ατ, αζ, ἐλλείποντα Παραλληλογράμμοις ιθ, πε, τῷ Παραλληλογράμμῳ αδ, εἶτ' οὖν γε, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ ἀναγραφομένῳ ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, ἔςαι ιβ + πβ = αβ, τουτέςιν απ = ιβ. Προσκβληθείσης γὰρ τῆς ικ ἐπὶ τὸ μ, διότι (1) ατ = αζ, ἀφαιρεθέντος τοῦ κοινοῦ αξ, ἔςαι τὸ ητ = πζ = (2) θμ· ἄρα (3) καὶ ηξ = ζθ, καὶ (4) ἑπομένως απ = ιβ.

Πρότασις ΚΗ.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ), τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (γ) ἴσον „Παραλληλόγραμμον (αι) παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ „(ξν) ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι (δ). Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον Εὐθύγραμμον (γ), „ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ (ς) μεῖζον εἶναι (τοῦ αη) τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμι„σείας (τῆς αβ δηλ.) παραβαλλομένη, ὁμοίων ὄντων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμι„σείας παραβαλλομένου (αη), καὶ τοῦ ἐλλείμματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (εζ), „καὶ τοῦ (δ), ᾧ δεῖ ὅμοιον (ξν) ἐλλείπειν τ, Παραλληλογράμμου.

κ. 398. Δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπὶ τῆς αε (6) συνεςάσθω τῷ δοθέντι Παραλληλογράμμῳ δ ὅμοιον Παραλληλόγραμμον τὸ αη, καὶ πληρούσθω τὸ Παραλληλόγραμμον αζ· οὕτω δὲ ἔςαι καὶ τὸ εζ τῷ αη, καὶ ἑπομένως τῷ δοθέντι δ ὅμοιον· ἔςαι δὲ τὸ αὐτὸ εζ τῷ αη καὶ ὁμοίως κείμενον καὶ ἴσον· Ἐπεὶ δέ τοι ὡς ὁ διορισμὸς βούλεται, τὸ αη οὐκ ἔλαττον ἐςὶ τοῦ Εὐθυγράμμου γ, ἔςαι δή που ἤτοι ἴσον αὐτῷ ἢ αὐτοῦ μεῖζον· Καὶ εἰ μὲν αη = γ, ἐγένετο ἤδη τὸ ζητηθέν· Παρὰ γὰρ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον παρεβλήθη Παραλληλόγραμμον τὸ αη, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ εζ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Εἰ δὲ τὸ αη Παραλληλόγραμμον τοῦ Εὐθυγράμμου γ μεῖζον εἴη, εὑρεθήτω δὴ (7) ἡ ὑπεροχὴ τοῦ αη ἢ τοῦ εζ ἡ ὑπὲρ τὸ γ· καὶ τῇ μὲν ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ εζ ὅμοιόντε καὶ ὁμοίως κείμενον συνεςάσθω (8) Παραλληλόγραμμον τὸ κλ, κοινὴν ἔχον Γωνίαν μετὰ τοῦ εζ τὴν πρὸς τῷ η· καὶ οὕτω τὰ Παραλληλόγραμμα εζ, κλ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ηιβ (9) εἰσί. Προσκβληθήτω δὴ ἡ κι πρὸς τὸ μ καὶ ν, ἡ δὲ λι πρὸς τὸ ξ, καὶ ἔςαι τὰ Παραλληλόγραμμα ξν, εζ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ηβ, καὶ ἑπομένως (10) ὅμοια, ὥςε (11) καὶ τὸ ξν ὅμοιον ἐςὶ τῷ δοθέντι δ· Ἐπειδὴ δὲ κλ ἐςὶν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ

(1) Ἐξ ὑπ. (2) ΜΓ. τοῦ α'. (3) Α. τοῦ ς'. (4) ΛΔ. τοῦ α'. (5) Διὰ τὴν πρὸ ταύτ. (6) ΙΗ. τοῦ ς'. (7) Διὰ τὸ Πόρ. τῆς ΜΕ. τοῦ α'. (8) Διὰ τὴν ΚΕ. τοῦ ς'. (9) Κς. τοῦ ς'. (10) ΚΔ. τοῦ ς'. (11) ΚΛ. τοῦ ς'.

Παραλληλογράμμε εζ, ὑπὲρ τὸ δοθὲν Εὐθύγραμμον γ, ἐὰν ἀπὸ τȣ̃ Παραλληλογράμμε εζ ἀφαιρεθῇ τὸ κλ, ἔςαι τὸ λοιπὸν ἴσον τῷ γ· Καὶ ἔςαι τοίνυν τὸ Εὐθύγραμμον γ ἴσον τοῖς Παραλληλογράμμοις εν, ιζ ἅμα ληφθεῖσι, τȣτέςι (διὰ (1) τὸ εν = ακ, καὶ (2) ιζ = αι) ἴσον τῷ Παραλληλογράμμῳ αι. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ αι, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ ξν, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

Ἐκ τῆς δευτέρας ὑποθέσεως καὶ τȣ̃ Α'. τῶν Πορισμάτων τῆς ἀνωτέρω Προτ., καὶ ἄλλη τις μέθοδος ἀνακύπτει τῆς κατασκευῆς τȣ̃ Προβλήματος. Α'. μέλειτοι ἐὰν ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, συςαθέντων ὡς πρότερον τῶν αη, εζ τῷ δοθέντι δ ὁμοίων, προσκβληθῶσιν ἥτε τȣ̃ εζ Πλευρὰ εη, καὶ ἡ Διαγώνιος βη, καὶ περὶ ταύτην ἐν Γωνίᾳ, ἥτις ἂν εἴη τῇ ὑπὸ εηζ ἀντίθετος κατὰ κορυφὴν, γένηται (3) Παραλληλόγραμμον σητπ, ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τȣ̃ αη, εἴτ' οὖν τȣ̃ εζ ὑπὲρ τὸ Εὐθύγραμμον γ, καὶ τῷ ηζβ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἔνθεν τοι γὰρ τὸ στ ὅμοιον ἔςαι καὶ ὁμοίως κείμενον, καὶ δὴ (4) καὶ ἴσον τῷ κλ ἐν τῇ κατασκευῇ τῇ ἀνωτέρω. Προσκβληθεισῶν τοίνυν τῶν αθ, βζ, πσ, πτ, πληρȣ́σθω τὰ Παραλληλόγραμμα απ, φρ, καὶ ἔςαι (5) φρ ὅμοιον τῷ εζ, καὶ ἑπομένως καὶ τῷ δοθέντι δ, διὰ δὲ τὰ στ καὶ κλ ὅμοια ὄντα, καὶ ὁμοίως κείμενα καὶ ἴσα, ἔςαι ση = ηλ, τȣτέςι (6) φε = εξ· ὅθεν δὴ (7) αφ = ξβ, καὶ (8) απ = αι = γ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ απ, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ φρ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Κ. 399.

Πορίσματα.

Ἐὰν τὸ δοθὲν Παραλληλόγραμμον δ Τετράγωνον ᾖ, τὸ Πρόβλημα οὕτως ἐξενεχθήσεται. Δ. κ. 400.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον „Ὀρθογώνιον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον Τετραγώνῳ· Καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν παραβληθήσεται Ὀρθογώνιον τὸ αι, ἐλλεῖπον Τετραγώνῳ τῷ ξν, ἡ

(1) Λς. τȣ̃ α'. (2) ΜΓ. τȣ̃ α'. (3) ΚΕ. τȣ̃ ς'. (4) Λξ. Δ. τȣ̃ α'. (5) ΚΔ. τȣ̃ ς'. (6) ΛΔ. τȣ̃ ς'. (7) Λξ. Γ. τȣ̃ α'. (8) Δ. Πόρ. τῆς ἀνωτ.

Ὀρθογώνιον τὸ απ ἐλλεῖπον Τετραγώνῳ τῷ φρ· Ἔνθεντοι ἐπεὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Προτ. ταύτης, ἡ γᾶν τὴν ἐν τῷ Σχολίῳ, τὸ Ὀρθογώνιον αι συνάμα τῷ Τετραγώνῳ κλ, ἡ (ὃ ταυτόν ἐςι) τὸ Ὀρθογώνιον απ συνάμα τῷ Τετραγώνῳ στ, ἴσον ἐςὶ τῷ Τετραγώνῳ αη, ἡ τῷ εζ, φανερὸν ὅτι ἡ Ε΄. Πρότασις τᾶ Β΄. Βιβλίȣ, ἐκ ταύτης τῆς ΚΗ΄. τᾶ ς΄. ἀμέσως ἐπιφέρεται· Οὕτω γὰρ ἐςι προτιθεμένη ἡ τᾶ Β΄. πέμπτη.

„Ἐὰν ἡ Εὐθεῖα ἡ αβ εἰς ἴσα τετμημένη αε, εβ, καὶ εἰς ἄνισα αξ, ξβ, „ἡ αφ, φβ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον αι, „ἡ απ, μετὰ τᾶ ἀπὸ τῆς μεταξὺ εζ, ἡ εφ Τετραγώνȣ κλ, ἡ στ, ἴσον „ἐςὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αε, ἡ εβ. Αὕτη γὰρ δὴ ἡ Πρότασις τῆς ἐν χερσὶν ΚΗ΄., ἡ ἐν μέρει ληφθεῖσα ὑπόθ. δηλ. τᾶ τὸ δοθὲν Παραλληλόγρ. εἶναι Τετράγ. ἐςὶ, περὶ ἧς ἐν τῷ Πορίσματι εἴρηται.

β΄. Δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ καὶ τᾶ Εὐθυγράμμȣ γ, διὰ ταύτης τῆς ΚΗ΄. καὶ τᾶ μετ' αὐτὴν Σχολίȣ, ληφθήσεται ἡ ξβ, ἡ φβ Πλευρὰ τᾶ Τετραγώνȣ, ᾧ ἐλλείπει τὸ Ὀρθογώνιον αι, ἡ απ, τὸ τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον, καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον. Ἀντὶ γὰρ τῆς ἀγνοȣμένης πηλικότητος κείθω υ, καὶ αν = αβ × υ, καὶ ξν = υ^{2}· ὥςε αι = αν — ξν = αβ × υ — υ^{2} = γ. Τὸ δ' αὐτὸ ἐπαχθήσεται καὶ ἂν ὑποτεθῇ υ = φβ, ἔςαι γὰρ απ = αρ — φρ = αβ × υ — υ^{2} = γ. Καὶ τᾶτο δὴ τὸ πρῶτον τυγχάνει (1) τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, ὅπερ ἐκ τῆς ΚΗ΄. ταύτης οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν ἐπελύοντο, πηλικότητα ἐξευρίσκοντες ἀγνοȣμένην τὴν ξβ, ἡ φβ παραβολῇ Ὀρθογωνίȣ τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσȣ, παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, εἴδει Τετραγώνῳ ἐλλείποντος. Πρόδηλον δὲ ὡς τὸ πρῶτον τȣτὶ εἶδος διττῆς ἐςιν ἐπιδεκτικὸν ἐπιλύσεως, τὸ γάρτοι υ ἤτοι διὰ τῆς ξβ, ἡ διὰ τῆς φβ ἔχοι ἂν ἀναπτύσσεσθαι, ὧν ἡ μὲν ξβ διὰ τῆς ἐν τῇ προτάσει, ἡ δὲ φβ διὰ τῆς ἐν τῷ Σχολίῳ κατασκευῆς ἐξευρεθήσεται. Δῆλον δὲ καὶ ἐκ τᾶ Β΄. Πορίσματ. τῆς ΚΖ΄. Προτ., ὡς αἱ δύω ἐκεῖναι πηλικότητες ἅμα ληφθεῖσαι ξβ + φβ, τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ αβ ἴσαι εἰσί· Διὸ ὐδὲ εἰς εὕρεσιν ἑκατέρας διττῆς ἐςι κατασκευῆς χρεία, θατέρας γὰρ εὑρεθείσης, οἷον τῆς ξβ, καὶ ἡ ἑτέρα, τȣτέςιν ἡ αξ, εἴτ' οὖν ἡ φβ ἔςαι κατάδηλος.

γ΄. Καὶ ἡ Μέθοδος δὲ, ᾗ χρῆθαι εἰώθασιν οἱ νεώτεροι εἰς τὴν τῶν ἐξισώσεων τᾶ τοιȣτȣ εἴδȣς ἐπίλυσιν, ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ αὐτὴ τῆς ἐν χερσὶν

(1) Ὅρα Συγτάξȣ κλεῖδα Μαθηματ. Κ. ις. ἀριθμ. θ.

ΚΗ'. ἐπάγεται· Ἐπεὶ γὰρ υ ἤτοι φβ = αξ ἐςὶν, ἢ ξβ, καὶ αξ = $\frac{1}{2}$ αβ + εξ, καὶ εξ = κι, καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ΚΗ'. Προτ. κι^{T} = εβ^{T} — γ = (1) $\frac{1}{4}$ αβ^{T} — γ, ἔςαι κι, ἢ εξ = $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{\mathrm{T}} - \gamma}$· Καὶ υ ἄρα ἔςαι:

Ἤτοι αξ = $\frac{1}{2}$ αβ + $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{\mathrm{T}} - \gamma}$.

Ἢ ξβ = $\frac{1}{2}$ αβ — $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta - \gamma}$.

Ὥςε ἐπὶ τῇ ἐξισώσει αβ × υ — υ^{T} = γ, ἡ μέθοδος ἐςὶ $\frac{1}{2}$ αβ ± $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{\mathrm{T}} - \gamma}$ = υ· Ὁρα Οὐγτρέδιον ἔνθα ἀνωτ.

Ἐνθεντοι ἐπὶ τῇ ἐξισώσει αβ × υ — υ^{T} = γ, δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ, καὶ τοῦ Εὐθυγράμμου γ, εὐχερέςερον εὑρεθήσεται ἡ υ, ἐὰν τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον (2) Τετράγωνον συςαθῇ, οὗτινος Πλευρὰ ἐκ τῆς τοιᾶςδε κατασκευῆς εὑρισκομένη εἴη ω, ἢ δή περ ἀπὸ τοῦ ε μεσαιτάτου τῆς δοθείσης αβ Κάθετος ἀχθείη ἴση ἡ εχ, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ χ, Διαςήματι δὲ τῷ χξ = $\frac{1}{2}$ αβ, τόξον Κύκλου καταγραφείη τέμνον τὴν αβ κατὰ τὸ ξ· Τηνικαῦτα γὰρ αἱ αξ, ξβ, ἔσονται αἱ δυνάμεις τῆς υ· Καὶ γὰρ υ = (3) $\frac{1}{2}$ αβ ± $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{\mathrm{T}} - \gamma}$. Ἀλλ' ἐκ κατασκ. ἔςι χξ^{T} = $\frac{1}{4}$ αβ^{T}, καὶ χε^{T} = γ, ἄρα εξ^{T} ἤτοι (4) χξ^{T} — χε^{T} = $\frac{1}{4}$ αβ^{T} — γ· Ἄρα εξ = $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta - \gamma}$, καὶ αξ = $\frac{1}{2}$ αβ + εξ = $\frac{1}{2}$ αβ + $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{\mathrm{T}} - \gamma}$, ὥσπερ δὴ καὶ ξβ = $\frac{1}{2}$ αβ — εξ = $\frac{1}{2}$ αβ — $\sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{\mathrm{T}} - \gamma}$.

Πρότασις ΚΘ.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ), τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (γ) ἴσον „Παραλληλόγραμμον (αι) παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει Παραλληλογράμ„μῳ (μλ) ὁμοίῳ τῷ δοθέντι (δ).

Δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπὶ τῆς εβ Εὐθείας (5) συνεςάτω Παραλληλόγραμμον τῷ δοθέντι δ ὅμοιον τὸ βεζη· τοῖς δὲ δὴ γ καὶ εη ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον, τῷ δὲ ζεβη ὅμοιον, καὶ ὁμοίως κείμενον γινέσθω (6) Παραλληλόγραμμον τὸ ζκιθ, κοινὴν ἔχον σὺν ἐκείνῳ Γωνίαν τὴν πρὸς τῷ ζ· Ἔσονται (7) τοίνυν τὰ Παραλληλόγραμμα εη, θκ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ζβι. Προεκβληθήτωσαν δὴ αἱ αβ, ηβ, ἐπὶ λ καὶ μ· καὶ ἐπειδὴ ὅμοιον τὸ εη τῷ δ ἐκ κατασκευῆς, καὶ μὴν (8) καὶ τῷ μλ, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰςὶ τὰ εη, μλ, ἕπεται δή πα (9) καὶ τὸ μλ αὐτὸ τῷ δ ὅμοιον εἶναι. Προεκβληθείσης οὖν τῆς μκ, πληρώσθω τὸ Παραλληλόγραμμον αμ, καὶ ἔςαι ακ (10) = κβ =

(1) Γ. Πόρισ. τῆς Δ. τοῦ β'. (2) ΙΔ. τοῦ β'. (3) Γ. Πόρ. τῆς παρόσ. (4) ΜΖ. τοῦ α. (5) ΙΗ. τοῦ ς'. (6) ΚΕ. τοῦ ς'. (7) Κς. τοῦ ε'. (8) ΚΔ. τοῦ ς'. (9) ΚΔ. τοῦ ς'. (10) Δς. τοῦ α'.

(1) βϑ. Ἐὰν οὖν τοῖς ἴσοις ακ, βϑ, κοινὸν προςεϑῇ τὸ κλ, ἔςαι αι Παραλληλόγρ. ἴσον τοῖς Παραλληλογράμμοις κλ ϗ βϑ ἅμα ληφϑεῖσι· Τὸ δέ τοι κϑ (τυτέςιν ειη + κλ + βϑ) ἴσον ἐςὶ τοῖς ειη + γ ἐκ κατασκευῆς, ἀφαιρεϑέντος ἄρα τȣ̃ κοινȣ̃ ειη, ἔςαι γ = ηλ + βϑ = αι. Παρὰ τὴν δοϑεῖσαν ἄρα Εὐϑεῖαν αβ, τῷ δοϑέντι Εὐϑυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ αι, ὑπερβάλλον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ μλ, ὁμοίῳ τῷ δοϑέντι δ. Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ.403. Α'. Ἐὰν ᾖ τὸ Παραλληλόγραμμον δ Τετράγωνον, αἰτεῖται τὸ Πρόβλημα „παρὰ τὴν δοϑεῖσαν Εὐϑεῖαν αβ, τῷ δοϑέντι Εὐϑυγράμμῳ γ ἴσον Ὀρϑο„γώνιον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον Τετραγώνῳ." Ἐπεὶ δὲ διὰ τὴν κατασκ. Ὀρϑογώνιον τὸ αι συνάμα τῷ Τετραγώνῳ ειη, ἴσον ἐςὶ τῷ Τετραγ. κϑ, εὔδηλον ὡς ἡ ς'. τῶν τȣ̃ Β'. Βιβλίȣ Προτάσεων, ἐκ ταύτης τῆς ΚΘ'. τȣ̃ ς'. ἀμέσως ἂν ἐπαχϑείη. Αὕτη γὰρ ἐκείνη. „Ἐὰν Εὐϑεῖα ἡ αβ δίχα ᾖ τετμημένη κατὰ „τὸ ε, προςεϑῇ δέ τις αὐτῇ Εὐϑεῖα ἐπ' εὐϑείας ἡ βλ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης „σὺν τῇ προσκειμένῃ αλ ϗ τῆς προσκειμένης βλ περιεχόμενον Ὀρϑογώνι„ον, ἤτοι τὸ αι, μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας Τετραγώνȣ ειη, ἴσον ἐςὶ τῷ Τε„τραγώνῳ κϑ, τῷ ἀπό τε τῆς ἡμισείας ϗ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ελ „ἢ κι ἀναγραφέντι" Οὐδὲν οὖν ἕτερον ἡ τȣ̃ Β'. ἔκτη προτίϑηςι Πρότασις, ἢ τὸν κατὰ τὴν ΚΘ'. τȣ̃ ς'. διορισμὸν, ὃν ἡ ἐν τῷ Πορίσματι ὑπόϑεσις βάλεται.

Β'. Δοϑείσης τῆς αβ καὶ τȣ̃ Εὐϑυγράμμȣ γ, διὰ τῆς ἐν χερσὶ Προτάσ. εὗρον οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν τὰς αλ, λι, ὑφ' ὧν τὸ αι Ὀρϑογώνιον τὸ ἴσον τῷ δοϑέντι Εὐϑυγράμμῳ γ περιέχεται, καὶ ὃ παρὰ τὴν δοϑεῖσαν αβ οὕτω παραβαλεῖν δεῖ, ὡς ὑπερβάλλειν εἴδει Τετραγώνῳ. Αἱ γεμὴν Πλευραὶ αὗται παρὰ τοῖς ὕςερον ἀναλυταῖς (2) διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν κατὰ τὸ Β'. ϗ Γ'. εἶδος διατεϑειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων ἐξευρίσκονται. Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τῆς Πλευρᾶς λι τεϑῇ ε, ἔςαι μλ = $ε^{T}$, ϗ αμ = ε × αβ· ὥςε αι τυτέςι τὸ γ = $ε^{T}$ + ε × αβ, ὃ τὸ τρίτον ἐςὶ τῶν Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, καϑ' ὃ διὰ τῆς παρούσης Προτάσ. ἐξευρίσκεται τὸ ε, τυτέςιν ἡ βλ, ἤτοι ἡ λι, παραβολῇ Ὀρϑογωνίȣ τῷ δοϑέντι Εὐϑυγράμμῳ γ ἴσȣ, παρὰ τὴν δοϑεῖσαν Εὐϑεῖαν αβ, ϗ ὑπερβάλλοντος Τετραγώνῳ. Εὑρεϑείσης δὲ τῆς Πλευρᾶς λι, ἤτοι ε, δήλη ἅμα ἔςαι ϗ ἡ ἑτέρα Πλευρὰ αλ = αβ × ε, ἣν οἱ νεώτεροι εὑρεῖν ἐπιτηδεύονται τῇ κατὰ τὸ Β'. εἶδος ἀναλύσει τῆς ἐξισώσεως.

(1) ΜΓ· τȣ̃ α'. (2) Ὅρα Ουγτρέδ! ἐν Κλειδὶ Κ'. Ις'. Ἀριθμ. Θ.

Καὶ τοῦτο δὲ τὸ Β'. εἶδος τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων, Γ'.
εὑρεθεισῶν διὰ τὸ ἄνωτ. Πόρ. τῶν τοῦ Ὀρθογωνίου αι (τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσου, παρὰ τὴν δοθεῖσαν αβ παραβεβλημένου, καὶ ὑπερβάλλοντος εἴδει Τετραγώνῳ) Πλευρῶν αλ, λι, οὕτω κατασκευάζεσθαι δύνται.

Ἀναγεγράφθω δὴ (1) τὸ ἀπὸ τῆς αλ, εἶτ' οὖν τῆς ιφ Τετράγωνον ιφπρ, οὗ ἂν μέρος εἴη τὸ Ὀρθογώνιον αι· Καὶ ἐπειδὴ αλ = ιρ, καὶ βλ = λι, ἔσται (2) λρ = αβ· Ἐὰν οὖν ἀντὶ τῆς αλ τεθῇ α, ἔσται τὸ φρ = $α^{\text{Τ}}$, καὶ αρ = α × αβ· Ἐνθεντοι αι, εἶτ' οὖν γ = (φρ — αρ =) $α^{\text{Τ}}$ — α × αβ· Καὶ τοῦτο τὸ τῶν Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων Β'. εἶδος, ὃ δεῖ διὰ τοῦ παρόντος Πορίσματος κατασκευάζειν.

Καὶ τῶν Νεωτέρων δὲ αἱ μέθοδοι (3) (τουτέστι $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ + $\frac{1}{2}$ αβ = α, καὶ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ αβ + γ — $\frac{1}{2}$ αβ = ε), δι' ὧν ἐκ μὲν τῆς ἐξισώσεως $α^{\text{Τ}}$ — α × αβ = γ εὑρίσκεται τὸ α, ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $ε^{\text{Τ}}$ + ε × αβ = γ εὑρίσκεται τὸ ε, κατασκευῇ τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσ. ἐπαχθῆναι δύνανται· Ἐπειδὴ γὰρ εβ = $\frac{1}{2}$ αβ, ἔσται εη = (4) $\frac{1}{4}$ $αβ^{\text{Τ}}$, διὰ δὲ τὴν τῆς παρούσ. κατασκευὴν κθ = εη + γ = $\frac{1}{4}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ, καὶ τούτου ἡ Πλευρὰ κι, εἶτ' οὖν ἡ ελ = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ, ἥπερ ἐὰν ἡ κε, ἢ γοῦν $\frac{1}{2}$ αβ προσεθῇ, ἔσται αλ ἤτοι α = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ + $\frac{1}{2}$ αβ· Ἐὰν οὖν ἀπὸ ελ = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ ἀφαιρεθῇ εβ, ἤτοι $\frac{1}{2}$ αβ, ὑπολειφθήσεται βλ, εἶτ' οὖν ε = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ — $\frac{1}{2}$ αβ.

Ἐκ τούτων δὲ τῶν μεθόδων ἐφ' ἑκατέρας τῆς ἐξισώσεως, εἴτε τῆς $α^{\text{Τ}}$ — α × αβ = γ, εἴτε τῆς $ε^{\text{Τ}}$ + ε × αβ = γ, δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ, καὶ τοῦ Εὐθυγράμμου γ, εὐχερέστερον ἐξευρίσκονται αἱ α καὶ ε, ἐὰν τῷ Εὐθυγράμμῳ γ Τετράγωνον ἴσον (5) κατασκευασθῇ, ἥπερ ἡ ἐντεῦθεν εὑρισκομένη Πλευρὰ εἴη ν, ἥπερ ἀπὸ τοῦ μεσαιτάτου τῆς Εὐθείας αβ Κάθετος ἀχθείη εξ, καὶ ἐπιζευχθείη ξβ, ἥπερ ἴση ἐπὶ τῆς εβ προσκβληθείσης ληφθείη ἡ ελ· ἔσται γὰρ αλ = α, καὶ βλ = ε· Ἐπειδὴ γὰρ $εξ^{\text{Τ}}$ = (6) γ, ἔσται $εβ^{\text{Τ}}$ + $εξ^{\text{Τ}}$ = $\frac{1}{4}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ = (7) $ξβ^{\text{Τ}}$ = $ελ^{\text{Τ}}$· Ὥστε ελ (8) = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ, καὶ αλ = (9) $\frac{1}{2}$ αβ + $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ = α, καὶ βλ = (10) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $αβ^{\text{Τ}}$ + γ — $\frac{1}{2}$ αβ = ε. Ε'. κ. 404.

(1) Μς. τοῦ α'. (2) Λξ. Γ. τοῦ α'. (3) Ὅρα Οὐγτρέδ. ἔνθα ἀνωτ. (4) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ β'. (5) ΙΔ. τοῦ β'. (6) Ἐκ κατ. (7) ΜΓ. τοῦ α'. (8) Δξ. ιά. (9) Δξ. β'. (10) Δξ. γ'.

Πρότασις Λ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) ὅτω τεμεῖν, ὡς εἶναι τὴν ὅλην αβ πρὸς „τὸ ἕτερον τῶν Τμημάτων αγ, ὡς τὸ αὐτὸ ἐςὶ Τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν (γβ).

„Τυτέςιν (ὡς οἱ Γεωμέτραι φαςὶ) τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν πεπερασμένην „ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

κ. 405. Ἐπὶ τῆς Εὐθείας αβ ἀναγραφήτω Τετράγωνον τὸ αβτζ, καὶ παρὰ τὴν Εὐθεῖαν ζα, τῷ Τετραγώνῳ ζβ παραβληθήτω (1) ἴσον Ὀρθογώνιον τὸ ζξλι, ὑπερβάλλον εἴδει αλ τῷ ζβ ὁμοίῳ· τὸ γὰρ αλ Τετράγωνον ἐςίν· Ἐπεὶ δὲ ζλ = ζβ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ζγ, ἔςαι αλ = ξβ, διὰ δὲ τὰς Ὀρθὰς καὶ ἑπομένως ἴσας Γωνίας ὑπὸ ξγβ, αγλ (2), ἔςαι ξγ : γλ : : αγ : γβ· Ἀλλὰ (3) ξγ = αζ = αβ, καὶ γλ = αγ, ἄρα αβ : αγ : : αγ : γβ· Γέγονε τοίνυν τὸ ζητούμενον.

Ἄλλως.

κ. 406. Διὰ τὴν ΙΑ΄. τοῦ Β΄. ὅτω τέμε τὴν αβ κατὰ τὸ γ, ὡς τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ αβ, γβ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ· Οὕτω γὰρ ἔςαι τετελεσμένον κτ.

Ἔςαι γὰρ διὰ τὴν ΙΖ΄. αβ : αγ : : αγ : γβ.

Τῆς δὲ τομῆς ταύτης θαυμασία ἡ δύναμις εἰς τὴν τῶν Κανονικῶν σχημάτων ἐγγραφὴν καὶ παράθεσιν.

Πρότασις ΛΑ.

κ. 407. „Ἐν τοῖς Ὀρθογωνίοις Τριγώνοις (αγβ), τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν Γωνίαν „ὑποτεινούσης Πλευρᾶς εἶδος (ζ) ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν πε„ριεχουσῶν Πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις (κ καὶ λ).

Ἡ κατὰ τὸ Α΄. Βιβλίον ΜΖ΄. ἐπὶ τοῦ παρόντος καθολικεύεται.

Ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ καθείσθω Κάθετος ἡ γξ· ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς αβ, βγ, βξ (4) ἀνάλογον εἰσὶν, ἔςαι ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον κ, ὡς (5) αβ πρώτη πρὸς βξ τρίτην. Πάλιν ἐπειδὴ (6) βα, αγ, αξ, τρεῖς ἀνάλογον εἰσὶν, ἔςαι ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον λ, ὡς βα πρώτη πρὸς αξ τρίτην· Ἐπεὶ τοίνυν ζ πρὸς κ ὡς αβ πρὸς βξ, καὶ ζ πρὸς λ ὡς αβ πρὸς αξ, ἔςαι καὶ ζ πρὸς

(1) ΚΘ. τοῦ ς΄. (2) ΙΔ. τοῦ ς΄. (3) ΛΔ. τοῦ α΄. (4) Πόρ. Β΄. τῆς Η. τοῦ ς΄. (5) Β. Πόρ. τῆς Κ. τοῦ ς΄. (6) Β. Πόρ. τῆς Κ. τοῦ ς΄.

κ καὶ λ ἅμα ληφθέντα, ὡς αβ (1) πρὸς βξ καὶ αξ ἅμα ληφθείσας. Ἀλλὰ μὴν ἡ αβ ταῖς δυσὶ βξ, αξ ἴση ἐςίν, ἄρα καὶ τὸ ζ τοῖς δυσὶ κ καὶ λ ἴσον ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς Προτάσεως καὶ Σχημάτων ὁποσωνοῦν καὶ ὁποιωνοῦν ὁμοίων πλήθει, ἔντι ληφθήσεται ἴσον τε καὶ ὅμοιον παραπλησίᾳ μεθόδῳ τῇ κατὰ τὸ Α΄. Πρόβλημα τὸ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΖ΄. τοῦ Α΄., δι' οὗ ὁποσοισοῦν Τετραγώνοις ἴσον ἐν ἀνεγράφετο, πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ΄. τοῦ Α΄. λεπτέον τὴν ΛΑ΄. τοῦ ς΄.

Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ, καὶ διὰ τοῦ Β΄. Προβλήματος τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ ἐκείνῳ Σχολίῳ, δοθήσεται καὶ ἡ τῶν ὁμοίων Σχημάτων ὁμοία ὅσα διαφορά· τουτέςιν οὐ μόνον συνάπτεσθαι δύνανται, ἀλλὰ καὶ ἀφαιρεῖσθαι τὰ Σχήματα τὰ ὅμοια ἀπ' ἀλλήλων, ὁποῖα ποτ' ἂν ᾖ, τὸ ἔλαττον δηλονότι ἀπὸ τοῦ μείζονος, καθάπερ ἐν τῷ εἰρημένῳ Σχολίῳ καὶ τὰ Τετράγωνα ἀλλήλοις τε συνάπτεται καὶ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖται.

Πρότασις ΛΒ.

Οὐδὲν οὐδὲ χρήσιμον ἐςὶν ἐν αὐτῇ, οὐδὲ λόγου ἄξιον· Ὑπετέθη δὲ ὅμως ἡμῖν ἀνωτέρω ἐν τῷ Η΄. Πορίσματι τῶν μετὰ τὴν Κς΄. Πρότασιν.

Πρότασις ΛΓ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις, ἢ τῷ αὐτῷ, αἱ Γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχου„σι ταῖς Περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν (ακγ, ζηδ), ἐάν τε πρὸς τοῖς Κέν„τροις (ὡς αἱ αβγ, ζξδ), ἐάν τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις (ὡς αἱ αργ, ζσδ) „ὦσι βεβηκεῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ Τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς Κέντροις συνιςάμενοι.

Τὸ γοῦν περὶ τῶν πρὸς τοῖς Κέντροις Γωνιῶν, καὶ δὴ καὶ τὸ περὶ τῶν Τομέων παραπλησίῳ λόγῳ δειχθήσεται, ᾧ καὶ ἐπὶ τῆς Α΄. Προτάσ. τοῦ παρόντος Βιβλίου ἐδείχθη τὰ τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος Τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Βάσεις, εἰμὴ ὅτι ἀντὶ τῆς ἐκεῖσε ληφθείσης ΛΗ΄. Προτάσ. τοῦ Α΄. Βιβλίου, λεπτέον ἐνταῦθα τὴν ΚΘ΄. τοῦ Γ΄., καὶ ἀντὶ δὲ τοῦ ε ἐκεῖσε τοῦ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ Τριγώνου δεζ, θετέον ἐνταῦθα ξ, ὅπερ ἡ κατὰ κορυφὴν Γωνία ἐπίσημαίνεται τῆς τε Γωνίας καὶ τοῦ Τομέως δξζ, ἀντὶ δὲ τῶν ἐν ἐκείνοις Τριγώνων, κ. 408.

(1) ΚΔ. τοῦ ε΄.

ληφθήτωσαν ὧδε αἱ πρὸς τοῖς Κέντροις β καὶ ξ Γωνίαι, καὶ δὴ καὶ οἱ Τομεῖς, καὶ τελευταῖον ἀντὶ τῶν ἐν ἐκείνοις Βάσεων, ὧδε αἱ Περιφέρειαι.

Ὁσάκις γὰρ μόριον ὁποιονοῦν τριτημόριον φέρε τὸ δη, τῆς Περιφερείας δζ, περιέχεται ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, τοσάκις τὸ ὅμοιον μόριον, οἷον τὸ ὑπὸ δξη, τῆς ὑπὸ δξζ Γωνίας ἔσται περιεχόμενον ἐν τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ ὁποιονδήποτε ἕτερον μόριον τῆς Περιφερείας δζ, καὶ τῆς Γωνίας ὑπὸ δξζ, ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, καὶ τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ ἰσαρίθμως ἀεὶ περιέχεται. Κατὰ ἄρα τὸ γνώρισμα τῶν ἴσων λόγων τὸ παρὰ Ταπουσεῖῳ, ἔσται ἡ ὑπὸ αβγ Γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ δξζ Γωνίαν, ὡς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸν Τομέα αβγ εἶναι πρὸς τὸν Τομέα δξζ, ὡς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ Γωνίαι ρ καὶ σ ἡμίσειαι (1) εἰσὶ τῶν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνιῶν ὑπὸ αβγ, ζξδ, τὸ περὶ τούτων δεδειγμένον καὶ περὶ ἐκείνων ἔσται.

Πορίσματα.

κ. 409. Α'. Ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία ὑπὸ βαγ ἐστὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὀρθὰς, ὡς ἡ Περιφέρεια βγ ἐφ' ᾗ βέβηκε, πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

Ἐπειδὴ γὰρ τὰς τέσσαρας Ὀρθὰς, τουτέστι (2) πάσας τὰς περὶ τὸ αὐτὸ Κέντρον α Γωνίας καταμετρεῖ ὅλη ἡ τοῦ Κύκλου Περιφέρεια, τὴν μίαν ἄρα ὀρθὴν Γωνίαν, ἤτοι τὴν ὑπὸ βαζ, καταμετρήσει τῆς ὅλης Περιφερείας τὸ τεταρτημόριον βζ. Ἀλλὰ γὰρ ὡς ἔχει ἡ ὑπὸ βαγ Γωνία πρὸς τὴν Ὀρθὴν ὑπὸ βαζ, οὕτω (διὰ ταύτην τὴν ΛΓ'.) καὶ ἡ Περιφέρεια βγ πρὸς τὸ τεταρτημόριον βζ, ἄρα (3) ἡ ὑπὸ βαγ ἐστὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὀρθὰς, ὡς τὸ τόξον βγ ἐστὶ πρὸς τὰ τέτταρα τεταρτημόρια, τουτέστι πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

κ. 410. Β'. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ Περιφέρειαι ιλ, βγ, αἱ ἴσας ὑποτείνουσαι τὰς Γωνίας, εἴτε τὰς πρὸς τῷ Κέντρῳ, οἷαι αἱ ὑπὸ ιαλ καὶ βαγ, εἴτε τὰς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ὅμοιαι εἰσί· καὶ ἀνάπαλιν.

Πρῶτον καὶ γὰρ κείσθωσαν αἱ ἴσαι Γωνίαι πρὸς τοῖς Κέντροις· καὶ ἡ Περιφέρεια ιλ ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὡς (4) ἡ ὑπὸ ιαλ Γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας Ὀρθὰς· ἤτοι Περιφέρεια βγ ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν αὐτῆς ὅλην Περιφέρειαν (5), ὡς ἡ αὐτὴ Γωνία ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας,

(1) Κ. τοῦ γ'. (2) Διὰ τὸ Γ'. Πόρ. τῆς ΙΓ. τοῦ α'. μετὰ τοῦ Σχολ. τῆς ΚΓ. τοῦ α'. (3) ΚΔ. τοῦ ε'. (4) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. (5) Διὰ τὸ Λ'. Πόρ.

Ὀρθάς· Ἄρα ἡ ιλ (1) ἐςὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν ἰδίαν, καὶ ἑπομένως (2) αἱ Περιφέρειαι ιλ καὶ βγ ὅμοιαι εἰσί.

Ἐὰν δὲ αἱ ἴσαι Γωνίαι ξ καὶ κ πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὦσι, κείσθωσαν δὴ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Περιφερειῶν βεβηκεῖαι, καὶ Γωνίαι πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι αἱ ὑπὸ ιαλ, βαγ, καὶ (3) ἔσονται καὶ αὗται ἴσαι. Ὅθεν (διὰ τὸ Α΄. μέρος) τὰ τόξα, τυτέςιν αἱ Περιφέρειαι ιλ καὶ βγ ὅμοιαι εἰσί. κ. 411.

Καὶ ἀνάπαλιν. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ ὅμοιαι Περιφέρειαι βγ καὶ ιλ ὑποτείνουσι Γωνίας ἴσας, κἄντε πρὸς τοῖς Κέντροις αὗται ὦσι, κἄντε πρὸς ταῖς Περιφερείαις· Ὡς ἐξ αὐτοῦ δὴ τοῦ Σχήματος, καὶ τῆς Κ΄. τοῦ Γ΄. Βιβλίου καταδηλον ἐςί.

Ἡμιδιάμετροι δύω αβ καὶ αγ, ἀπὸ τῶν ὁμοκέντρων Περιφερειῶν τόξα ἀπολαμβάνουσιν ὅμοια τὰ ιλ, βγ. Τοῦθ' ὅπερ εὔδηλον ἐςὶν ἐκ τοῦ Β΄. Πορίσματος. Γ΄.

Ἡγμένων τῶν Εὐθειῶν βγ, ιλ, τὰ Τμήματα βκγ, ιξλ, ἃ δεκτικὰ ἴσων ἐςὶ Γωνιῶν τῶν κ, ξ, ὅμοια ἐςί· καὶ ἀνάπαλιν. Δ΄. κ. 412.

Διὰ γὰρ τὸ Β΄. Πόρισμα, αἱ Περιφέρειαι βγ, ιλ, καὶ ἑπομένως καὶ αἱ βκγ καὶ ιξλ ὅμοιαι εἰσί· Ἄρα (4) καὶ τὰ Τμήματα βκγ, ιξλ ὅμοια ἐςί.

Ἔτι καὶ τὰ ἀπεναντίον Τμήματα, διὰ τὰς βγ καὶ ιλ ὁμοίας Περιφερείας, καὶ αὐτὰ ὅμοια ἐςί.

Ἀνάπαλιν δὲ, τὰ ὅμοια Τμήματα βκγ, ιξλ, δεκτικά ἐςι Γωνιῶν ἴσων τῶν κ καὶ ξ. Διὰ γὰρ (5) τὰς ὁμοίας Περιφερείας βκγ, ιξλ, αἱ ἀπεναντίον Περιφέρειαι βγ, ιλ ὅμοιαι ἔσονται, εἴτε Γωνίαι κ καὶ ξ αἱ ἐπ' αὐταῖς βεβηκεῖαι ταῖς Περιφερείαις (6) ἀλλήλαις ἴσαι.

Ἔτι αἱ ἐν τοῖς Τμήμασι βγ, ιλ Γωνίαι, τῶν ἴσων Γωνιῶν κ καὶ ξ (7) παραπληρώματα ἐςὶ πρὸς δύω Ὀρθὰς, καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι.

Τὰ ὅμοια Τμήματα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας, ἢ τῶν ἴσων, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. Δῆλον ἐκ τοῦ ἀνωτ. Πορίσματος, καὶ ἐκ τοῦ Σχολίου τῆς ΚΑ΄. τοῦ Γ΄., καὶ ἐκ τοῦ Ζ΄. Ἀξιώμ. τοῦ Α΄. Βιβλίου· Περιέχει δὲ τυτὶ τὸ Πόρισμα τὰς Προτάσεις, τήν τε ΚΓ΄. καὶ ΚΔ΄. τοῦ Γ΄. Βιβλίου, ἃς ὁ μὲν Ταχυέτιος παρέλιπεν, αὐτοὶ δὲ ἀνειλήμμεθα· Ἡ γάρ τοι ἐν ἐκείνοις ΚΓ΄. ὅτως ἐκφέρεσθαι „εἴωθεν. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας δύω Τμήματα Κύκλου ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ „συςαθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη" Ἡ δὲ ΚΔ΄. ὅτω· „Τὰ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν „ὅμοια Τμήματα Κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. Ε΄.

(1) Διὰ τὴν ΙΔ. τοῦ ε΄. (2) Ὀρ. Δ. τοῦ ς΄. (3) Διὰ τὴν Κ. τοῦ γ΄. καὶ τὸ ς΄. Ἀξ. τοῦ α΄. (4) Δ. Ὁρισμ. Βιβλ. ς΄. (5) Ὀρ. Δ. τοῦ ς΄. (6) Β. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (7) ΚΒ. τοῦ γ΄.

ς'. Ἐκ ταύτης δ' ἔτι τῆς Προτάσ. καὶ τῶν ἐξ αὐτῆς Πορισμάτων, ῥᾷστα εἴληπται τὰ τῆς πράξεως τοῦ συνιστᾶν, καὶ καταμετρεῖν τὰς Γωνίας, ὅπερ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΚΓ'. τοῦ Α'. Βιβλίου πλατύτερον ἀνεπτύχθη.

Σχόλιον.

Ἐνταῦθα δὲ γενομένοις, τὸ ἐν τῷ Δ'. Βιβλίῳ ἡμῖν ὑποχρεωθὲν ἀποτιτέον· ἐπηγγέλλετο γὰρ ἐν ἐκείνοις ἡ τῆς Ι'. Προτάσεως τοῦ ΙΓ'. τῶν στοιχείων ἀπόδειξις. Ἔχει γοῦν τὸ θεώρημα οὕτω.

„Ἐὰν εἰς Κύκλον Πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ (τὸ αβγδε), ἡ τοῦ „Πενταγώνου Πλευρὰ (αβ) δύναται τῇ τε τοῦ Ἑξαγώνου, καὶ τῇ τοῦ Δεκαγώνου, „τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένων.

κ. 413. Ἀχθείσης γὰρ τῆς Διαμέτρου αη, καὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρου ζβ, ἀπὸ τοῦ Κέντρου ζ ἀχθήτω Κάθετος πρὸς αβ ἡ ζθ, ἥτις προεκβληθεῖσα προσπιπτέτω τῇ τοῦ Κύκλου Περιφερείᾳ κατὰ τὸ κ. Αὕτη δὴ καὶ τὸ τόξον ακβ (τουτέστι (1) τὸ πεμπτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας) δίχα τεμεῖ (2) κατὰ τὸ κ· Ἐπιζευχθήτωσαν αἱ βκ, κα, καὶ ἐπειδὴ ακ τῆς ὅλης Περιφερείας δεκατημόριον ἐστὶν, ἔσται ἡ ακ Εὐθεῖα (3) πλευρὰ τοῦ Δεκαγώνου τοῦ κανονικοῦ (τουτέστι τοῦ ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου) τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφεσθαι δυναμένου. Ἀπὸ γοῦν τοῦ Κέντρου ζ Κάθετος ἀχθήτω ἐπὶ τὴν ακ ἡ ζν, ἥτις προεκβαλλομένη προσπιπτέτω τῇ Περιφερείᾳ τοῦ Κύκλου κατὰ τὸ μ. Αὕτη δὴ τὸ τόξον αμκ δίχα τέμνουσα ἔσται κατὰ τὸ μ, καὶ τεμεῖ δὲ καὶ τὴν τοῦ Πενταγώνου Πλευρὰν βα κατὰ τὸ λ· Ἐπιζευχθήτω ἡ κλ· διὰ γοῦν τὰς Ἡμιπεριφερείας αβη καὶ αεη, αἱ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ μὴν καὶ διὰ τὰ τόξα αβγ, αεδ τὰ ἀλλήλοις καὶ αὐτὰ ἴσα, ἔσται τὸ τόξον γη τοῦ τόξου γηδ ἡμίσεια, ἡ γοῦν καὶ τοῦ ακβ. Ἔνθεντοι Τόξ: γη = Τόξ: ακ = 2 Τόξ: κμ· ὁμοίως δὲ καὶ Τόξ: γβ = Τόξ: αβ = 2 Τόξ: βκ· Ἄρα γη + γβ τὰ συναμφότερα Τόξα = 2 Τόξ: κμ + 2 Τόξ: κβ, τουτέστι τὸ Τόξον βγη = 2 Τόξ: βκμ· ὥστε καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ βζη = (4) 2 Γωνίαις βζμ. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τοῦ Τριγώνου αβζ, ἡ ἐκτὸς Γωνία ἡ ὑπὸ βζη = (5) ταῖς ὑπὸ αβζ καὶ βαζ ἄμα ληφθείσαις, τουτέστι (διὰ τὰς αζ καὶ βζ ἴσας ἴσας) (6) = 2 Γων: αβζ = 2 Γων. βαζ, ἤτοι (διὰ τὰ ἀνωτ.) = 2 Γωνίαις βζμ, ἡ λζβ· ἐν ἄρα τοῖς Τριγώνοις λζβ, ζαβ, διὰ τὰς ὑπὸ βζλ καὶ βαζ ἴσας ἴσας, καὶ τὴν πρὸς τῷ β κοινὴν, ἔσται δὴ (7) καὶ ἡ ὑπὸ βλζ = βζα,

(1) Κς. τοῦ γ'. (2) Λ. τοῦ γ'. (3) ΚΖ. τοῦ γ'. (4) ΛΓ. τοῦ ς'. (5) ΛΒ. τοῦ α'. (6) Ε. τοῦ α'. (7) Θ. Πόρ. τοῦς ΛΒ. τοῦ α'.

καὶ ἑπομένως (1) αβ : βζ : : ζβ : βλ· ταύτηι τοι (2) καὶ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ αβλ = βζ^Τ. Ἤδη οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων αλν, κλν, διὰ τὰς πρὸς τῷ ν Ὀρθὰς, καὶ τὰς αν, νκ (3) ἴσας ἴσας, καὶ διὰ τὴν λν κοινὴν τυγχάνουσαν, ἔστιν (4) αλ = λκ, καὶ ἡ ὑπὸ λακ = ακλ, ἄρα ἐπὶ τῶν Τριγώνων βακ, καλ, διά τε τὴν πρὸς τῷ α κοινὴν, καὶ τὰς ὑπὸ βκα καὶ ακλ ἴσας ἴσας, ἔσται (5) καὶ ἡ ὑπὸ ακβ = αλκ, καὶ τὰ Τρίγωνα βακ, καλ ἔσται ὅμοια· Ὅθεν βα : ακ : : κα : αλ, καὶ Ὀρθογώνιον τὸ βαλ = ακ^Τ· Ἀλλ' Ὀρθογών. αβλ + Ὀρθογων. βαλ = (6) αβ^Τ, ἄρα αβ^Τ = βζ^Τ + ακ^Τ. Ἀλλὰ βζ τοῦ Κύκλου Ἡμιδιάμετρος ἐστὶ, καὶ ἑπομένως (7) Πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ Ἑξαγώνου τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου, ἥτοι ακ Πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ Δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου. Ἄρα τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τοῦ Πενταγώνου τοῦ κανονικοῦ, ἴσον τοῖς Τετραγώνοις, τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ Ἑξαγώνου, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς τοῦ Δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφεσθαι νοουμένων, ἅμα ληφθεῖσιν. Ο. Ε. Δ.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ'.

Ἡμῖν δὲ Ζ'.

Τοῖς ἐξ προεκτεθεῖσι Βιβλίοις τρία ἔτι τὰ στοιχεῖα τῶν Ἀριθμῶν περιέχοντα, τὸ Ζ', καὶ Η', καὶ Θ'. ὁ Εὐκλείδης παρασυνάπτει, προσιθεὶς καὶ Ι'., ἐν ᾧ περὶ τῶν ἀσυμμέτρων αὐτῷ πηλικοτήτων γίνεται λόγος. Αὐτοὶ δὲ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἀμέσως ἐπὶ τὰ στερεὰ μεταβαίνομεν, τὴν περὶ Ἀριθμῶν ἐν μέρει ἐνεκεφαλαιωσάμενοι πραγματείαν· ἐπεὶ καὶ τοῖς μαθητιῶσιν ὡήθημεν εὐχρηστέραν οὕτω τὴν τάξιν ἔσεσθαι τῆς διδασκαλίας, εἰ μόνα αὐτοῖς τὰ πρὸς τὴν τῶν Γεωμετρικῶν προτεθείη στοιχείωσιν, μὴ ὑφ' ἑτέρας μεταξὺ θεωρίας τῆς ἐκει-

(1) Δ. τοῦ ς'. (2) ΙΖ. τοῦ ε'. (3) Γ. τοῦ γ'. (4) Δ. τοῦ α'. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (6) Β. τοῦ β'. (7) Δ. Πόρ. τῆς ΙΕ. τοῦ δ'.

νων εἰσηγήσεως διακοπτομένης. Τὰς μέντοι ἐν τῷ παρόντι καὶ τῷ ἑφεξῆς Βιβλίῳ Προτάσεις ἀνακαλούμενοι, οὐχ ἕβδομον οὐδὲ ὄγδοον τὰ Βιβλία ἐπιγραψόμεθα, ἐνδέκατον δὲ καὶ δωδέκατον, ὡς ἂν μή τις σύγχυσις ἐπακολουθείη ἐν ταῖς τῶν Προτάσεων ἀνακλήσεσι, τῆς κατ' Εὐκλείδην (συνήθους ἤδη κατασάσης ἅπασι) τάξεως ἡμῖν διαστρεφομένης.

Διμερές δέ πως ἐστὶ τὸ παρὸν Βιβλίον· ἐν αὐτῷ γὰρ πρὸ πάντων οἱ πρῶτοι οἱονεὶ θεμέλιοι προκαταβάλλονται, οἷς ἅπασα ἡ περὶ τῶν Στερεῶν, τουτέστι τῶν Σωμάτων ἐφήδρασται διδασκαλία, μετὰ ταῦτα δὲ ὡς ἐν μέρει Β'. τῶν Παραλληλεπιπέδων τὰ πάθη προτίθενται.

Τὰς γοῦν πρωτίστας τῶν στερεῶν ἀρχὰς ἡ ΙΑ'. τῶν στοιχείων ὑποτίθησι Βίβλος, ὧν ἄνευ τὰ πάθη τῶν Σωμάτων ἀγνοοῦντας, τηνάλλως μοχθεῖν εἰκὸς περὶ πολλὰ τῶν μαθηματικῶν πραγματειῶν εἴδη. Τά τε γὰρ κατὰ τὸν Θεοδόσιον Σφαιρικά, καὶ τὰ τῆς σφαιρικῆς ὡσαύτως Τριγωνομετρίας, ναιμὴν καὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας τὰ πλείστα, καὶ τὰ τῆς Στατικῆς, καὶ τὰ τῆς Γεωγραφίας, τῇ θεωρίᾳ τῶν στερεῶν ἐπερείδεται, καὶ ὅσα δὲ μικρὸν ἀπαντᾷ δυσχερέστερα, ἔντε τοῖς Γνωμωνικοῖς καὶ ταῖς τοῦ Κώνου τομαῖς, καὶ τοῖς Ἀστρονομικοῖς, καὶ Διοπτρικοῖς, καὶ Ὀπτικοῖς, τῶν κατὰ τὰ στερεὰ ἀρχῶν ἀκριβῶς νοουμένων, ῥαδίω καθίσταται καὶ μᾶλλον εὐξύνετα. Ὥστε οἱ ἐν τῷ πραγματεύεσθαι περὶ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων τὸ ἀνὰ χεῖρας καὶ τὸ μετ' αὐτὸ Βιβλίον παρατρέχοντες, κολοβὴν καὶ πάντη ἀτελῆ τῆς Γεωμετρίας δῆλοι εἰσὶ ποιούμενοι τὴν εἰσήγησιν.

Ὅρισμοί.

Α'. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

Β'. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

κ. 414. Γ'. Εὐθεῖα (αβ) πρὸς ἐπίπεδον (γγ) ὀρθή ἐστι (τουτέστι Κάθετος), ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς Εὐθείας (γα), καὶ ὅσαι ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ (γγ) πρὸς ὀρθὰς (ὑπὸ βαγ, βαγ) ἦ.

κ. 415. Δ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν (τουτέστι κάθετον) ἐστὶν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι (λπ) Εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι.

κ. 416. Ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς Εὐθείας (λ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Κάθετος ἀχθῇ ἡ λξ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου Σημείου ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος ζ τῆς Εὐθείας λζ, Εὐθεῖα ἐπι-

ζευχθῇ ἡ ξζ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γωνία ὑπὸ λζξ, ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεσώσης, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ξζλ.

Ἐπίπεδα (ρε) πρὸς ἐπίπεδον λπ κλίσις ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γωνία (αβγ) ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ (ξε) ἀγομένων (αβ καὶ γβ) πρὸς τῷ αὐτῷ Σημείῳ (β) ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων. ς'. κ. 417.

Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι. Ζ'.

Παραπλησίως δὲ, Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον, καὶ ἑτέρα πρὸς ἕτερον, ἢ τὸ αὐτὸ, ἐὰν αἱ εἰρημέναι (ἐν τῷ Ε'. Ὁρισ.) τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

Παράλληλα ἐπίπεδα ἐστὶ τὰ, ὅσον ἂν καὶ προσαχθείη, ἴσοις ἀεί ποτε ἀπ' ἀλλήλων ἀφεστῶτα τοῖς διαστήμασι. Η'.

Η'' (ὡς Εὐκλείδ. ὡρίσατο) τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὅμοια στερεὰ Σχήματα (εὐθύγραμμα) ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος. Θ'.

Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο ἐπιπέδων Γωνιῶν (βαγ, γαξ, βαξ) περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ Σημείῳ συνιστάμενων. Γ'. κ. 418.

Γ'σαι δὲ Γωνίαι στερεαί εἰσιν αἱ (ἢν ἐν ἀλλήλοις ἐντεθῶσιν) ἐφαρμόζουσαι. ΙΔ'.

Καθάπερ γὰρ Γωνία ἐπίπεδος ἐστὶν ἡ τῶν Γραμμῶν κλίσις, οὕτωτοι στερεά ἐστι Γωνία ἡ τῶν Γωνιῶν κλίσις τῶν ἐπιπέδων· Καὶ περὶ ἀμφοῖν τοίνυν ἐπίσης συλλογιστέον. Ὅρα τὸ Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν Ις'. τοῦ Γ'.

Πρίσμα ἐστὶ Σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ξζε, αγβ παράλληλά τε ἐστὶ, καὶ ἴσα, καὶ ὅμοια. ΙΒ'. κ. 419.

Παραλληλεπίπεδον ἐστὶ Σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ Τετραπλεύρων ἀπεναντίον παραλλήλων περιεχόμενον. ΙΓ'. κ. 420.

Ἐὰν ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων ἀπεναντίον παραλλήλων Τετραγώνων τὸ στερεὸν ᾖ περιεχόμενον, Κύβος ἐστί. ΙΔ'.

Γ'σα τε καὶ ὅμοια στερεὰ Σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ΙΕ'.

Τοῦτον δὴ τὸν Ὁρισμὸν, ὃς δέκατός ἐστι τὸν ἀριθμὸν παρ' Εὐκλείδει παρελελείπει μὴ καλῶς ποιήσας ὁ Τακυέτιος, καὶ διὰ τοῦτο μὴ πάνυ τοι ἀκριβῶς τὰς ἀποδείξεις τῆς ΚΕ'. καὶ ΚΗ'. τῶν προτάσεων ἀποδεδωκώς.

Πρότασις Α.

κ. 421. „Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι (τὸ αγ) οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ „ἐπιπέδῳ (ξε), μέρος δέ τι (γβ) ἐν τῷ μετεώρῳ.

Ἔστι καθ' αὐτὸ τὸ λεγόμενον ἐκφανὲς, ἐννοήσασι τί δή ποτε ἐστὶν ἐπίπεδον, καὶ τί εὐθεῖα Γραμμή· Ὅρα Ὁρισμ. Ζ'. καὶ Δ'. τοῦ Α'. Βιβλίου.

Πρότασις Β.

„Πᾶν Τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· Καὶ δύω Εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλ„λήλας ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

κ. 422. Τὸ Α'. μέρος καθ' αὐτὸ δῆλον, οὐδὲν γὰρ ἄλλο τὸ Τρίγωνον, ἢ ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια ὑπὸ τριῶν Εὐθειῶν περιεχομένη. Κἀντεῦθεν δὴ καὶ ἐκ τῆς ἀνωτ. Προτ. εὔδηλον καὶ τὸ Β'.

Πρότασις Γ.

κ. 423. „Ἐὰν δύω ἐπίπεδα (αβ, γδ) τέμνῃ ἄλληλα, ἡ (εζ) κοινὴ αὐτῶν το„μὴ Εὐθεῖα ἐστί.

Φανερὸν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου. Ἔστιν ἀλλ' οὖν καὶ οὕτω δεικνύειν· εἰ μὴ γὰρ Εὐθεῖα ἡ κοινὴ τομὴ εζ, ἀγέσθω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γδ Εὐθεῖα επζ, ἐπὶ δὲ τοῦ αβ Εὐθεῖα εξζ· καὶ αἱ δύω τοίνυν εξζ, επζ Εὐθεῖαι περιέξουσι χωρίον, ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις Δ.

κ. 424. „Ἐὰν Εὐθεῖα (βα) δύο Εὐθείαις (γαχ, ζασ) τεμνούσαις ἀλλήλας, „πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἐπιζαθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς „ὀρθὰς ἔσται.

Ἀλλ' εἰμή, ἑτέρατις ἄρα Εὐθεῖα ἡ βπ τῷ διὰ τῶν Εὐθειῶν χαγ, σαζ πρὸς ὀρθὰς ἐφιζάνθω, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ απ, καὶ ταύτῃ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ ἀγέσθω κάθετος ἡ ξπ, ἡ δὴ προεκβληθεῖσα ἐξ ἀνάγκης τεμεῖ τινα τῶν Εὐθειῶν γαχ, ζασ, ἢ ἑκατέραν, ὁπήποτ' ἂν ᾖ τέως τὸ Σημεῖον π. Ἐὰν γὰρ ἡ Εὐθεῖα πξ τῇ ἑτέρᾳ τῶν Εὐθειῶν, οἷον τῇ ζασ παράλληλος ᾖ, ἡ πξ τὴν ἑτέραν (1) τεμεῖ γαχ· εἰδ' ὁδετέρᾳ παράλληλος ᾖ, τεμεῖ (2) ἑκατέραν. Τε-

(1) Β. Πόρ. τοῦ Σχολ. τοῦ μετὰ τὴν ΛΑ. τοῦ α'. (2) Α. Πόρισμα ἢ Σχόλ. μετὰ τὴν ΛΑ. τοῦ α'.

μνέτω τοίνυν τὴν γνχ κατὰ τὸ ξ, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ βξ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ βαξ Γωνία (ἐξ ὑποθ.) ὀρθή ἐστα ἐστὶ,

Ἔστι Τετράγ. βξ = (1) Τετραγ. βα
Τετραγ. αξ

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ βπ ὀρθὴ τίθεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ζαγ, καὶ ἑπομένως (2) Ὀρθὴν συνίστηι μετὰ τῆς απ τὴν ὑπὸ βπα,

Ἔστιν ἄρα Τετράγ. βα = (3) Τετραγ. βπ
Τετραγ. απ

Ἐπεὶ δὲ καὶ ὑπὸ απξ ἐν κατασκ. Ὀρθὴ ἔστα ἐστί.

Τετράγ. αξ = (4) Τετραγ. ξπ
Τετραγ. απ

Ἄρα Τετράγ. βξ = Τετραγ. βπ
Τετραγ. ξπ
Τετραγ. απ
Τετραγ. απ

Ἄρα Τετράγ. βξ μεῖζον ἐστὶ τῶν Τετραγ. βπ καὶ ξπ, καὶ ἑπομένως (5) ἡ ὑπὸ βπξ οὐκ ἔστιν Ὀρθή. Οὐκ' ἄρα ἡ βπ ὀρθή ἐστιν (6) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γαζ· ὥστε δῆλον τὸ προτεθέν.

Σχόλιον.

Ἐκ τοῦ τεθέντος ὡς ἡ βπ ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ζαγ, ὀρθῶς ἐδείχθη τὴν βπ μὴ εἶναι ὀρθὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἔνθεντοι καὶ τῇ ἀποφάσει τοῦ θεωρήματος, ἡ τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ ἀλήθεια κατ' ὀρθὴν δεῖξιν κατεσκευάσθη. Ἡ δὲ δεῖξις αὕτη κατά γε τὸ ὑσιῶδες Ἰωάννου Κλερμαντίου ἐστί.

Πρότασις Ε.

„Ἐὰν Εὐθεῖα (αρ) τρισὶν Εὐθείαις (βα, γα, ζα) ἁπτομένοις ἀλλή-„λων, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (τοῦ Σημείου δηλ. α) ἐπιζαθῇ, αἱ „τρεῖς Εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν, ἡ μία τούτων βα ἐν ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ρξ, τῷ τέμνοντι τὸ λπ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ αἱ λοιπαὶ δύω γα, ζα, Εὐθείᾳ τῇ αξ· Ἐ- κ. 425.

(1) ΜΖ. τοῦ α΄. (2) Ὀρ. Γ. τοῦ ια΄. (3) Διὰ τὴν ΜΖ. τοῦ α΄. (4) ΜΖ. τοῦ α΄. (5) Δ. Πόρ. τῆς ΜΖ. τοῦ α΄. (6) Δῆλον ἐκ τοῦ Γ. Ὀρισμ. τοῦ ια.

πειδὴ τοίνυν ἡ ρα (ἐξ ὑποθ.) πρὸς ὀρθὰς ἐφίςαται ἐπὶ τῶν δύω γα, ζα, ἐπὶ τῆ ἐπιπέδῃ λπ ὀρθὴ (1) ἔςαι· Ὥςε ἐπειδὴ ἡ αξ ὀρθὴν συνίςησι (2) τῇ ὑπο ραξ· ἔςι δὲ (ἐξ ὑποθ.) καὶ ἡ ὑπὸ ραβ ὀρθὴ, αἱ ἄρα ὑπὸ ραβ, ραξ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις ς.

κ. 426. „Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι (αβ, γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (εζ) πρὸς ὀρθὰς ὦσι, „παράλληλοι ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι.

Αἰτεῖσθαι εἶχεν ὡς καθ' αὑτὸ δῆλον, ἀλλ' ἔμπης καὶ ὅτως ἂν ἀποδειχθείη.

Ἐπιζευχθείσης τῆς βδ, ἀγέσθω ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζε ἡ δη πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, καὶ ἴση τῇ βα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, ηα, ηβ· Αἱ μὲν οὖν Εὐθεῖαι βδ, δη ταῖς βδ, βα (3) ἴσαι εἰσίν· αἵ τε ὑπὸ βδη (4), δβα εἰσὶν ὀρθαί. Ἄρα (5) αἱ αδ καὶ βη ἴσαι εἰσί· Τὰ τοίνυν Τρίγωνα αβη, ηδα ἰσόπλευρα ἐςὶ, καὶ ἑπομένως αἱ ὑπὸ αβη, αδη (6) ἴσαι· Ἀλλ' αβη Ὀρθὴ (7) ἐςὶν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδη. Ἀλλὰ γάρ εἰσιν Ὀρθαὶ καὶ ἡ ὑπὸ βδη, καὶ ἡ ὑπὸ γδη, ἡ μὲν ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ ἐκ τῆ Γ'. Ὁρισμῆ· Ἄρα ἡ Εὐθεῖα ηδ ταῖς τρισὶ γδ, αδ, βδ πρὸς ὀρθὰς ἐφίςαται· ὥςε αἱ γδ, καὶ αδ, καὶ βδ, ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ (8) εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἀλλαμὴν καὶ αἱ αβ, καὶ αδ, καὶ βδ (9) ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, ἄρα αἱ αβ, γδ, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἰσίν· Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑπὸ αβδ, γδβ εἰσὶν (10) Ὀρθαὶ, ἔσονται (11) αἱ αβ, γδ παράλληλοι. Ὁ. Ε. Δ.

Πρότασις Ζ.

κ. 427. „Ἡ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Εὐθείας (αβ, γδ) τέμνουσα (εζ) ἐν τῷ „αὐτῷ, ἐν ᾧ καὶ αὐταὶ, ἐςὶν ἐπιπέδῳ.

Δειχθείη δ' ἂν καὶ διὰ τῆς Β'. τοῦ παρόντος.

Αἰτεῖσθαι δύναται, δειχθείη δ' ἂν τῷ βουλομένῳ ὧδε.

Εἰμὴ γὰρ, ἐπεζεύχθω ἡ ενζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐκείνῳ, καὶ δὴ αἱ δύο εζ, ενζ χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ (12) ἄτοπον.

Ἄλλως: Τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ, τεμνέσθω ὑφ' ἑτέρου ἐπιπέδου διὰ τῶν Σημείων ε καὶ ζ· Καὶ εἰ μή ἐςιν ἡ Εὐθεῖα εζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν αβ, γδ, ἔκ ἔςαι ἡ εζ κοινὴ τομή· Ἔςω τοίνυν ἡ ενζ καὶ δὴ ενζ (13) Εὐθεῖά τις ἔςαι, καὶ αἱ δύω Εὐθεῖαι εζ καὶ ενζ περιέξουσι χωρίον· ὅπερ ἄτοπον.

---

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Γ. Ὀρ. ια'. (3) Ἐκ κατ. (4) Ὀρ. Γ. τῆ ια'. (5) Δ. τῆ α'. (6) Η. τῆ α'. (7) Γ. Ὁρισμ. τῆ ια'. (8) Διὰ τὴν ἀνωτ. (9) Β. τῆ ια'. (10) Ὀρ. Γ. τῆ ια'. (11) ΚΘ. τῆ α'. καὶ Ὀρ. Δς. τῆ α'. (12) Λξ. ιγ'. (13) Γ. τῆ ια'.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὡς ἡ εζ ἡ τὰς παραλλήλους αβ, γδ τέμνουσα, ἐν τῷ αὐτῷ σὺν αὐταῖς ἐςιν ἐπιπέδῳ. Ἀεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι (1) ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἰσί.

Πρότασις Η.

„Ἐὰν ἡ ἑτέρα (αβ) τῶν παραλλήλων (αβ, γδ) ἐπιπέδῳ τινὶ (τῷ εζ) „πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ (γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςαι. κ. 428.

Εἴχε μὲν αἰτεῖσθαι, δεῆσαν δὲ, οὕτω δειχθείη, καθάπερ ἡ ς'. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν βδ, αδ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εζ, ἀχθήτω ηθ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, καὶ ἴση τῇ βα, καὶ ἐπιζευχθεισῶν καὶ τῶν ηα, ηβ, δειχθήσεται ὡς ἐπὶ τῆς ς'. Προτάσ., ὡς ηδ καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθάς ἐςιν· ὥςε ἡ ηδ (2) πρὸς ὀρθὰς ἐπιςήσεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβδ, τουτέςιν (3) ἐπὶ τοῦ γδβα· ἔνθεντοι ἡ ὑπὸ γδη (4) ὀρθὴ οὖσα ἐςίν· Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γδβ ὀρθή ἐςιν (ἐπεὶ μετὰ τῆς ὑπὸ αβδ ὀρθῆς Ὀρθὰς δύω (5) συνίςησιν), ἡ ἄρα γδ (6) πρὸς ὀρθάς ἐςιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ηδβ, ἤτοι τοῦ εζ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Θ.

„Αἱ τῇ Εὐθείᾳ (γδ) τῇ αὐτῇ παράλληλοι (αβ, εζ), καὶ μὴ οὖσαι αὐ- „τῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. κ. 429.

Ἔχοι μὲν ἂν αἰτεῖσθαι, δεικτέα γεμήν.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων αβ, γδ, ἀχθήτω ηκ κάθετος ἐπὶ τῆς γδ· ὡσαύτως δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων εζ, γδ, ἀχθήτω θκ κάθετος ἐπὶ τὴν γδ, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ ηθ· Ἆρ' οὖν (7) ἡ Εὐθεῖα γκ ὀρθή ἐςιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ηκθ· καὶ ἐπειδὴ αἱ αη, εθ, παράλληλοι εἰσὶ πρὸς τὴν γκ, ἔσονται δὴ (8) αἱ αη, εθ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ηκθ· Ἄρα (9) αἱ αη, εθ παράλληλοι εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ι.

„Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι (αγ, βγ) ἁπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύω Εὐ- „θείας (δζ, εζ) ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι (παράλληλοι αἱ Α'. ταῖς Β'. δηλ.) „μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας Γωνίας (τὰς γ καὶ ζ) περιέξουσι. κ. 430.

(1) Ὁρ. Λς. τοῦ α'. (2) Δ. τοῦ ια'. (3) Διὰ τὸ ἀνωτ. Πόρ. (4) Γ. Ὁρ. ια'. (5) ΚΖ. τοῦ α'. (6) Δ. τοῦ ια'. (7) Δ. τοῦ ια'. (8) Η. τοῦ ια'. (9) ς. τοῦ ια'.

Γινέσθωσαν αἱ γα, γβ ἴσαι ταῖς ζδ, ζε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, αβ, καὶ αἱ δα, ζγ, εβ· ἐπειδὴ τοίνυν αἱ αγ, ζδ παράλληλοι εἰσὶ, καὶ ἴσαι, καὶ αἱ αδ, γζ (1) ἴσαί τε εἰσὶ καὶ παράλληλοι· Ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ βε, γζ. παράλληλοί τε εἶναι καὶ ἴσαι ἀποδειχθήσονται· ὥστε καὶ αἱ αδ, βε (2) παράλληλοί τε εἰσὶ καὶ (3) ἴσαι· τοιγαρῶν (4) ἴσαι αἱ αβ, δε. Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαγ, εδζ, αἱ τρεῖς ταῖς τρισὶ Πλευραῖς ἴσαι εἰσὶν ἑκάστη ἑκάστῃ, φανερὸν ὅτι αἱ Γωνίαι γ καὶ ζ (5) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΑ.

κ. 431. „Ἀπὸ τοῦ δοθέντος Σημείου μετεώρου (γ) ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον (αβ), ὃ μὴ ἔχοι πέρας, κάθετον εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβ ἀχθήτω ἄπειρος ἡ τυχοῦσα δζ, πρὸς ἣν κάθετος ἀπὸ τοῦ γ καθείσθω (6) ἡ γε, ἐπὶ τὴν αὐτὴν δὲ κάθετος ἀφείσθω ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς ε (7) ἡ εμ· Εἶτα ἐπὶ τὴν αμ πρὸς ὀρθὰς (8) καθείσθω ἀπὸ τοῦ γ ἡ γη· λέγω δὴ τὴν γη πρὸς ὀρθὰς ἐφίστασθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβ.

Διὰ τοῦ η ἀχθήτω ηθ παράλληλος τῇ δζ.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς οὖν ἡ δε πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ τὰς γε καὶ εμ· ὥστε ἡ δε (9) ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γεμ, καὶ δὴ (10) καὶ ἡ θη· ἄρα ἡ γη (11) πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ θη· Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἡ γη πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε καὶ ἐπὶ τὴν εμ, ἡ ἄρα γη (12) Ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβ. Ο. Η. τὸ προτεθέν.

Πόρισμα.

Ἡ Ὀρθὴ γη ἀπὸ τοῦ μετεώρου Σημείου γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον αβ, ἐστὶν ἡ ἁπασῶν ἐλαχίστη τῶν Εὐθειῶν, ὅσαι δή ποτε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἄγεσθαι δύνανται. Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὁποιαδή ποτε Εὐθεῖα ἄλλη, φέρε ἡ γε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εη· Ἐπὶ γοῦν τοῦ γεη Τριγώνου, ἡ ὑπὸ εηγ (13) ὀρθὴ Γωνία ἐστίν· ὥστε ἡ ὑπὸ γεη ἐστὶν (14) ὀξεῖα· ἔνθεντοι ἡ γε Πλευρὰ τῆς Πλευρᾶς γη μείζων (15) ἐστί· Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ὁ-

(1) ΛΓ. τοῦ α΄. (2) Διὰ τὴν ἀντ. (3) Ἀξ. α΄. (4) ΛΓ. τοῦ α΄. (5) Η. τοῦ α΄. (6) ΙΒ. τοῦ α΄. (7) ΙΛ. τοῦ α΄. (8) ΙΒ. τοῦ α΄. (9) Δ. τοῦ ια. (10) Η. τοῦ ια΄. (11) Ὀρ. Γ. τοῦ ια΄. (12) Δ. τοῦ ια΄. (13) Ὀρ. Γ. τοῦ ια΄. (14) Ε. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄. (15) ΙΘ. τοῦ α΄.

τοιασῦν ἄλλης Πλευρᾶς, τῆς ἀπὸ τοῦ μετεώρου Σημείου γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἀγομένης, τὴν Ὀρθὴν γωνίαν εἶναι ἐλάσσονα.

Πρότασις ΙΒ.

„Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (εζ) ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημείου (α) „πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀνασῆσαι. κ. 432.

Ἀπὸ τοῦ τυχόντος μετεώρου Σημείου δ, ὃ τῷ ὑποκειμένῳ εζ ἐπιπέδῳ ὑπερκείμενον ᾖ, καθείσθω ἡ δβ (1) ἐπ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδον ὀρθή, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς βα, ἀχθήτω ἡ αγ παράλληλος τῇ δβ· φημὶ δὴ ὡς ὕτως ἐτελέθη τὸ ἐπιταχθέν· Η' δὲ δεῖξις σαφὴς ἐκ τῆς Η'.

Σχόλιον.

Πρακτικῶς δὲ ἀπὸ τοῦ δοθέντος Σημείου κ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εζ, κάθετος ἀνίσταται, ἐὰν ὁ Γνώμων ξκν, τῇ μὲν κατ' αὐτὸν ὀρθῇ Γωνίᾳ κ, τῷ δοθέντι Σημείῳ, τῇ δὲ Πλευρᾷ ξκ, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ὕτω προσαρμοσθῇ, ὡς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὴν ξκ Πλευρὰν τοῦ Γνώμονος περὶ τὴν κν ἀκινητοῦσαν περιάγεσθαι ἔχειν. Η' γάρ τοι κατὰ τὴν Πλευρὰν κν ἀγομένη Εὐθεῖα, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημείου κ ἔσται (2) ὀρθή.

Πρότασις ΙΓ.

„Ἀπὸ τοῦ Σημείου (γ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) δύω Εὐθεῖαι (δγ, εγ) „πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀνασήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. κ. 433.

Εἶεν γὰρ ἂν ἄλλως (διὰ τὴν ε'.) παράλληλοι, ὅπερ ἀδύνατον.

Σχόλιον.

Ἐκ ταύτης οὖν τῆς Προτάσ. δειχθῆναι δύναται καὶ ἡ ΛΗ'. τοῦ παρόντος ΙΑ'., ἣν ὁ Τακυέτιος παρέδραμεν, ὕτως ἔχουσαν.

„Ἐὰν ἐπίπεδον (ζρ) πρὸς ἐπίπεδον (βξ) ἕτερον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπότι„νος Σημείου (λ) τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων (ζρ), ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον (βξ) „κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (χρ) πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγο„μένη Κάθετος. κ. 434.

Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τοῦ λ Σημείου ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς χρ κάθετος ἡ λπ, ἔσται δὴ (3) αὕτη τῷ ἐπιπέδῳ βξ ὀρθή· ἀλλὰ διὰ τὴν παροῦσαν Πρότ.

(1) Διὰ τὴν ἀντι. (2) Δ. τοῦ ια'. (3) Ὅρ. Δ. τοῦ ε'.

ἀπὸ τῆ αὐτῆ Σημείῃ λ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ βξ δύο Εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναχήσονται, ἄρα ἡ λπ Εὐθεῖα, ἥτις μόνη ἀπὸ τῆ λ Σημείῃ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ξβ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῆναι δύναται, πεσεῖται (1) ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς χρ.

Πρότασις ΙΔ.

κ. 435. „Πρὸς ἃ ἐπίπεδα (ζη, λπ) ἡ αὐτὴ Εὐθεῖα (αβ) ὀρθή ἐστι, παράλληλα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα.

Ἐπὶ θατέρῃ τῶν ἐπιπέδων ζη ληφθήτω Σημεῖον τὸ τυχὸν γ, καὶ δι' αὐτῆ ἀχθήτω γε παράλληλος πρὸς τὴν αβ, ἀπαντῶσα τῷ ἐπιπέδῳ λπ κατὰ τὸ ε. Ἔσται γὴν ἡ γε (2) ὀρθὴ πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ζη καὶ λπ· Ἐὰν δὴ ἐπιζευχθῶσιν αἱ Εὐθεῖαι αγ, βε, ἔσονται αἱ Γωνίαι α καὶ β (3) ὀρθαί· ἄρα αἱ αγ, βε (4) παράλληλοι εἰσί, τὸ δὲ αγεβ Παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ γε, ἥτις ἐδείχθη πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ὀρθὴ οὖσα, ἴση ἐστὶ (5) τῇ αβ· Ὡσαύτως δείξω, καὶ ὅσαι ἂν ἀχθῶσι πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα Ὀρθαί, ἁπάσας ἴσας εἶναι· Τοιγαρὴν (6) τὰ ἐπίπεδα εἰσὶ παράλληλα. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΕ.

κ. 436. „Ἐὰν δύο Εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων (βα, γα), παρὰ δύο Εὐθείας „ἁπτομένας ἀλλήλων (εδ, ζδ) παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλα ἐστὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Ἀπὸ τῆ α ἀχθήτω αη ὀρθὴ πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον (7), ἀγέθωσαν δὲ καὶ αἱ ηθ, ηι παράλληλοι πρὸς τὰς δε, δζ· καὶ ἔσονται αἱ αὐταὶ παράλληλοι (8) καὶ πρὸς τὰς αβ, αγ· Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ ὑπὸ ιηα, θηα εἰσὶν (9) Ὀρθαί, ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ γαη (10) βαη Ὀρθαί· Ἡ ἄρα ηα ἡ πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον ὀρθὴ οὖσα, καὶ πρὸς τὸ βγ (11) ὀρθὴ ἐστί· Τὰ ἄρα βγ, εζ (12) ἐπίπεδα παράλληλα ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ις.

κ. 437. „Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (αβ, γδ) ὑπὸ ἐπιπέδῃ τινὸς τέμνηται „(τῆ εθζη), αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ (εθ, ηζ) παράλληλοι εἰσί.

---

(1) Ἐκ κατασκ. (2) Η. τῆ ια΄. (3) Γ. Ὁρισμ. τῆ ια΄. (4) ΚΘ. τῆ α΄. (5) ΛΔ. τῆ α΄. (6) Η. Ὁρισμ. τῆ ια΄. (7) ΙΔ. τῆ ια΄. (8) Θ. τῆ ια΄. (9) Γ. Ὁρισ. τῆ ια΄. (10) ΚΖ. τῆ α΄. (11) Δ. τῆ ια΄. (12) Διὰ τὴν ἀνατ.