι, καὶ ἐπομένως (9) ισα. Ωσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ τὰ Τριγωνα ζηδ, καὶ ισα ἀλλήλοις εἶναι, τὰ δὲ ἀπεναντίον τῶν Παραλληλεπιπέδων ἐπίπεδα ισα (10) καὶ αὐτά, τατέσιν αἱ = γι, καὶ βξ = ξι, καὶ αε = ει = βλ· διὸ καὶ τὰ κοινά βκ ἀφοιρημένα, ἐσαι αθ = γλ. Τοιγαρεῦ τὰ Πρόσματα αεβ θζη καὶ γμξλικ, ὡς ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ισων πλήθεις καὶ μεγέθει περιεχόμενα (11), ισα ὄνται ἐσι· κοινῇ δὲ τύτοις προσεθέντος τῆς σερεᾶ, καὶ Βάσις ή ζμ, καὶ ἐπίπεδον ταύτῃ ἀπεναντίον τὸ βκ, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα Ζεαηκημγ, ζεβθλέμι ισα ἐσαι. Ο. Ε. Δ.

(1) Α. τῷ α. (2) Διὰ τὴν αὐτ. (3) ΚΖ. τῷ α. (4) Α. τῷ ζ. (5) ΚΔ. τῷ μ. (6) Σρ. ΙΕ. τῷ μ. (7) Αξ. ξ. (8) Α. τῷ α. (9) Η. τῷ α. (10) ΚΔ. τῷ μ. (11) ΙΕ. Ορ. τῷ μ.

Α' οὐκεὶς ἄρα τὸ Παραδιηλεπίπεδον Σχήματι, μὴ μεταξὺ εἰς τῶν περὶ 454· αὐτῶν πλευρικῶν παραδιηλῶν ἐπιπέδων τῷ Παραδιηλεπιπέδῳ Σεικυμι, ἐπεὶ ἐξ ὑποθ. οὐ, αγ., επ., χφ., ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ παραδιηλῶντι πρὸς τὴν Βάσιν εἷμι, αἱ ρφ. καὶ πχ. τεμνέτωσαν τὴν μὲν ηκ. κατὰ θ καὶ λ., τὴν δὲ αγ. κατὰ β καὶ ξ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ εβ., μξ., γφ., ιλ. Καὶ ἦτα δῆτα δειχθύσεται, ὡς τὰ ἐπίπεδα οἵ τοῦ σερεὸν ζεβδλέμι περιέχεται Παραδιηλόγραμμα, ἐσὶν ἀπεναντίον ἀλλήλοις παράδιηλα· τὰ γὰρ ἀπεναντίον ἐπίπεδα τὰ Τετράπλευρα τῇ σερεῇ τέτε, ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσὶν ἐπιπέδοις, ἐν οἷς καὶ τὰ ἀπεναντίον τῶν παραδιηλεπιπέδων αζηγ. καὶ πζιρ., καὶ ἐπομένως (1) παράδιηλα εἰσί. Τῷ γὰρ σερεῇ βζιξ τὰ ἀπεναντίον Τετράπλευρα βεμξ, θζιλ., ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσὶν ἐπιπέδοις, ἐν οἷς τὰ ἀντίθετα αγυμαὶ καὶ ηκιζ ἐπίπεδα τῷ Παραδιηλεπιπέδῳ αζηγ. Καὶ πάλιν τῷ αὐτῷ σερεῇ βζιξ τὰ ἀπεναντίον Τετράπλευρα βεζη καὶ μξλι, εἰσὶν ἐν τοῖς αὐτοῖς ἐπιπέδοις, ἐν οἷς καὶ τὰ ἀντίθετα πεζη καὶ μιφρ τῷ Παραδιηλεπιπέδῳ πζιρ. Εἴσι δὲ τὸ Παραδιηλόγραμμον εἰ τῷ τε ζερεῷ ἐκείνῳ καὶ τοῖς παραδιηλεπιπέδοις κοινόν· τὸ δὲ Τετράπλευρον βξλδ ἐσὶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ὃ τῷ εἰ (ἐξ ὑποθ.) παράδιηλον ἐσὶ, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ σερεὸν βζιξ ὑπὸ ἐπιπέδων Τετραπλεύρων, ὃν τὰ ἀπεναντίον ἀλλήλοις παράδιηλα, περιεχόμενον· Καὶ τοίνυν παραδιηλεπιπέδῳ τυγχάνουτι (2) τῷ σερεῷ ἐκείνῳ, ἐπεὶ (διὰ τὸ Α'. μέρος) τὰ Παραδιηλεπίπεδα Σχήματι, Σεικυμι, ισαὶ εἰσὶ, φανερὸν ὅτι καὶ ἀλλήλοις ταῦτα ισαὶ εἰσὶ. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ό Λ Ι Ο Υ.

Παραπλησία ἐσὶν ἡ Πρότασις αὗτη τῇ ΛΕ'. τῷ Α'. Βιβλίῳ, ταῦτα περὶ τῶν σερεῶν, οἵσεινη περὶ τῶν ἐπιπέδων κατασκευάζεσσα. Εὐδευτοὶ καὶ κατὰ τὰς λοιπὰς διαφορὰς παραπλησίως ἐκείνη ἀποδειχθύσεται.

Πρότασις ΛΑ.

„Τὰ ἐπὶ ισων Βάσεων ὄντα τῶν (αξ καὶ εη) σερεὰ Παραδιηλεπίπεδα, περὶ 455. „καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸν ὄψος (σ), ισαὶ ἀλλήλοις εἰσὶ.

Ἐχέτω δὴ τὰ Παραδιηλεπίπεδα πρῶτον τὰς Πλευρὰς καθέτις ταῖς βάσεσι· καὶ τοίνυν παρὰ τὴν ζη Πλευρὰν προσκεβλημένην, παραβληθήτω Παραδιηλόγραμμον ημιθ τῷ Παραδιηλογράμμῳ αξ ισον τε καὶ ὄμοιον· καὶ πληρυμέ-

(1) Κα. τῇ ια'. (2) Ορ. ΙΓ. τῇ ια'.

να τῆς Παραλληλογράμμων ημφε, αἱ Εὐθεῖαι φυ, ᾧ προεξαχθεῖσαι ἀπαντάτωται τῇ κατὰ τὰ Σημεῖα π ἢ λ. Ήδη μὲν οὖν νοεῖσθωσαν ἐπὶ τῶν ικ, ιπ, ιφ, ἐφεσάναι Παραλληλεπίπεδα, ὡν αἱ Πλευραὶ κάθετοι εἰν ταῖς βάσεσι, καὶ ὡν ὑψός κοινὸν τὸ σ· καὶ δὴ τὸ σερεὸν εἰσὶ ἔσι πρὸς τὸ σερεὸν ηφτ, ὡς εἱ πρὸς ιφ⁽¹⁾ τατέσι (τῶν ει, αἵ ἐξ ὑποθ. ἵσων ὄντων) ὡς αἵ πρὸς ιφ· ἦτοι (ἐκ κατασκευῆς) ὡς ηκ πρὸς ιφ, τατέσιν⁽²⁾ ὡς ιπ πρὸς ιφ, τατέσιν⁽³⁾ ὡς σερεὸν ηπτ πρὸς τὸ αὐτὸ σερεὸν ηφτ· Εἴπειδη τοίνυν τὰ σερεὰ εὑπ^τ ιπσ, τὸν αὐτὸν ἔχοντα εἰσὶ λόγου πρὸς τὸ σερεὸν ηφτ, ἔσαι τὸ⁽⁴⁾ εὑσ σερεού καὶ τῷ ηπτ ἵσον, τατέσι τῷ σερεῷ⁽⁵⁾ ηκτ· τατέσιν⁽⁶⁾ αἱ Βάσεις ικ, αἵ διοιοίτε εἰτὶ⁽⁶⁾ καὶ ισαι) τῷ σερεῷ⁽⁷⁾ αἵσ. Ο. Η. τὸ προτεφέν. Διὶ ὅλῃ δὲ τῇ τοιότε Συλλογισμῷ τὰ σερεὰ ἐλήφθη ὁρθά.

Εἶτα ἔχέτω τὰ δοθέντα Παραλληλεπίπεδα εισ, αἵσ, τὰς Πλευράς ταις βάσεσιν ει καὶ αἵ πλαγίας· καὶ γινέσθω ἐπὶ ει, αἵ Παραλληλεπίπεδα, ὡν ἂν αἱ Πλευραὶ ταις βάσεσιν ὁρθαὶ εἰν, ἐν ὑψώματι τῷ κατὰ τὴν σ. ταῦτ^{οῦ} ισαι τοῖς πλαγίοις ἔσαι διὰ τὴν ΚΘ. ἢ τὴν Λ'. Ως ἐπειδὴ τὰ ὁρθὰ Παραλληλεπίπεδα (διὰ τὸ Α'. μέρος) ἀλλήλοις ισχ ἔσιν, ἔσαι καὶ τὰ πλάγια ισαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΛΒ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸν ὑψός ὄντα σερεὰ Παραλληλεπίπεδα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ Βάσεις.

α. 456.

Ἐνσωσαν Βάσεις ιξ καὶ α, κοινὸν δὲ ὑψωμα τὸ κ· καὶ παρὰ τὴν γέ παραβληθήτω⁽⁸⁾ Παραλληλόγραμμον ξει ισον τῷ δοθέντι α, ἐν Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ξει ιση τῇ δοθείσῃ ι.

Ἐπὶ γεν τῶν εγ, ξε, νοεῖσθω Παραλληλεπίπεδα ἐφιεσάμενα, ἐν ὑψώματι τῷ κ· τὰ δὲ, μέρη ἔσαι τὰ αὐτὰ Παραλληλεπίπεδα θει· Καὶ ἔσαι τοῖν⁽⁹⁾ Παραλληλεπίπεδον ξει πρὸς Παραλληλεπίπεδον ξηκ, ὡς Βάσις ξει πρὸς Βάσιν ξη, τατέσιν⁽¹⁰⁾ ὡς Βάσις α πρὸς Βάσιν ξη· Α'λλὰ τῶν Βάσεων ξει καὶ ισων ὑσῶν, τὰ Παραλληλεπίπεδα ξει καὶ ακ⁽¹¹⁾ ισα ἔσιν· ἄρα Παραλληλεπίπεδον τὸ ακ ἔστι πρὸς Παραλληλεπίπεδον τὸ ξηκ, ὡς Βάσις α πρὸς Βάσιν ξη. Ο. Ε. Δ.

(1) ΚΕ. τῇ ια'. (2) ΛΕ. τῇ α'. (3) ΚΕ. τῇ ια'. (4) Θ. τῇ ι'. (5) ΚΘ. τῇ ιι'.
 (6) Εκ κατασ. (7) Ορ. ΙΕ. τῇ ια'. (8) ΜΔ. τῇ α'. (9) ΚΕ. τῇ ιι'. (10) Εκ κατ.
 (11) Διὰ τὴν ἀντ.

Σ χόλον.

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν Παραδημεπιπέδων ἀποδειχθὲν, ἐν τῷ ἐφεξῆς ΙΒ'. Βιβλ. Προτ. σ'. περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Α'. Πορίσμ. μετὰ τὴν Θ'. Πρότ. περὶ παντὸς Προσματος, καὶ ἐν τῇ ΙΔ. Προτάται περὶ τῶν Κώνων, καὶ τῶν Κυλίνδρων ἀποδειχθῆσται.

Πρότασις ΛΓ.

„Τὰ ὄμοια σερεὰ Παραδημεπιπέδα (ἢ τὰ καὶ γυμ) πρὸς ἄλληλα ἐν τρι-
„πλαστοις λόγῳ εἰσὶ τῶν ὄμολόγων Πλευρῶν (αβ, βγ). x. 457.

Ἐν Παραδημεπιπέδα αδ, γυμ ὄμοια, καὶ πάντα δύπτα τὰ ἐπ' αὐτῶν ἐπίπεδα ὄμοια (1) ἔσαι, καὶ ἐπομένως αβ : βγ : : αβ : βξ (2), καὶ ζβ : βη : : εβ : βξ· ἕτι δὲ καὶ αἱ Γωνίαι (3) τῶν ἐπιπέδων ἔσονται ίσαι. Ταχθήτωσαν οὖν ἡτο τὰ σερεὰ αδ, γυμ, ὡς τὰς μὲν ίσας Γωνίας ὑπὸ γυβξ, αβε, ἀντιθέτεις κατὰ κορυφὴν κεῖθαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τὰς δὲ Πλευρὰς αβ, γυβ ἐπ' εὐθείας, καὶ δὴ (4) καὶ τὰς εβ, ξβ, καὶ τὰς ζβ, ηβ, ὄμοιως αὐτὰς ἐπ' εὐθείας. Ε'πὶ γῆν τῶν ἐπιπέδων εγ καὶ γενούμω σερεὰ ἐφειώτα, τὸ μὲν κβ συνιεῖται μετὰ τὴν σερεὴν θα ἐν παραδημεπιπέδον, τὸ δὲ φξ συγιεῖται ὄμοιως καὶ αὐτὸ μετὰ τὴν κβ ἐν παραδημεπιπέδον, τότε φξ καὶ αὐτὸ μετὰ τὴν γυμ συνιεῖται ἐν παραδημεπιπέδον. Τὸ τοίνυν σερεὸν θα ἔστι πρὸς τὸ σερεὸν κβ (5), ὡς αε πρὸς εγ, τυτέσιν (6) ὡς αβ πρὸς βγ, τυτέσιν (ώς εξ ὑποδ. ἀνωτέρω δέδεικται) ὡς εβ πρὸς βξ, ἥτοι (7) ὡς εγ πρὸς γξ· ὅπέρ ἔσιν (8) ὡς τὸ αὐτὸ σερεὸν κβ, πρὸς τὸ σερεὸν φξ· ὡς ε συνεχίζεται ὁ αὐτὸς λόγος ἐπὶ τῶν τριῶν σερεῶν θα, κβ, φξ· Ήδη δὲ τὸ σερεὸν κβ ἔστι πρὸς τὸ σερεὸν φξ, ὡς Βάσις εγ πρὸς Βάσιν γξ, τυτέσιν ὡς εβ πρὸς βξ, ὁ ταυτόν ἔσιν, ὡς ζβ πρὸς βη (9), ἥτοι ὡς τὸ ἐπίπεδον γγ πρὸς τὸ ἐπίπεδον γη, τῦτο δὲ ἔσιν, ὡς τὸ αὐτὸ αὐθίς σερεὸν φξ πρὸς τὸ σερεὸν γμ· Τὰ ἄρα τέτταρα σερεὰ θα, κβ, φξ, γμ συνεχῶς ἀνάλογου εἰσὶ· καὶ τοίνυν ὁ λόγος τῷ Α'. Θα πρὸς τὸ Δ'. γμ, τριπλασίων (10) ἔστι τῷ λόγῳ τῷ Α'. Θα, πρὸς τὸ Β'. κβ, τυτέσι (11) τῷ λόγῳ αε πρὸς εγ, τυτέσι τῷ λόγῳ (12) τῶν ὄμολόγων Πλευρῶν αβ : βγ. Ο. Ε. Δ.

(1) Θ. Οφ. ια'. (2) Οφ. Α. τῷ σ'. (3) Αὐτ. (4) ΙΓ. καὶ ΙΔ. τῷ α'. (5) ΚΕ. τῷ ια'. (6) Α. τῷ σ'. (7) Αὐτ. τὴν αὐτὴν. (8) ΚΕ. τῷ ια'. (9) Αὐτ. ἴδειχεν οἱ ίες ύποδ. (10) Οφ. Ι. τῷ σ'. (11) ΚΕ. τῷ ια'. (12) Α. τῷ σ'.

Α' λ λ ως.

κ. 458. Τῶν ὁμοίων Παραλληλογράμμων θα, πτ., ἔπωσαν ὅμόλογοι Πλευραὶ αἱ αβ· γ· δσ., εβ· γ· τσ., ζβ· γ· υτ. Φημὶ δὴ ὅτι τὸ σερεὸν θα ἐξὶ πρὸς τὸ σερεὸν πσ., ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς αβ·πρὸς τὴν δσ.

κ. 459. Προσεκβληθήσανται αβ., εβ., ζβ., ἐπὶ γ., ξ., η., ώς εἶναι τὰς βγ., βξ., βη., ισας ταῖς δσ., τσ., υτ ἵτας ἑκάσιην ἑκάσιη, καὶ πληρόθω τὸ Παραλληλόγραμμον γξ., καὶ τὸ Παραλληλεπίπεδον γμ. καὶ διὰ τὴν ὑπὸ ξβγ = (1) αβε = (2) δστ., καὶ διὰ τὰς βγ., ξβ., τὰς ταῖς Πλευραῖς δσ., τσ ισας (3) ετέρων ἑτέρων, τὰ Παραλληλόγραμμα ξγ., δσ., ὅμοιά τε ἔσαι καὶ (4) ισα. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ὅμοιά τε ἔσαι καὶ ισα, καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα γη καὶ δσ., γαὶ μὴν καὶ τὰ ξη., τυ. ἐνθευτοι καὶ τὰ τέτοις ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα (ἴτοι τὰ τοῖς ὁμοίοις καὶ ισοῖς ἀντίθετα ἐπ' ἀμφοῖν τῶν Παραλληλεπιπέδων) (5) ὅμοιά τε ἀδιάλοις καὶ ίσα ἔσαι. Καὶ εἰσὶν ἄρα τὰ σερεὰ πσ., γμ (6) ὅμοιά τε καὶ ισα. διὸ δὴ τὰ σερεὰ θα, γμ (7) ὅμοια καὶ αὐτὰ ἔσαι, ώς εις αβ.: βγ :: εβ : βξ :: ζβ : βη. Επὶ τοίνυν τῶν Βάσεων εγ., γξ., πληρόθω τὰ Παραλληλεπίπεδα βκ., φξ., ισοῦψῃ τῷ παραλληλεπιπέδῳ ἀδ., καὶ ἔσαι αβ.: βγ ἢ πρὸς δσ (8) :: εβ : βξ, ἢ στ :: καὶ ζβ : βη, ἢ συ. τυτέξιν (9) αε : εγ :: εγ : γξ :: ζγ : γη. ἢτοι (10) αδ : βκ :: βκ : φξ :: φξ : γμ, ἢτοι πσ. Αὐρα (11) αδ ἐξὶ πρὸς πσ., ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῇ αδ πρὸς τὸ βκ. Α'λλαμὴν αδ : βκ :: (12) αε : εγ :: (13) αβ : βγ, ἢ δσ. ἄρα (14) τὸ σερεὸν αδ ἐξὶ πρὸς τὸ ὁμοίον σερεὸν πσ., ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς Πλευρᾶς αβ· πρὸς τὴν αὐτῆς ὁμόλογον Πλευρὰν δσ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Α'. Εὐθευτοι ἐὰν τέσσαρες ωσιν Εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογοι, ώς ἔχει ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, ὅτας ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α'. Παραλληλεπίπεδον, πρὸς τὸ Παραλληλεπίπεδον τὸ ὁμοιόν τε, καὶ ὁμοίως ἀναγυεγραμμένου τὸ ἀπὸ τῆς Β'. Διὸ ἐπὶ τῶν ὁμοίων Παραλληλεπιπέδων αδ., γμ., δοθεισῶν τῶν ὁμόλογων Πλευρῶν αβ., βγ., εύρεθήσεται ὁ ἐκείνων πρὸς ἀδιάλα λόγος. ἐὰν γὰρ γένηται αβ., βγ., χ., ψ. . . . , ἔσαι θα: γμ :: αβ: ψ. Ταύτη τοι καὶ τῶν

(1) Ι.Ε. τῇ α'. (2) Εξ ὑποδ. καὶ Ορ. Α. τῇ ζ'. (3) Εἰκ πατασ. (4) Α'ξ. ξ'. (5) ΚΔ. τῇ ια'. (6) Ι.Ε. Ορ. ια'. (7) Εξ ὑποδ. καὶ Ορ. Θ. τῇ ια'. (8) Εἰκ πατ. (9) Α. τῇ ζ'. (10) ΚΕ. τῇ ια'. (11) Ορ. Ι. τῇ δ'. (12) ΚΕ. τῇ ια'. (13) Α. τῇ ζ': (14) Ι.Α. τῇ δ'.

ςερεῶν θα, για δοδέντων, καὶ τὸ θα τῆς τυχείσης Πλευρᾶς ταχθεῖσης αβ., ἢ θατέρη τῶν σερεῶν ὁμόλογος Πλευρὴ βγ., ἐσὶν ἢ τῶν δύο μέσων. (1) ἀναλόγων προτέρη, τῶν μεταξὺ αβ καὶ ψ.

B'.

Κάντεῦθεν λίαν σφαλλόμενοι ἀπελέγγονται, οἱ τῶν ὁμοίων σερεῶν τὸν λόγον ίσου εἶναι ἡγεμενοὶ τῷ τῶν Πλευρῶν. Οὐ γὰρ δὴ ὁ ἀπὸ τῆς διπλασίας Γραμμῆς κύβος διπλάσιος ἐσιν, ὁκταπλάσιος δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἀπλῆς· οὐδὲ δὲ ἀπὸ τῆς τριπλῆς τριπλῆς, εἰκοσιπλῆς δὲ καὶ ἑπταπλῆς· ἐπεὶ 1, 2, 4, 8 . . ., καὶ 1, 3, 9, 27 . . . Οὓμοίως δὲ καὶ περὶ πάντων τῶν ὁμοίων σερεῶν ὑποληπτέον, ως ἐφεξῆς δῆλον ἔσαι.

Γ'.

Ἐκ τέτων δὲ ἥρτηται καὶ τὸ τεθρυλλημένον ἐκεῖνο περὶ τῷ διπλασιασμῷ τῷ κύβῳ Πρόβλημα, περὶ ἣ κατωτέρω ἐν τέμνατι τῷ ΙΒ'. Βιβλίον, ἐν οἷς καὶ ἡ μέθοδος ὑποτεθείσεται, ἥπερ ἢ τῷ Κύβῳ, καὶ ἢ τῶν ὅποιωνεν ἀπλῶς ὁμοίων σερεῶν ἄνεξης ἢ μείωσις, κατὰ τὸν δοδέντα λόγον τελεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

Τῶν Κύβων σερεῶν ὄντων παραδημεπιπέδων ὁμοίων ἀπλήλοις, καὶ ἐπομένως ἐν τριπλασίον λόγῳ τῶν ίδίων Πλευρῶν εἶναι νοεμένων, ἀπας λόγος, ἐν διποιαιδή τισι πηλικότησι τριπλασίων ὧν, διὰ τῶν Κύβων τῶν αὐτῶν ἐκείνων πηλικοτήτων ἐπισημαίνεσθαι εἰωθεν, οὗτον ὁ τριπλασίων λόγος τῷ Δ πρὸς Β, ὅτως ἐκτίθεσθαι φίλοι ΔΚ : ΒΚ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν παραδημεπιπέδων δειχθὲν ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. Προτ. Η'. περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Β'. Πορίσματι τῆς Θ'. τῷ αὐτῷ περὶ τῶν Πρισμάτων, καὶ ἐν τῷ ΙΒ'. Προτ. περὶ τῶν Κώνων καὶ τῶν Κυλίνδρων, καὶ ἐν τῷ ΙΗ'. περὶ τῶν Σφαιρῶν.

Πρότασις ΔΔ.

„τῶν ἵσων σερεῶν παραδημεπιπέδων (πσ., γκ) ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βά-
„σεις τοῖς ὕψεσι (τυτέσι) ως ἔχει βάσις ότι πρὸς βάσιν 2x, ὅτως ἀντιφέρ-
„φως ὕψος τὸ 2y πρὸς ὕψος τὸ συ). καὶ ὡν σερεῶν παραδημεπιπέδων
„ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ίσα ἐσὶν ἐκεῖνα.

x. 460.

(1) Οὕτα τὸν ΙΓ. φέρει.

Μέρος Α'. Εἶσασται δὴ πρῶτον αἱ πρὸς τὴν βάσιν Πλευραὶ δρῦαι· Καὶ εἰ τῶν σερεῶν πσ., γκ τὰ ὄψι τεῖχοι, τὸ προτεφέν δῆλον· ίσοϋψή γὰρ ὄντα, ἔσαι (1) τὰ παραλληλεπίπεδα ὡς αἱ βάσεις. Εἴκειναι δὲ (2) ισα., καὶ αἱ βάσεις ἄρα, καὶ ὁ αὐτὸς ὅτως ἔστι λόγος ὁ κατ' ίσότητα τῶν ὄψων Α'· καὶ Β', τῷ κατ' ίσότητα τῶν Βάσεων Β' τε καὶ Α'.

Εἳναι δὲ ἄνισα, ἀπὸ τῆς μείζονος γγ γ αἰποτετμήθω ἢ ζε ίση τῇ συ, καὶ διὰ τὴν ἀχθύτω τὸ ἐπίπεδον εἰ παραλληλον τῷ ζκ. Ή μὲν οὖν Βάσις ἡτούτη πρὸς τὴν Βάσιν ζκ., ὡς τὸ σερεῶν (3) πσ πρὸς τὸ σερεὸν εκ τυτέσιν (επεὶ ισα ἔξι υποθ. ἔστι τὰ σερεὰ πσ., γκ) ὡς τὸ σερεὸν γκ πρὸς τὸ σερεὸν εκ, ἵτοι (4) ὡς γη πρὸς ει, τῦτο δὲ ἔστιν (5) ὡς γγ πρὸς εζ, καὶ ἐπομένως (6) ὡς γγ ἀντισρόφως πρὸς τὴν υσ. Ο. Ε. Δ.

Αλλ' ἔσασται δὴ αἱ Πλευραὶ πρὸς τὰς βάσεις πλαγιάζεσαι, καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Βάσεων ἀνισάθωσαν ἐν ὄψει τῷ αὐτῷ Παραλληλεπίπεδα ὄρθα, καὶ τέτοις (7) ισα ἔσαι τὰ Παραλληλεπίπεδα τὰ πλάγια· ἐπεὶ δὲ τὰ ὄρθα (διὰ τὸ ἀνωτ.) ἀντιπεπόνθασι τὰς βάσεις καὶ τὰ ὄψι, ἀντιπείσονται δὴ κάκεῖνα. Ο. Ε. Δ.

Μέρος Β'. Εἶσασται αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὄρθαι, καὶ τὰ ὄψι ισα· Καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις καὶ τὰ ὄψι (8) ἀντιπεπόνθασι, διὰ γε τὴν τέτων ίσότητα συνισωθήσονται κάκεῖναι, καὶ (9) ἐπομένως καὶ αὐτὰ Παραλληλεπίπεδα.

Εἶτα ἔσω τὰ ὄψι ἄνισα, καὶ αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὄρθαι, καὶ ἀπὸ τῆς μείζονος γγ λιφθύτω ίση τῇ υσ ἢ εζ. Τὸ γῆν σερεὸν πσ ἔστι πρὸς τὸ σερεὸν εκ, ὡς (10) εἰ πρὸς ζκ., τυτέσιν (11) ὡς γγ πρὸς υτ, ἵτοι (12) ὡς γγ πρὸς εζ· ὁπερ ἔστιν (13) ὡς γη πρὸς ει, ἵτοι (14) ὡς σερεὸν γκ πρὸς τὸ αὐτὸ σερεὸν εκ· Τὰ ἄρα σερεὰ πσ καὶ γκ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγου πρὸς τὸ αὐτὸ εκ, ίσα ἀλλήλοις ἔστι. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πλάγια τῶν Παραλληλεπιπέδων, τοῖς ἐπὶ ισων βάσεων ίσοϋψέσιν ὄρθοις (15) ισα ὄντα ἔστι, κάκεῖνα ἄρα, εἰ ἀντιπεπόνθασι τὰς βάσεις καὶ τὰ ὄψι, ισα ἀλλήλοις ἔστι.

Π ο ρ ή σ μ α τ α.

Τὰ περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀποδειχθέντα ἐν Προτ. ΚΘ. Λ. ΛΔ.

(1) ΛΒ. τᾶς ια'. (2) Εξ ὑποθ. (3) ΛΒ. τᾶς ια'. (4) ΚΕ τᾶς ια'. (5) Α. τᾶς ι. (6) Εκ κατ. (7) Λ. τᾶς ια'. (8) Εξ ὑποθ. (9) ΛΔ. τᾶς ια'. (10) ΛΒ. τᾶς ια'. (11) Εξ ὑποθ. (12) Εκ κατ. (13) Λ. τᾶς ι. (14) ΚΕ, τᾶς ια'. (15) Λ. τᾶς ια'.

ΛΒ. ΛΓ. ΛΔ. αὐτὰ ταῦτα προσήκουνται ἐσὶ καὶ τοῖς τριγωνικοῖς Πρίσμασιν, ἅττα ἡμίση τῶν παραλληλεπιπέδων ὄνται ἐσὶν, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ΚΗ'. Προτάσεως: Καὶ τοίνυν

Τὰ Τριγωνικὰ πρίσματα, ὃν ἴσαι τὰ ὑψη, εἰσὶ πρὸς ἀλλιὰλα ὡς αἱ Βά- Α'. χ. 461. σεις· καὶ ἐπομένως ἐὰν ἴσαις ἔχονται ἢ τάστα βάσεις καὶ τὰ ὑψη, καὶ ἀλλι- λοις αὐτὰ ἴσαι ἔσαι.

Εἶναι δὲ ὅμοια, τύτων δὲ λόγος τριπλασίων ἔσαι τῇ λόγῳ τῶν πλευρῶν Β. τῶν ἀπεναυτίον, τῶν ἴσων Γωνιῶν· καὶ ἐπομένως τὰ τῆς ΛΓ'. Προτ. Πρίσ- ματα κάκείνοις προσεπανύκουνται ἐσὶ.

Καὶ εἴ τις, αντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὑψη· καὶ εἰ ἀντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὑψη, ἵτα ἐσὶ.

Σ Χ Ό Λ : Ο ν.

Τὸ δέ τοι ἐνταῦθα ἐν Προτ. ΛΔ'. περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀπο- δειχθὲν, δειχθόσεται ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. Προτ. Θ'. καὶ περὶ τῶν Πυραμ- δῶν, καὶ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματ. τῆς Θ'. περὶ παντὸς Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ ΙΕ'. Προτ. περὶ τῶν Κώνων, καὶ τῶν Κυλίνδρων.

Π ρ ó τ α σ i c Λ E.

Διεξοδικωτάτη οὖσα ὑπεργεῖ εἰς δεῖξιν τῇ ἐφεξῆς, ἢν αὐτοὶ καὶ ταύτης χωρὶς ἀποδείξομεν.

Π ρ ó τ α σ i c Λ S.

„Εἴ τε Εὐθεῖαι ἀνάλογον ὁσιν (α , β , γ), τὸ ἐκ τῶν τριῶν σερεὸν χ. 462. „Παραλληλεπίπεδον (δδ), ισον ἐσὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (β) σερεῷ παραλλη- „πιπέδῳ (ii), ισοπλεύρῳ μὲν, ισογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Η τοῦ Παραλληλεπιπέδου δὲ βάσις ζδ, ἐχέτω Πλευρὰν τὴν εζ = α , καὶ τὴν ἑτέραν Πλευρὰν εδ = γ , τὴν δὲ δὴ τῇ βάσει ἐφιζαμένην Πλευρὰν εη = τῇ μέσῃ β, καὶ ὅτως ἔσαι τὸ δδ Παραλληλεπίπεδον ἐκ τῶν τριῶν α , β , γ . Εἶτα τοῦ Παραλληλεπιπέδου ii αἱ τρεῖς πλευραὶ λχ, ιχ, χμ (καὶ ἐπομένως καὶ λοιπαὶ) ισαι ἔσωσαν τῇ μέσῃ β. ή δὲ κατὰ τὸ χ σερεὰ Γωνίᾳ τάττε τῇ κατὰ τὸ ε σερεῷ Γωνίᾳ ἐκείνης ιση γινέσθω, καὶ ὅτως ἔσαι τὸ ii παραλλη- πίπεδον ἀπὸ τῆς μέσης β, καὶ ισογωνίου τῷ προτέρῳ φημὶ δὴ ὅτι καὶ ισον.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. καὶ κατασκ. ὡς ζε : λχ, ὅτως ἀντισρόφως ιχ :