ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ Τρίγωνα αβζ καὶ Ρ ὅμοια εἶναι, ἥτε Γωνίαι ἴση τῇ ζ. Κἀντεῦθεν δῆλον ἔσται, ὅτι καὶ τὰ Ρ καὶ Λ ἀλλήλοις ὅμοια, αἱ γὰρ Γωνίαι ι καὶ ζ, α καὶ ξ, υ καὶ χ ἴσαι ἀλλήλαις. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Η βγ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αγ, γζ. Α'.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐπὶ τῶν Τριγώνων Ρ καὶ Λ, ἴσαι εἰσὶν αἱ Γωνίαι ι καὶ ζ, ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς αγ, ἡ δὲ τῆς γβ, ἴσαι δὲ καὶ α καὶ ξ, ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς γβ, ἡ δὲ τῆς γζ, φανερὸν (1) ὅτι αγ : γβ :: γβ : γζ.

Η βζ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αζ, γζ· ἡ δὲ αβ μέση τῶν ζα καὶ γα. Β'.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβζ καὶ Λ, ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ αβζ, καὶ ἡ κατὰ τὸ χ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ βζ· ἴσαι δὲ καὶ α καὶ ξ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ βζ, τὴν δὲ ἡ γζ· ὥστε (2) αζ : βζ :: βζ : γζ.

Παραπλησίως, ἐπεὶ ἐν τοῖς Τριγώνοις αβζ καὶ Ρ, ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ αβζ καὶ υ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ αβ, ἴσαι δὲ καὶ αἱ κατὰ τὸ ζ καὶ ι, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αβ, τὴν δὲ ἡ αγ, ἔσται πάλιν αζ : αβ :: αβ : αγ.

Ἐπὶ τῶν τριῶν τετωνὶ Τριγώνων αβζ, καὶ Ρ, καὶ Λ, αἱ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνουσαι ἀνάλογον (3) εἰσίν. Ὅθεν ἐὰν τοῦ Α'. λόγου οἱ ὅροι ἀπὸ τοῦ Τριγώνου αβζ, οἱ δὲ τοῦ Β'. ἀπὸ τοῦ Ρ, οἱ δὲ τοῦ Γ'. ἀπὸ τοῦ Λ ληφθῶσιν, ἔσται αβ : βζ :: αγ : γβ :: βγ : γζ· καὶ πάλιν βα : αζ :: γα : αβ :: γβ : βζ· καὶ τελευταῖον αζ : ζβ :: αβ : βγ :: βζ : ζγ. Τούτῳ γὰρ τῷ τρόπῳ ἀναλογιζομένοις, οἱ ὁμόλογοι τῶν ὅρων ταῖς ἴσαις τῶν Γωνιῶν πανταχῇ ὑποκείσονται. Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (ζι : ιλ) τεμεῖν.

Ἀχθήτω ἄπειρος ἡ αψ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθήτωσαν απ, πρ ἴσαι ταῖς ζι, ιλ· ἀπὸ δὲ τοῦ ρ ἐπεζεύχθω ἡ ρβ, καὶ πρὸς αὐτὴν διὰ τοῦ π ἤχθω Παράλληλος ἡ πγ. Φημὶ δὴ ὡς οὕτως ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν· δῆλον δὲ ἐκ τῆς Β'. Προτάσ. τοῦ ς'. Βιβλίου. σ. 344.

(1) Δ. τοῦ ς'. (2) Δ. τοῦ ς'. (3) Δ. τοῦ ς'.

Πορίσματα.

Α'. Ἐντεῦθεν τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ οὕτω τεμεῖς, ὡς εἶναι τὴν ὅλην πρὸς τὴν ἀποτμηθεῖσαν βγ, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα· τουτέστιν ὡς ἡ ζλ πρὸς τὴν λι, ἐὰν ἐπί τινος μὴ πεπερασμένης Εὐθείας τῆς αψ, λάβῃς μὲν τὴν αρ = ζλ, λάβῃς δὲ ἐπὶ τῆς ρα τὴν ρπ = λι, καὶ ἐπιζεύξῃς τὴν ρβ, καὶ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγάγῃς τὴν πγ.

Β'. Κἀντεῦθεν αὖθις, τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αγ οὕτω προεκβάλλειν δυνήσῃ ἐπὶ τὸ β, ὡς τὴν ὅλην προσχθεῖσαν αβ εἶναι πρὸς τὴν προσκειμένην βγ, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα, τουτέστιν ὡς ζλ πρὸς λι, λαβὼν ἀμέλειτοι ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς αψ, τὴν μὲν αρ = ζλ, τὴν δὲ ρπ ἐπὶ τῆς ρα ἴσην τῇ λι, καὶ ἐπιζεύξας τὴν πγ, καὶ Παράλληλον ἀγαγὼν πρὸς αὐτὴν τὴν ρβ, ἥτις ἐπὶ τῆς αγ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον β διορίσει.

Γ'. Κἀντεῦθεν τέως τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αγ οὕτω προεκβαλεῖν ἕξεις, ὡς εἶναι τὴν αγ πρὸς τὴν ὅλην προεκβληθεῖσαν, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα, τουτέστιν ὡς ἔχει ἡ ζι πρὸς τὴν ζλ, ἀμέλειτοι λαβὼν ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς αψ, Εὐθείας τὰς απ, αρ, ταῖς ζι, ζλ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἐπιζεύξας τὴν πγ, καὶ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγαγὼν τὴν ρβ, ἥτις ἐπὶ τῆς Εὐθείας αγ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον β διορίσει.

Πρότασις Ι.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ἄτμητον (αβ), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αι) τετμη-
„μένῃ ὁμοίως τεμεῖν (κατὰ λ καὶ π).

κ. 345. Ἐπεζεύχθω ἡ βι ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου α κατὰ γωνίαν ἠγμένων, παρὰ δὲ τὴν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀπὸ τῶν Σημείων ζ καὶ γ ἤχθωσαν Παράλληλοι πρὸς τὴν αβ, ἣν χρὴ τεμεῖν, προσπίπτουσαι κατὰ Σημεῖα τὰ λ καὶ π· Φημὶ δὴ ὡς ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν.

Δῆλον δὲ ἐκ τοῦ Α'. Πορίσμ. τῆς Β'. τοῦ ς'.

κ. 346. Καὶ ἄλλως δέπως, ἐὰν ἡ τετμημένη Εὐθεῖα ια μείζων ᾖ τῆς ἣν χρὴ τεμεῖν, βπ, ἔστωσαν Κύκλοι τρεῖς ἀλλήλων ἐφαπτόμενοι περὶ Διαμέτρους τὰς ιζ, ιγ, ια, ἐνηρμόσθω δὲ καὶ ἡ βπ ὑποτείνουσα, ἀπὸ τοῦ ι Σημείου εἰς τὴν τοῦ μείζονος τῶν Κύκλων προσπίπτουσα Περιφέρειαν. Οὕτω γὰρ οἱ δύω ἐλάσσονες Κύκλοι, κατὰ τὰ Σημεῖα λ καὶ π, τὴν βπ Εὐθεῖαν τεμοῦσι, κατὰ λόγοι

(1) τῶν τομῶν τῶν τῆς Διαμέτρου. ια. Ἐὰν δὲ ἡ ια Εὐθεῖα τετμημένη ᾖ εἰς μέρη τέτταρα, τεσσάρων Κύκλων δεήσει, καὶ ἐὰν εἰς πέντε, πέντε, καὶ οὕτως ἐς ἄπειρον.

Σχόλιον.

Ἐκ δὲ ταύτης τῆς Προτάσεως, καὶ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν εἰς ὁσαδήποτε μέρη ἀλλήλοις ἴσα διαιρεῖν παιδευόμεθα, συνάπτοντες μὲν κατὰ γωνίαν τῇ Εὐθείᾳ αβ (ὡς ἐν τῷ Σχήμ. τῆς Προτ.), ἣν χρὴ τεμεῖν, Εὐθεῖαν μὴ πεπερασμένην τὴν αι, καὶ ταύτην εἰς μέρη ὅσα ἂν δόξῃ ἴσα ἀλλήλοις διαιροῦντες τῷ διαβήτῃ, οἷον εἰς αγ, γζ, ζι, κξ., καὶ τὴν ιβ ἐπιζευγνύντες, καὶ πρὸς αὐτὴν Παραλληλοι τὰς ζλ, γπ ἄγοντες.

Ἄλλως δὲ καὶ ῥᾴδιον, ὡς παρὰ τῷ Μαυρολύκῳ. Ἔστω ἡ αβ τριχοτομητέα, καὶ ἀχθήτω ἤτοι αὐτῆς ὑπερθεν ἢ ἔνερθεν, παράλληλος ἡ ισ μὴ πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τῆς ισ ὑπὸ τὴν αβ κειμένης, ληφθήτωσαν τῷ διαβήτῃ μέρη τρία ἴσα τὰ ιπ, πρ, ρσ, ἅπερ ἂν ἅμα μείζονα ᾖ τῆς αβ, ἐλάσσονα δὲ, ἐὰν ἡ ισ ὑπὲρ τὴν αβ τεθῇ· διὰ δὲ ι καὶ α, καὶ δὴ καὶ διὰ σ καὶ β, ἀχθήτωσαν Εὐθεῖαι συμπίπτουσαι κατὰ τὸ γ (2). Αἱ γοῦν ἀπὸ τοῦ γ διὰ π καὶ ρ ἀγόμεναι Εὐθεῖαι, τὴν δοθεῖσαν αβ τριχοτομήσουσιν. Ἡ δὲ δεῖξις σαφὴς ἐκ τοῦ Β'. Πορίσμ. τῆς Δ'. Προτ. κ. 347.

Ἄλλως ἔτι σὺν Μαυρολύκῳ τὸ αὐτὸ τοῦτο ἐκπεραινόμεν. Οἷον κείσθω αβ, ἣν εἰς τέτταρα δεῖ τεμεῖν, καὶ ἀχθήτω Εὐθεῖα μὴ πεπερασμένη ἡ αχ, καὶ πρὸς αὐτὴν Παράλληλος ἡ βψ, οὗ αὐτὴ πέρας ἔχουσα· Ἐκ δὴ τούτων ληφθήτωσαν τῷ διαβήτῃ μέρη ἴσα τὰ αλ, λξ, ξπ, καὶ βυ, υτ, σρ, ἐφ' ἑκατέρας δηλ. μονάδι ἐλάσσονα τῶν ἃ χρὴ ἐπὶ τῆς αβ λαβεῖν. αἱ γὰρ διὰ τούτων ἀγόμεναι Εὐθεῖαι λρ, ξσ, πυ, εἰς τέτταρα τὴν δοθεῖσαν αβ τεμοῦσι. Ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκ. αἱ λξ καὶ ρσ ἴσαι τε εἰσὶ καὶ Παράλληλοι, καὶ αἱ ταύτας ἐπιζευγνύουσαι λρ καὶ ξσ (3) ἴσαι ἔσονται καὶ αὗται καὶ Παράλληλοι· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ξσ καὶ πυ Παράλληλοι εἰσίν. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ απ εἰς μέρη τρία ἴσα ἀλλήλοις τέτμηται, εἰς τρία ἴσα καὶ ἡ αι (4) τετμημένη ἔσται· παραπλησίως δὲ καὶ ἡ βγ εἰς τρία ἴσα· ἡ τοίνυν ὅλη αβ εἰς ἴσα τέτταρα. κ. 348.

Αὗται δὴ αἱ δύω πράξεις εὐχερέστεραι τῆς κατ' Εὐκλείδην εἰσὶ, ὡς ἐφ' ὧν ἐλάσσονες αἱ ἀγόμεναι Παράλληλοι.

---

(1) Β. Πόρ. τῆς Β'. τοῦ ε'. (2) Σχόλ. ΛΓ. τοῦ α'. (3) ΛΓ. τοῦ α'. (4) Δ. Πόρ. τῆς Β. τοῦ ε'.

Πόρισμα.

κ. 349. Ἐντεῦθεν δὴ τὸ Τραπέζιον αβγδ, ὅπερ αἱ αδ καὶ βγ Πλευραὶ παράλληλοι εἰσὶν, εἰς μέρη ὁποσαῦν ἀλλήλοις ἴσα διαμερίζειν μανθάνομεν· Προεκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ εἰς τὸ ε, εἰς ὃ τὴν γε ἴσην εἶναι τῇ αδ. Διὰ γῶν τὰς ἐναλλὰξ Γωνίας ὑπὸ δαζ καὶ ζεγ, καὶ τὰς αδζ καὶ εγζ (1) ἴσας ἴσας, καὶ δὴ καὶ διὰ τὰς Βάσεις αδ, γε τὰς ἐκ κατασκευῆς ἴσας, τὰ Τρίγωνα αδζ καὶ ζγε (2) ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ἔνθεντοι καὶ τὸ Τρίγωνον αβε τῷ Τραπεζίῳ αβγδ ἴσον ἐστί· Καὶ διαιρεθείσης τοίνυν τῆς Βάσεως (3) εἰς ἴσα ὁσαδηποτοῦν μέρη, οἷον εἰς τρία βη, ηρ, ρε, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν αη, αρ, ἔσται τὸ αβη Τρίγωνον, καὶ τὸ αηρ, καὶ τὸ αρε, τοῦ Τραπεζίου τριτημόρια. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΑ.

„Δυεῖν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αβ, βγ) τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

κ. 350. Ἐπεζεύχθω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆς βα προεκβληθείσης ληφθήτω ἡ αζ = βγ, διὰ δὲ ζ παρὰ τὴν αγ παράλληλος ἀχθήτω ἡ ζχ μὴ πεπερασμένη, πρὸς ἣν κατὰ τὸ λ ἡ βγ προεκβληθεῖσα καὶ αὐτὴ προσπιπτέτω. Φημὶ δὴ ὅτι αβ : βγ : : βγ : γλ· Καὶ γὰρ αβ : αζ : : βγ : γλ (4)· ἀλλὰ (5) αζ = βγ, ἄρα αβ : βγ : : βγ : γλ· ἥτε γλ ἡ τρίτη οὕτως ἐστὶν ἀνάλογος. Ο. Η. Ε.

Ἄλλως.

κ. 351. Συνεστάθωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὀρθὰς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἀχθήτω μὴ πεπερασμένη ἡ γχ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν αγ, ἥπερ κατὰ τὸ λ προσαντάτω ἡ αβ προεκβληθεῖσα· Φημὶ δὴ τὴν αβ εἶναι πρὸς τὴν βγ, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βλ. Δῆλον δὲ ἐκ τοῦ Λ'. Πορίσματος τῆς Η'. Προτάσεως.

Σχόλιον.

Δυνατὸν δὲ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν, μὴ μόνον διὰ τριῶν ὅρων, ἀλλ' ἔτι καὶ δι' ἄλλων ὑπὲρ ἀριθμὸν πλειόνων προάγεσθαι, καὶ τόγε ἄθροισμα τῆς τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλογούντων ὅρων πρόοδον ὑπ' ὀφθαλμοῖς τίθεσθαι. Περὶ τούτου ἄριστα τῷ Γρηγορίῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἁγίου Βικεντίου, ἐν Β'. Βιβλ. τοῦ αὐτοῦ πονήματος διείληπται, τὴν τῆς Γεωμετρικῆς προόδου εἰσήγησιν ἀκριβῶς ὑποθεμένῳ. Ταύ-

(1) ΚΖ. τοῦ α'. (2) Κς. τοῦ α'. (3) Διὰ τὸ ἀνὰ χεῖρας Σχόλ. (4) Β. τοῦ ε'. (5) Ἐκ κατ.

τητοι καὶ ἡμῖν ἐπιτετμημένην τοῦ προκειμένου τὴν κατασκευὴν καὶ ἀπόδειξιν ἐνταῦθα ἀποδοτέον.

Λῆμμα Α'.

„Τοῦ κατὰ τὴν ἐλάσσονα ἀνισότητα λόγου λξ πρὸς πρ ἀεὶ συνεχιζο- κ. 352.
„μένου, εἰς Μέγεθος παντὸς τοῦ δοθέντος μεῖζον ἥκειν συμβαίνει.

Ἔστω λξ : λρ :: λρ : πλ, καὶ ἔστω δὴ καὶ ἀνάπαλιν (1) πλ : ρλ :: ρλ : ξλ· ἄρα καὶ ἐν διαιρέσει (2) πρ : ρλ :: ρξ : ξλ, καὶ ἐναλλὰξ (3) πρ : ρξ :: ρλ : ξλ. Ἀλλὰ μὴν ρλ μείζων ἐστὶ τῆς ξλ, ἄρα καὶ πρ μείζων τῆς ρξ· Ὡσαύτως δείξω καὶ τὴν ιπ μείζονα εἶναι τῆς πρ, καὶ ὅτως ἐφεξῆς· Ἐπειδὴ τοίνυν συνεχιζομένου τοῦ λόγου λξ πρὸς λρ, τῷ πρώτῳ λξ ἀεὶ προσεπιγίγνεται τὰ μέρη ξρ, ρπ, πι, κξ: διηνεκῆ τὴν αὔξησιν ἀπεργαζόμενα, φανερὸν ὡς οὕτως ἥκειν συμβαίνει πρός τι Μέγεθος, ὅπερ ἂν παντὸς τοῦ δοθέντος μεῖζον εἴη. Ο. Ε. Δ.

Λῆμμα Β'.

„Τοῦ κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα λόγου αβ πρὸς γβ διηνεκῶς συνεχι- „ζομένου, εἰς Μέγεθος παντὸς τοῦ δοθέντος ἔλαττον ἥκειν συμβαίνει.

Κείσθω ἡ λξ, ὅσον ἂν βούλοιο βραχυτάτη, καὶ γινέσθω (4) βγ : βα :: λξ : λρ. Δυνατὸν οὖν τὸν λόγον λξ πρὸς λρ ἐπὶ τοσοῦτον συνεχίζεσθαι, ὥστε ὅρον τινὰ ἐμπεσεῖν (οἷον φέρε τὸν λι), ὃς μείζων εἴη τοῦ αβ (5). Ἀλλὰ γὰρ ἰσαρίθμως τῷ λόγῳ λξ πρὸς λρ, κατὰ ὅρους τοὺς γβ, εβ, ζβ, συνεχιζέσθω καὶ ὁ λόγος αβ πρὸς γβ, καὶ ἔστω ἡ ζβ ἐλάσσων τῆς ξλ. κ. 353.

Ἐκ γὰρ δὴ τῆς κατασκευῆς φανερὸν, ὅτι ιλ, πλ, ρλ, ξλ ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς αβ, γβ, εβ, ζβ· Τοιγαροῦν δὶ ἴσου (6) ιλ : ξλ :: αβ : ζβ, καὶ ἐναλλὰξ (7) ιλ : αβ :: ξλ : ζβ. Ἀλλὰ γὰρ (8) ἡ ιλ μείζων τῆς αβ, ἄρα καὶ ἡ ξλ μείζων τῆς ζβ. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα.

„Τὸν δοθέντα λόγον τὸν κατὰ μείζονα ἀνισότητα αβ πρὸς βγ, δὶ ἀ- „πείρων συνεχῶς ὅρων προσαγαγεῖν, καὶ τῶν ἁπάντων τὸ ἄθροισμα προθέσθαι.

---

(1) Σχόλ. τῆς Ις. τοῦ ε'. (2) ΙΖ. τοῦ ε'. (3) Ις. τοῦ ε'. (4) Πόρ. Γ'. τῆς Θ. τοῦ ε'. (5) Λῆμ. Δ'. (6) ΚΒ. τοῦ ε'. (7) Ις. τοῦ ε'. (8) Ἐκ κατ.

κ. 354. Ἀ'χθήτωσαν Κάθετοι αἱ αλ, βξ, ἴσαι ταῖς δοθείσαις αβ, βγ, διὰ δὲ λ καὶ ξ ἀχθήτω Εὐθεῖα συνιοῦσα (1) τῇ αβγ προσεκβληθείσῃ κατὰ τὸ ψ· Φημὶ δὴ Α'., ὡς ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγῃς τὴν γπ, ἔσται ἡ γπ τρίτη ἀνάλογος. Μεταχθήτω δὴ ἡ γπ εἰς τὴν γε, ἀπὸ δὲ τοῦ ε Κάθετος ἀνήχθω ἡ ερ, καὶ ἔσται ἡ τετάρτη· μετηνέχθω ἡ ερ εἰς τὴν εζ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ζσ, καὶ ἔσται ἡ πέμπτη· καὶ οὕτω τοίνυν ὁ λόγος αβ : βγ, τουτέστιν ὁ αλ πρὸς βξ, διὰ τῶν ὅρων αλ, βξ, γπ, ερ, ζσ, κξ: εἶτ' οὖν διὰ τῶν αβ, βγ, γε, εζ, ζι, κξ: ἐς ἄπειρον προαχθήσεται· Ἅπας γὰρ ὅρος, οἷον ὁ ζσ, ἀφαιρεθῆναι δυνήσεται ἀπὸ τοῦ λοιποῦ ζψ· ἐπειδὴ γὰρ ἡ λα, ἤτοι ἡ αβ, ἐλάσσων τῆς αψ, καὶ ἡ ζσ ἐλάσσων ἔσται καὶ αὐτὴ τῆς ζψ (2).

Λέγω δὲ Β'., ὡς ἡ αψ ἴση ἐστὶ τῷ ὅλῳ ἀθροίσματι τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλογουσῶν.

Α'. Μέρος. αψ : βψ : : αλ : βξ (3), τουτέστιν ὡς αβ : βγ· καὶ τοίνυν ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν (4) αβ : αψ : : βγ : βψ· ἄρα (5) αψ : βψ : : βψ : γψ· Ἀ'λλαμὴν (6) αψ : βψ : : λα : ξβ, καὶ βψ : γψ : : ξβ : πγ, ἄρα λα : ξβ : : ξβ : πγ. Ὡ'σαύτως δείξω ξβ : πγ : : πγ : ρε, καὶ ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον.

Β'. Μέρος. Ἅπαν τὸ τῶν ἀπειροπλαθῶν ὅρων ἄθροισμα, οὐδ' ἔλασσον ἐστὶ τῆς αψ, οὐδέ γε μεῖζον, ἴσον ἄρα· Καὶ μεῖζον μὲν οὐχί, δέδεικται γὰρ ἀνωτέρω ὡς ἡ πγ ἐλάσσων τῆς γψ, ἥτε ρε τῆς εψ, καὶ ἡ σζ τῆς ζψ, καὶ ἔτως ἐφεξῆς τέρματος ἄνευ· δυνήσονται ἄρα ἅπαντες οἱ ὅροι πγ, ρε, σζ, κξ: πέρατος ἄνευ, ἐπ' Εὐθείας τῆς αψ ἀλλήλων ἐχόμενοι συναθῆναι, ὥστε ὡς με μηδέποτε τοῦ σημείου ψ ἐφικνεῖσθαι, ἐπὶ παντὸς οὐτινοσοῦν ἀριθμοῦ πέρας ἔχοντος πληθυνόμενος· Ὅτι δὲ οὐδ' εἰ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἡ τῶν ὅρων πρόοδος συνεχίζοιτο, τὴν Εὐθεῖαν αψ ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται, ἐκ τούτου ἂν εἴη φανερὸν, ὅτι ἅπασα ἡ ἐπ' ἄπειρον προήκουσα τῶν ὅρων πρόοδος, ἐπ' αὐτὴν τὴν αψ ἔχει μετενεχθῆναι, ὥστε οὐδέποτ' ἂν τῆς Εὐθείας αψ μείζων γένοιτο ἡ τοιάδε πρόοδος· ἀλλὰ γὰρ οὐδὲ ἐλάσσων ἂν εἴη τῆς αψ, ἤδη καὶ γὰρ ἐδείχθη τὰς αψ, βψ, γψ συνεχῶς εἶναι ἀνάλογον· Καὶ ὡσαύτως ἂν δειχθείη καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εψ, ζψ, ιψ, κξ: Ἐπειδὴ τοίνυν μεταγομένων τῶν ἀνάλογον ὄντων πγ, ερ, ζσ, κξ : εἰς τὰς γε, εζ, ζι, κξ:, τὰ λοιπὰ εψ, ζψ, ιψ, κξ: ἀεὶ συνεχῶς ἀνάλογον ἐστὶν, ὡς δέδεικται· ἐφικ-

(1) Σχ. μετὰ τὴν ΛΓ. τοῦ α'. (2) Ἐκ τοῦ Α. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ ς'. καὶ ἐκ τῆς ΙΔ. τοῦ ε'. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα. (4) Ις. τοῦ ε'. μετὰ τοῦ Σχολίου. (5) Β. Πόρ. τῆς ΙΗ. τοῦ ε'. (6) Α. Πόρ τῆς Δ. τοῦ ς'.

τὸν τέως ἐςὶ πρός τι λοιπὸν (1), ὃ ἂν τῦ δοθέντος παντὸς εἴη ἔλαττον· ταύτη τοι καὶ τῶν ἀναλόγων τὸ ἄθροισμα, ἅπαν ὑπερβάλλει μέγεθος, ὅπερ ἂν τῆς αψ ἔλαττον εἴη. Ἐπεὶ δὲ δὴ ὅτε μεῖζον τυγχάνει ὄν, ὅτε ἔλαττον τῆς αψ, τῇ αὐτῇ ἴση ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

Θεώρημα.

„Ἡ τῶν πρώτων ὅρων διαφορὰ, καὶ ὁ ὅρος ὁ πρῶτος, καὶ ὅλον τὸ τῶν „ἀπείρων ἀναλογιῶν ἄθροισμα συνεχῶς ἀνάλογον ἐςί.

Ἐν τῷ ἀνωτ. Σχήματι ἀχθήτω ἡ ξχ Παράλληλος τῇ αψ, καὶ λχ ἔςαι ἡ διαφορὰ τῦ Α΄. ὅρυ αλ, τυτέςι τοῦ αβ, καὶ τῦ Β΄. βξ, ἤτοι βγ. Παραλλήλυ τοίνυν ὄντης τῆς χξ πρὸς τὴν αψ, ἔςαι λχ : χξ : : λα : αψ (2)· Ἀλλαμὴν χξ = αβ, καὶ λα = αβ, ἄρα ἡ λχ διαφορὰ ἐςὶ πρὸς αβ τὸν πρῶτον ὅρον, ὡς αβ ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς αψ τὸ ὅλον ἄθροισμα. Ο. Ε. Δ.

Τὸ δ' αὐτὸ καθόλυ τε καὶ συντόμως δειχθήσεται ἐν οἱῳδήποτε ποσῦ γένει τοιῷδε τρόπῳ. Ἔςω συνεχῶς ἀνάλογον ὁποιαῦν (κἂν ἀριθμοὶ ὦςιν) αψ, βψ, γψ, κξ:, τὰ δὲ πάντα ἐπὶ τὸ πρῶτον μετηνέχθω τὸ αψ· καὶ ὕτως ἔσονται αβ, βγ, γε, εζ, κξ: τῶν ἀναλόγων διαφοραὶ, αἵτινες ἅπασαι συνάμα τῇ ἐχάτῃ πηλικότητι ιψ συνεξισῦνται τῇ πρώτῃ αψ· Ἐπειδὴ τοίνυν τῶν ἀναλόγων ἐς ἄπειρον συνεχιζομένων, ἡ ἐχάτη ποσότης διὰ τῆ Β΄. Λήμματος οἴχεται, σαφὲς ἂν εἴη, τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλόγων τὰς διαφορὰς συνισῦσθαι τῷ πρώτῳ ὅρῳ αψ· Εἶτα ἐπειδὴ αψ : βψ : : βψ : γψ, καὶ (3) κατ' ἀντιςροφὴν, ὡς αβ διαφορὰ πρὸς αψ πρῶτον ὅρον, ὕτω βγ ἡ δευτέρα διαφορὰ πρὸς βψ τὸν ὅρον τὸν Β΄., καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Ἄρα ὡς αβ πρώτη διαφορὰ πρὸς αψ πρῶτον ὅρον, ὕτως (4) ἅπασαι αἱ διαφοραὶ (τυτέςιν ὡς ἤδη δέδεικται τὸ πρῶτον ποσὸν αψ) πρὸς τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν ἀπείρων. Ο. Ε. Δ. κ. 355.

Πρότασις ΙΒ.

„Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αβ, βγ, αζ), τετάρτην ἀνάλογον προ„σευρεῖν.

Διατετάχθωσαν αἱ δοθεῖσαι Εὐθεῖαι ὡς ἐπὶ τῦ Σχήματος· ἀχθήτω δὲ καὶ Εὐθεῖα ἡ βζ, πρὸς ἣν Παράλληλος ἡ γψ, μὴ πεπερασμένη, ἢ δή- κ. 356.

(1) Λήμ. Β΄. (2) Δ. Πόρ. τῆς Δ. τῦ ς΄. (3) Δ. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῦ ε΄. (4) ΙΒ. τῦ ε΄.

πε γψ προσαυτάτω ἡ αζ προεκβληθεῖσα κατὰ τὸ λ. Φημὶ δὲ δὴ ὡς αβ: βγ : : αζ : ζλ· δῆλον δὲ ἐκ τῆς Β'. τῦ Παρόντος· ὥςε ἡ ζλ ἡ ζητεμένη ἐςὶ τετάρτη ἀνάλογος.

Σχόλιον.

Καλῶς ὁ ἡμέτερος Βεττῖνος, ἐν τοῖς αὐτῦ θησαυροῖς τῆς Μαθηματικῆς φιλοσοφίας, ἐκ τῆς ΛΕ'. τῦ Γ'. καὶ τῆς ΙΔ'. τῦ ἀνὰ χεῖρας, ἡ τῆς παρόσης ἀδόλως ἐξήρτηται, τριῶν δοθεισῶν τὴν τετάρτην, καὶ δυεῖν τὴν τρίτην παρίςησιν ὧδέ πως.

κ. 357. Ἐὰν ὦσι τρεῖς Εὐθεῖαι, ἡ δευτέρα γβ, καὶ ἡ τρίτη βδ ἐπ' εὐθείας ἐκκείθωσαν, καὶ τύτων ἡ πρώτη βα ἀπτέθω κατὰ τὸ β ὑπὸ τῇ τυχήσῃ Γωνίᾳ· εἶτα διὰ τῶν Σημείων γ, α, καὶ δ (1), Κύκλος γεγράφθω, οὗ τῇ Περιφερείᾳ ἡ αβ πρώτη προεκβληθεῖσα προσαντάτω κατὰ τὸ ψ· Ἡ γὰρ βψ ἡ τετάρτη ἔςαι ἀνάλογον.

Ἐπειδὴ γὰρ τὰ Ὀρθογώνια αβψ, γβδ (2) ἴσα ἀλλήλοις ἐςὶν, ἔςαι αβ : βγ : : βδ : βψ διὰ τὴν ΙΔ'. τῦ Παρόντος, τὴν ἐκ ταύτης ὥσπερ εἴρηται, μηδόλως ἐξηρτημένην.

κ. 358. Ἐὰν δὲ ὦσι δύω Εὐθεῖαι αβ, βγ, τῇ δευτέρᾳ βγ ἐπ' εὐθείας προσκείσθω ἡ βδ ἴση τῇ βγ· εἶτα πρὸς τὴν γδ προσπιπτέτω ἡ πρώτη αβ κατὰ τὸ β ἐν οἱαδήποτε Γωνίᾳ· Καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω· Ἔςαι γὰρ ἡ βψ ἡ ζητεμένη τρίτη ἀνάλογον.

Ἡ ἀπόδειξις παραπλησία ἐςὶν· Ἴσων γὰρ ὄντων τῶν ὑπὸ αβψ, γβδ Ὀρθογωνίων, ἔςαι αβ : βγ : : βδ = βγ : βψ.

Πρότασις ΙΓ.

„Δυεῖν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αγ, γβ), μέσην ἀνάλογον πρόσευρεῖν.

κ. 359. Ἡ ἐκ τῶν δύω τῶν δοθεισῶν συγκειμένη αβ δίχα τετμήθω κατὰ τὸ ξ, καὶ Κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω Κύκλος διὰ α καὶ β· Εἶτα ἀπὸ τῦ γ πρὸς Ὀρθὰς ἤχθω ἡ γζ, πρὸς τὴν Περιφέρειαν κατὰ τὸ ζ προσπίπτυσα.

Λέγω δὴ ὡς αγ : γζ : : γζ : γβ.

Ἀχθήτωσαν γὰρ αἱ αζ, βζ, καὶ τὸ (3) αζβ Τρίγωνον ἔςαι ὀρθογώνιον, ἀπὸ δὲ τῆς τύτυ ὀρθῆς Γωνίας ἡ Κάθετος ζγ ἐπὶ τὴν Βάσιν, ὥςε αγ : γζ : : γζ : γβ (4)

(1) Ε. τῦ γ'. (2) ΛΕ. τῦ γ'. (3) ΛΛ. τῦ γ'. (4) Λ. Πόρ. τῆς Η. τῦ ς'.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Κἀντεῦθεν δῆλον, ὡς εἴγε ἐξ οὐτινοσοῦν τῶν κατὰ τὴν περιφέρειαν Σημείων ζ, ἐπὶ τὴν Διάμετρον κάθετος ἀχθείη ἡ ζγ, ἡ τοιαύτη μέση ἔςαι ἀνάλογον, μεταξὺ τῶν τῆς Διαμέτρου τμημάτων αγ καὶ γβ. Α'.

Δῆλον δὲ, καὶ ὅτι ἡ μέση ἀνάλογον γζ τὸ τῶν ἄκρων ἡμιάθροισμα αξ οὐδέποτε ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται· ἀλλὰ τῶν ἀκροτήτων ἀνίσων ὐσῶν, ἡ μέση γζ τῆ ἡμιαθροίσματος ἐλάσσων ἔςαι, τοῦθ' ὅπερ κἀκτῆς ΚΕ'. τοῦ Ε'. Βιβλίου ἐν εἴδει πορίσματος ἐπεφέρετο. Β'.

Σχόλιον περὶ τὸ Β'. Πόρισμα.

Π ρ ό β λ η μ α.

Ἐπὶ τῶν Τριῶν ἀναλόγων, δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων αβ, καὶ τῆς μέσης δε, τὰς ἀκρότητας αὐτὰς προσευρεῖν. Δεῖ δὲ τὴν μέσην δε τῆς ἡμισείας τοῦ ἀθροίσμ. αβ μὴ εἶναι μείζονα (κατὰ τὸ Β'. Πόρ.).

Περὶ τὴν αβ ὡς περὶ Διάμετρον Κύκλος γεγράφθω· τοῦ δὲ θὴ Κύκλου κατὰ τὸ β (ὃ θάτερον ἐςὶν ὁποτερονοῦν τῶν τῆς Διαμέτρου περάτων) ἁπτέσθω ἡ Εὐθεῖα ηβ τῇ δοθείσῃ δε ἴση, καὶ διὰ τοῦ η ἀχθήτω ηζ τῇ αβ Παράλληλος, ἥτις διὰ τὸ τὴν δε, ἤτοι τὴν ηβ τῆς τοῦ Κύκλου Ἡμιδιαμέτρου μὴ μείζονα εἶναι, προσπεσεῖται τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ ζ· ἀπὸ δὲ τοῦ ζ Σημείου ἐπὶ τὴν Διάμετρον αβ, καθείσθω Κάθετος ἡ ζγ, αὕτη γὰρ τὴν αβ τεμεῖ κατὰ τὰς ζητουμένας ἀκρότητας αγ, γβ.

Ἡ γὰρ ζγ (διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῶν ἐνταῦθα) ἡ μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῶν αγ, γβ· διὰ δὲ τὴν ΛΔ'. τοῦ Α'. ζγ = ηβ, τουτέςιν (ἐκ κατασκ.) ζγ = δε· ὥςε περανθῆναι τὸ ζητούμενον.

Ἀριθμητικῶς δὲ εὑρεθήσονται αἱ αγ, γβ, τῶν αὐτῶν ὡς ἀνωτέρω δοθέντων, ἐὰν ἀχθείσης τῆς ζξ, ἐκ τοῦ αὐτῆς Τετραγώνου $= \frac{1}{4}$ αβ^{T} = Τετραγ. τῷ ἀπὸ $\frac{1}{2}$ αβ, ἀφαιρεθῇ ζγ^{T} = δε^{T}, καταλειφθῇ δὲ ξγ^{T}. Ἡ γὰρ ἐκ τούτου Τετραγωνικὴ ῥίζα ξγ προσεθεῖσα μὲν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, ἀφαιρεθεῖσα δὲ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἡμισείας, τῇ μὲν θατέραν τὴν αγ, τῇ δὲ θατέραν τὴν γβ τῶν ζητουμένων ἀκροτήτων παρέξεται.

Κἀντεῦθεν δὴ καὶ τρεῖς, καὶ ἑπτὰ, καὶ πεντεκαίδεκα μέσαι ἀνάλογον δοθεῖσα προσευρεθήσονται, κατ' ἀριθμὸς δηλονότι τηλικοῦτοι, ἡλίκοι ἐκ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας 1, 2, 4. 8, 16 κξ: προθέσει ἀνακύπτουσιν· ἤτοι γὰρ μία = 1, ἢ τρεῖς = 1 + 2, ἢ ἑπτὰ = 1 + 2 + 4, καὶ οὕτως ἑξῆς. Γ'.

Ἔςωσαν δοθεῖσαι πηλικότητες α καὶ ε, καὶ τούτων μέση ἡ μ ἡ διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν ἐξευρισκομένη. Εἶτα μεταξὺ α καὶ μ ληφθήτω μέση ἡ λ, μεταξὺ δὲ μ καὶ ε μέση ἡ ν, καὶ ἔσονται λ, μ, ν, τρεῖς αἱ εὑρεθεῖσαι μέσαι μεταξὺ α καὶ ε· Ὡς εἴγε καὶ ἐφεξῆς μέσαι ληφθῶσι τῶν α καὶ λ, λ καὶ μ, μ καὶ ν, ν καὶ ε, ἔσονται δὴ ἑπτὰ αἱ πᾶσαι μεταξὺ τῶν α καὶ ε, αἱ δὲ αὖθις καὶ μεταξὺ τούτων μέσαι, συνάμα ταῖς ἑπτὰ προτέραις, μέσας τὰς πάσας μεταξὺ τῶν α καὶ ε παρέξουσι πεντεκαίδεκα. Καὶ οὕτως ἐς ἄπειρον.

Σχόλιον.

Πρᾶγμα δ' ἂν εἴη ἐνταῦθα, καὶ περὶ τῆς τῶν δυεῖν μέσων εὑρέσεως, δυεῖν δοθεισῶν ἀκροτήτων, βραχέ' ἄττα ἡμᾶς διελθεῖν. Εἰς μὲν οὖν τὴν τοῦ Προβλήματος τοῦδε ἐπίλυσιν, τοῦ Πλάτωνος προτρεψαμένου, τῶν ἂν Ἑλλάδα γεωμετρησάντων, ὅς τις οὐδεὶς τὴν παρ' ἑαυτοῦ σπουδὴν εἰσενέγκας οὐκ ἔςι νεανικώτατα. Κεῖνται δὲ παρ' Εὐτοκίῳ ἐν Ὑπομνήμασι (1) τοῖς εἰς τὰ Ἀρχιμήδου ποικίλοι τρόποι καταλεγόμενοι, λεπτῆς ἐπιγεννήματα φρενὸς, Πλάτωνος, καὶ Ἀρχύτα τοῦ Ταραντινοῦ, καὶ Μεναίχμου, καὶ Ἐρατοσθένους, καὶ Φίλωνος τοῦ Βυζαντίου, καὶ Ἥρωνος, καὶ Ἀπολλονίου τοῦ περγαίου, καὶ Νικομήδου, καὶ Διοκλέους, καὶ Σπόρου, καὶ Πάππου. Οἷς δὴ καὶ ἄλλους ἔτι προσέθεντο ὅ,τε Οὐερνέρος, καὶ ὁ Γρηγόριος ὁ ἀπὸ ἁγ. Βικεντίου, καὶ Ῥενάτος ὁ Καρτέσιος. Ἐξ ὧν δὴ μεθόδων τρεῖς μόνας τὰς τῶν λοιπῶν εὐχερεςέρας ἔδοξεν ἡμῖν ὑποθέσθαι.

Ἡ Μέθοδος ἡ κατὰ Πλάτωνα.

„Μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ, βγ, μέσας δύω προσευρεῖν.

κ. 360. Κείσθωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὀρθὰς, καὶ προεκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον πρὸς χ καὶ ψ. Εἶτα ληφθήτωσαν γνώμονες δύω (οὕτως ὁ ἡμέτερος Κλαύδιος ὁ Ῥίχαρδος· ὁ γάρ τοι Πλάτων ἑνὶ ἐκέχρητο φέροντι ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Πλευρῶν δε πρὸς ὀρθὰς ἐνεσηριγμένον τὸν γε, δι' ὅλης τῆς δε εἰρημένης Πλευρᾶς ἀπαρεγκλίτως ἀγόμενον), καὶ θατέρου μὲν τῶν γνωμόνων ἡ Γωνία δ ἐφηρμόσθω τῇ Εὐθείᾳ βχ, οὕτως ἀλλ' οὖν ὡςε καὶ τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν χωρεῖν διὰ τοῦ α· κατὰ δὲ τὸ Σημεῖον ε, καθ' ὃ ἡ ἑτέρα τοῦ γνώμονος Πλευρὰ τέμνουσα εἴη τὴν Εὐθεῖαν βψ, ἐφαρμοσθέντος τοῦ δευτέρου γνώμονος, χωρείτω ἡ τούτου ἑτέρα Πλευρὰ διὰ τοῦ γ. Φημὶ δῆτα ὡς αἱ βδ, βε, αἱ δύω μέσαι εἰσὶ μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ καὶ βγ. Ἔςαι γὰρ αβ : βδ : : βδ : βε : : βε : βγ.

(1) Ὑπομν. Θεωρ. Δ. Βιβ β'. περὶ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου.

Ἡ δὲ ἀπόδειξις σαφὴς ἐκ τοῦ Α. Πορίσμ. Προτ. Β'. Βιβλ. ς'. Τὸ γὰρ αδε Ὀρθογώνιον τρίγωνόν ἐστιν, ἀπὸ δὲ τῆς ἐν τούτῳ ὀρθῆς Γωνίας Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν κατηνέχθη ἡ δβ· ὥστε κατὰ τὸ εἰρημ. Πόρ. αβ : βδ : : βδ : βε. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν τοῦτον λόγον καὶ βδ : βε : : βε : βγ. Δοθεισῶν ἄρα τῶν αβ, βγ, εὕρηνται δύω μέσαι συνεχῶς ἀνάλογον βδ, δε. Ο. Ε. Π.

Ἡ δὲ δὴ μέθοδος αὕτη πρὸ ἁπασῶν τῶν ἄλλων ἐστὶν εὐξύνετος.

Μέθοδος ἡ κατὰ φίλωνα τὸν Βυζάντιον.

Αἱ δύω Εὐθεῖαι αβ, βγ πρὸς Γωνίαν ὀρθὴν συνεστάθωσαν, καὶ πληρωθήτω τὸ Ὀρθογώνιον αβγδ, καὶ προεκβεβλήθωσαν αἱ δα, δγ ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ τοῦ αβγδ Ὀρθογωνίου Διαγώνιοι βδ, αγ, ἀλλήλας τέμνουσαι κατὰ τὸ ε· καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εβ, Κύκλος γεγράφθω, ὃς ἅτε δὴ Ὀρθογωνίου, καὶ διὰ τῶν λοιπῶν Γωνιῶν διελεύσεται τῆς γ, καὶ δ, καὶ α (1). Τοῦ γὰρ Κύκλου περὶ τὸ Ὀρθογώνιον περιγράφεσθαι (2) δυναμένου, τὰ μὲν α, β, γ, δ σημεῖα ἐπὶ τῆς Περιφερείας ἔσται, διὰ δὲ τὰς Ὀρθὰς ὑπὸ αβγ, βγδ, αἱ αγ καὶ βδ Διάμετροι ἔσονται Κύκλου τοῦ αὐτοῦ (3), ὧν ἡ κατατομὴ ε τοῦ Κύκλου Κέντρον. Εἶθ' ὁ Κανὼν ἥτω προσηρμόσθω ἐπὶ τοῦ σημείου β, ὥστε τὰς ἀπολαμβανομένας βη καὶ ξζ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις. Φημὶ δὴ τὰς αζ, γη, τὰς δύω μέσας τυγχάνειν μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ καὶ βγ· εἶναι γὰρ αβ : αζ : : αζ : γη : : γη : βγ. κ. 361.

Ἐπειδὴ γὰρ βη, ξζ (4) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ ξη, βζ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· καὶ ἴσα ἄρα τὰ Ὀρθογώνια ξηβ, βζξ, τουτέστι τὰ Ὀρθογώνια (5) δηγ, δζα· καὶ ἔστιν οὕτως ηδ : δζ : ἀντιπεπονθότως (6) αζ : ηγ. Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ Τριγώνου ζηδ (διὰ τὴν βα Παράλληλον τῇ Βάσει ηδ) ηδ : δζ : : βα : αζ (7), ἄρα (8) βα : αζ : : ηδ : δζ. Αὖθις ἐπειδὴ δέδεικται ἤδη αζ : ηγ : : βα : αζ, ἔστι δὲ βα : αζ : : ηδ : δζ, τουτέστι (διὰ τὸ Παράλληλον εἶναι τὴν γβ τῇ βάσει δζ, ἐπὶ τοῦ ηδζ Τριγώνου) ὡς ηγ : γβ· ἔσται δὴ (9) καὶ αζ : ηγ : : ηγ : γβ. Πᾶσαι τοίνυν αἱ τέσσαρες βα, αζ, ηγ, γβ συνεχῶς ἀνάλογον εἰσί, καὶ ἑπομένως μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ, βγ, εὕρηνται αἱ δύω μέσαι. Ο. Ε. Ε.

Αὗται αἱ δύω μέθοδοι, καίτοι εὐφυῶς τε καὶ ῥᾳδίως τὴν εὕρεσιν ἐπιτη-

(1) ΛΑ. τοῦ γ'. (2) Πόρ. τῆς Ε. τοῦ δ'. (3) ΛΑ τοῦ γ'. (4) Ἐκ κατ. (5) Α. Πόρ. τῆς Λς. τοῦ γ'. (6) Διὰ τὴν ΙΔ. τὴν ταύτης μὴ ἐξηρτημένην. (7) Α. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ ς'. (8) ΙΔ. τοῦ ε'. (9) Διὰ τὴν αὐτήν.

δεύεται, διὰ γεμὴν τὴν κατὰ ἀπόπειραν τοῦ τε Γνώμονος καὶ τοῦ Κανόνος χρῆσιν, Γεωμετρικαὶ ἐκ εἰσί.

Η' Μέθοδος ἡ κατὰ Καρτέσιον.

κ. 362. Παρασκευασθήτω τοιοῦτοι ὄργανον. Κανόνες δύω συμπεπήχθωσαν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον υ περιαγόμενοι, ὡς ἔχειν εὐχερῶς τῇ περιαγωγῇ ἀνοίγεσθαι, ἢ κλείεσθαι· τοῖς δὲ Κανόσιν ἐνεσφιγμένοι ἔστωσαν πλείονες γνώμονες, ἀλλήλοις συνημμένοι κατὰ τὰ σημεῖα β, γ, δ, ε, ζ, η, τοιῷδε νόμῳ, ὡς τῶν Κανόνων υχ, υψ ἀπ' ἀλλήλων τῇ ἀνοιγῇ ἀπαγομένων, τὸν γνώμονα βγ, προωθεῖν τὸν γδ τὸν ἐν τῷ Κανόνι υψ, τὸν δὲ γνώμωνα γδ, προωθεῖν τὸν δε τὸν ἐν τῷ Κανόνι υχ· καὶ ὡσαύτως ὑπὸ μὲν τοῦ δε τὸν εζ προσελκύνεσθαι, ὑπὸ τούτου δὲ τοῦ εζ τὸν ηζ, καθ' ὅτως ἐφεξῆς. Ἐν ᾧ δὲ οἱ Κανόνες υχ, υψ συγκλειόμενοι ἀλλήλοις προσάγοντοι, ἅπαντα τὰ Σημεῖα β, γ, δ, ε, ζ, η, ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ Σημείῳ τῷ α συμπίπτειν. Διὰ γοῦν τοῦ τοιῶδε ὀργάνου μεταξὺ δυεῖν δοθεισῶν, οὐ μόνον δύω, ἀλλὰ καὶ τέσσαρες, καὶ ἕξ, καὶ ὁπόσας ἂν βούλοιο, ἐξευρίσκοντοι. Ὅπερ οὔτε διὰ τῶν Κωνικῶν τομῶν, οὐδὲ καθ' ἑτερόντινα τῶν παρὰ τοῖς ῥηθεῖσι Γεωμέτραις εὑρημένων μεθόδων ἀνυστὸν ὅλως.

Πρὸς εὕρεσιν μέσων δυεῖν, τριῶν δεῖ Γνωμόνων, εἰς δὲ τεσσάρων, γνωμόνων πέντε, καὶ ἑξῆς.

Τῶν τοίνυν δοθεισῶν ἡ ἐλάσσων μετηνέχθω ἐπὶ τὸν Κανόνα υχ, καὶ ἔστω αὕτη ἡ υβ· ἡ δε δὴ μείζων ἐπὶ τὸν ἕτερον Κανόνα τὸν υψ, καὶ ἔστω υε· καὶ προσηρμόσθω δὴ τῶν Γνωμόνων ὁ Α'. τῷ σημείῳ β, κἀνταῦθα σφιγχθήτω. Ἀνοιγέσθωσαν δὲ οἱ Κανόνες, ἕως οὗ ἡ τοῦ τρίτου Γνώμονος Πλευρὰ διέλθοι διὰ τοῦ ε. Φημὶ γὰρ ὡς ὅτως αἱ υγ καὶ υδ, εἰσὶν αἱ δύω ζητούμεναι μέσαι μεταξὺ τῶν δοθεισῶν υβ, υε· εἰσὶ γὰρ υβ : υγ :: υγ : υδ :: υδ : υε.

Η' δὲ δεῖξις κατάδηλος ἐκ τοῦ Β'. Πορίσματος τῆς Η' Προτάσεως τοῦ ς'. Βιβλίου. Ἐκ γὰρ τῆς τοῦ ὀργάνου κατασκευῆς, ἡ ἐν τῷ υγδ Τριγώνῳ Γωνία ἡ πρὸς τῷ γ, ὀρθὴ οὖσα τυγχάνει, ἀφ' ἧς ἡ γβ Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν υδ· ἄρα διὰ τὸ εἰρημένον Πόρ. υβ : υγ :: υγ : υδ. Αὖθις δὲ καὶ τῷ Τριγώνῳ υδε, τῆς πρὸς τῷ δ Γωνίας Ὀρθῆς ὔσης, καὶ ἀπὸ ταύτης Κάθετος ἐπὶ τὴν Βάσιν υε ἀγομένης τῆς δγ, ἔσται υγ : υδ :: υδ : υε. Καὶ εἰσὶν ἄρα υβ, υγ, υδ· υε αἱ τέσσαρες συνεχῶς ἀνάλογον· ὥστε μεταξὺ τῶν δύω δοθεισῶν υβ, υε, εὕρηνται μέσαι δύο υγ, υδ. Ο. Ε. Π.

Ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν υβ, υη, τέσσαρες ὦσιν αἱ ζητούμεναι μέσαι, ἀνοι-

γέθωσαν οἱ Κανόνες, ὡς τὴν τῆ Ε΄. τῶν γνωμόνων Πλευρὰν ζη διέρχεθαι διὰ τῆ η, καὶ ὅτως ἔσονται αἱ υγ, υδ, υε, υζ, τέσσαρες μέσαι ἀνάλογον μεταξὺ τῶν υβ καὶ υη. Η΄ δὲ δεῖξις κατάδηλος ἐκ τῆ αὐτῆ Πορίσματος.

Η΄ δὲ δὴ Μέθοδος αὕτη, καίτοι δι' ὀργάνε περαινομένη, ὁ πολλῷ πλέον τῆ Πλατωνικῆ ἐκείνε ἐςὶν ἐργωδέςερον, θαυμαςὴ τῷ ὄντι ἐςὶ, καὶ διὰ τὸ μηδὲν ποιεῖν κατ' ἀπόπειραν, καὶ διὰ τὸ μὴ πρὸς εὕρεσιν δυεῖν μόνων, ἀλλὰ καὶ τεσσάρων ἧν δέοι, καὶ ἕξ, καὶ ὁποσωνῆν ἐξαρκεῖν.

Διὰ δὲ τῶν δύω μέσων, τῆς ἐπιλύσεως τυγχάνει καὶ τὸ Δηλιακὸν πρόβλημα, ὁ τῆ Κύβε διπλασιασμὸς, καὶ Σώματα τὰ τυχόντα κατὰ λόγον τὸν δοθέντα (1) αὔξεθαι, ἢ μειῆθαι δύνατται, καθάπερ τὰ ἐπίπεδα τῶν Σχημάτων (2) διὰ μιᾶς μέσης εὑρισκομένης. Πρῶτος δὲ ὁ τὴν εἰς τῆτο φέρεσαν τεμὼν φέρεται ὁ Ἱπποκράτης, ᾧ καὶ πάντες ἑξῆς οἱ γεωμετρήσαντες παρηκολυθηκότες εἰσί.

Καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν δύω μεσοτήτων ἐν δυσὶ δεδομέναις ἀκρότησι θήρας τοσαῦτα· Τῶν τις δὲ καθ' ἡμᾶς Γεωμετρίας ἕξιν ἑαυτῷ προσεῖναι οἰόμενος θαυμασίαν, αὐτῆς τῆς νύσσης ἐπ' ἀκριβὲς ᾠήθη ἱκέθαι τῆ σκοπεμένε, πρῶτος μὲν αὐτὸς μετὰ τοσήτε, καὶ μόνος, γεωμετρικώτατα τὴν εὕρεσιν ἐπισκευάσαθαι ἡγησάμενος, πολλὰ μέντοι παραλογιθεὶς καὶ τὸν παρὰ τοῖς εἰδόσιν ἔλεγχον μὴ διαφυγών. Τῆτον οὖν ἀπευθῦναι ὑπὸ ἄλλων εἰς τῆτο παρορμηθέντες, αὐτοὶ τὸν ἀγῶνα ἀνεβαλόμεθα, ὅσον δὲ εὐλόγως, αὐτὴν εἴση μετιὼν τὴν ὑφ' ἡμῶν ἐκδοθεῖσαν ἀντίῤῥησιν, ἣν ἐν αὐτῷ τῷ τέλει τῆ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίε Σοὶ ὑποθήσομεν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐντεῦθεν δὲ λαβεῖν ἔνι τὴν μέθοδον τῆ τὸν τυχόντα λόγον τὸν κατὰ ἐλάσσονα ἀνισότητα, ἕως οὗ δόξειε, προαγαγεῖν. Κείθω λόγος κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα ὁ αξ πρὸς αγ, ὃν διὰ πλειόνων ὅρων δέον προαγαγεῖν. Ἐπὶ τῆς αγ ὡς ἐπὶ διαμέτρε, Ἡμικύκλιον γεγράφθω, ᾧ τινι ἀπὸ τῆ α Σημείε ἐνηρμόθω ἡ αβ = αξ· Προαχθήτωσαν δὲ ἐπ' ἄπειρον αἱ αβ, αγ, κατὰ τὰ Σημεῖα φ καὶ π· ἐπιζευχθήτω δὲ ἡ βγ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀχθήτωσαν αἱ γδ, δε, εζ, ζη, ηξ· Καὶ διὰ τὰς Ὀρθὰς (3) ὑπὸ αβγ, κ. 363.

(1) Ὅρα τὸ Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ΙΗ. τῆ ιβ΄. (2) Ὅρα τὸ Δ. Πόρ. τῆς Κ. τῆ ς΄. (3) ΔΔ. τῆ γ΄. καὶ Ὅρ. ΙΔ. τῆ α΄.

αγδ, αδε, αεζ, αζη, ηξ: ἔσονται (1) αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, αη, ηξ: συνεχῶς ἀνάλογον.

κ. 364. Τὸ δ' αὐτὸ λαβεῖν ἔςαι, καὶ τῆς ὑπὸ αβγ Ὀρθῆς μὴ ὔσης. Συνεςάθωσαν γὰρ κατὰ Γωνίαν τὴν τυχοῦσαν βαγ αἱ Εὐθεῖαι αβ, αγ, καὶ προαχθήτωσαν ὡς ἀνωτέρω κατὰ φ καὶ π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ· τῇ δὲ ὑπὸ αβγ Γωνίᾳ ἴσαι γινέσθωσαν αἱ ὑπὸ αγδ, αδε, αεζ, ηξ: Τὰ δὴ Τρίγωνα αβγ, αγδ, αδε, κτ:, διὰ τὰς Γωνίας τάς δε, καὶ τὴν κατὰ τὸ α κοινὴν, Ἰσογώνια (2) ἔςαι, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅμοια (3). Ἄρα αβ : αγ : : αγ : αδ : : αδ : αε : : αε : αζ, ηξ.

Πρότασις ΙΔ.

„Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν (γ) μιᾷ (ξ) ἴσην ἐχόντων Γωνίαν Παραλληλογράμμων (Χ καὶ Ψ), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας (τουτέςιν αγ : γβ : : ζξ : ξλ). Καὶ ὧν Παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ „ἴσην ἐχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας „Γωνίας, ἴσα ἐςὶν ἐκεῖνα.

κ. 365. Κείσθωσαν αἱ Πλευραὶ ἅτως ἐπ' εὐθείας, ὥςε τὰς ἴσας Γωνίας γ καὶ ξ πρὸς τὰ ἀντίθετα εἶναι τῆς αβ Εὐθείας· καὶ διὰ τὰς Γωνίας γ καὶ ὑπὸ λγβ τὰς δυσὶν Ὀρθαῖς (4) ἴσας, ἔσονται αἱ ὑπὸ λγβ καὶ ξ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι καὶ αὐταί· ἔνθεντοι καὶ ζξ, λγ, ἐπ' εὐθείας (5) ἔσονται κείμεναι.

Δείκν. τὸ Α'. Μέρος. Αἱ ιλ καὶ σβ προεκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ π. Τὸ γοῦν Παραλληλόγρ. Χ ἐςὶ πρὸς τὸ Παραλληλόγρ. Ρ, ὡς αγ (6) πρὸς γβ, τό,τε Ψ ὁμοίως πρὸς τὸ Ρ (7) ὡς ζξ πρὸς ξλ· ἀλλ' καθ' ὑπόθ. Χ καὶ Ψ ἴσα ἐςὶ, καὶ ἑπομένως (8) Χ : Ρ : : Ψ : Ρ, ἄρα (9) αγ : γβ : : ζξ : ξλ.

Τὸ Β'. Μέρος. αγ : γβ : : ζξ : ξλ (10)· ἔςι δὲ αγ : γβ : : Χ : Ρ (11)· καὶ πάλιν ζξ : ξλ : : Ψ : Ρ (12)· ἄρα (13) Χ : Ρ : : Ψ : Ρ· ὅθεν δὴ τὰ Χ καὶ Ψ ἴσα (14) ἐςί.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν ἤρτηται ἡ τοῦ τῶν ἀναλογιῶν κανόνος τοῦ κατ' ἀντιπεπόνθησιν

(1) Β. Πόρ. τῆς Η'. τοῦ ς'. (2) Θ. Πόρ. τῆς ΔΒ. τοῦ α'. (3) Δ. τοῦ ς'. (4) ΙΓ. τοῦ α'. (5) ΙΔ. τοῦ α'. (6) Α. τοῦ ς' (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) Ζ. τοῦ ε'. (9) ΙΑ. τοῦ ε'. (10) Ἐξ ὑποθ. (11) Α. τοῦ ς'. (12) Διὰ τὴν αὐτ. (13) ΙΑ. τοῦ ε'. (14) Θ. τοῦ ε'.

δείξις, δι' οὗ ἐκ τριῶν ὅρων δοθέντων ὁ τέταρτος προσευρίσκεται, πολλαπλασιασμῷ τῶν δύω προτέρων ἐπ' ἀλλήλοις, καὶ διαιρέσει τοῦ γινομένου διὰ τοῦ τρίτου, ὅθεν ἀνακύπτει ὁ ὅρος ὁ Δ'. Καθάπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ κατ' εὐθεῖαν χωροῦντος Κανόνος ἡ τῶν λόγων θεωρεῖται ἰσότης, οἷον ἐὰν ᾖ α : β :: γ : δ, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ἔνθα τὸ τοῦ Α'. διὰ τοῦ Β'. διαιρεθέντος πηλίκον, τῷ τοῦ Γ'. διὰ τοῦ Δ'. ἴσον τυγχάνει, οὕτως ἐπὶ τοῦ κατ' ἀντιπεπόνθησιν κανόνος θεωρεῖται ἡ τῶν Ὀρθογωνίων ἰσότης, οὕτως ὥστε τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τοῦ Α'. καὶ τοῦ Β'. ἴσον εἶναι τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τοῦ Γ'. καὶ τοῦ Δ'. Οἷον ἐὰν ὦσιν α, β, γ, δ ἀντιπεπονθότες ἀνάλογον· τουτέστιν (1) ἐὰν α : γ :: δ : β, ἔσται διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν α × β = γ × δ· Καὶ τοίνυν ἐὰν τὰ γινόμενα ταῦτα ἴσα ὄντα διὰ τοῦ τρίτου γ διαιρεθῶσιν, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha \times \beta}{\gamma} = \delta$, ὅς ἐστι τῶν ὅρων ὁ Δ'.

Ἔστωσαν πηλικότητες αβ, βγ, λι, ιζ ἀντιπεπονθεῖαι ἀνάλογον· ἔσται ιζ = $\frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota}$. Οἷον ἔστω αβ Γραμμή τις ὀργειῶν 40, καὶ βγ ὀργειῶν 4, ἔσται αβ × βγ ὀργειῶν 160, ἤτοι πλέθρον Ἀγγλικόν. κ. 366.

Ἀλλὰ προκείσθω δὴ πλέθρον ἕτερον ἴσον τὸ ψ, οὗ μῆκος ὀργειῶν ιϛ τὸ ιλ, καὶ ζητείσθω ἡ τούτου Πλευρὰ ιζ. Διὰ γοῦν τὴν τῶν Ὀρθογωνίων Χ, Ψ, ἰσότητα, ἐπεὶ τὸ Χ ἐπιμηκέστερον ὂν τυγχάνει τοῦ ἰσομεγέθους Ψ, ἥττον ἔσται τὸ εὖρος. Διὸ τὸ ἔλαττον μῆκος λι ἐπὶ τοῦ πλέθρου Ψ, μεῖζον τὸ εὖρος ιζ ἀπαιτεῖ, ὡς ἡ φύσις βούλεται τοῦ κατὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν κανόνος. Καὶ τῶν ἴσων τοίνυν Ὀρθογωνίων αβ × βγ, καὶ λι × ιζ διὰ τῆς λι διαιρεθέντων, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota}$ $\left(= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16}\right)$ = ιζ = 10. Τὸ ἄρα πλέθρον τὸ Ψ εὖρος ἔλαχεν ὀργειῶν 10. Ο. Ε. Ε.

Πρότασις ΙΕ.

„Τῶν ἴσων καὶ μίαν (γ) μιᾷ (ξ) ἴσην ἐχόντων Γωνίαν Τριγώνων (αβγ, „ζγβ), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας (τουτέστιν αγ : „γβ :: ζξ : ξλ).

„Καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

(1) Ὁρ. Β. τοῦ ϛ.

κ. 367. Κείσθωσαν αγ, ξβ ἐπ' εὐθείας, ὡς ἐν τῇ ἀνωτ. Προτ., καὶ ὅτως ἔσονται καὶ αἱ λγ, ξζ ἐπ' εὐθείας κείμεναι καὶ αὐταὶ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λβ, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς δείξεως χωρήσει ὡς καὶ ἀνωτέρω.

Πόρισμα.

Τὰ Παραλληλόγραμμα καὶ τὰ Τρίγωνα, ὧν αἵτε Βάσεις καὶ τὰ ὕψη ἀντιπεπόνθασιν, ἴσα ἐστὶ, καὶ ἀνάπαλιν.

Δῆλον ἐκ τῶν προειρημένων δύω Προτάσεων. Ἔνθα μὲν οὖν τὰ Παραλληλόγραμμα καὶ τὰ Τρίγωνα ὀρθογώνια ἐστὶν ἀντιπεπονθότα τὰ ὕψη, καὶ τὰς Βάσεις, ἴσα εἶναι φανερὸν· ἔνθα δὲ δὴ πλαγιογώνια, ἐπειδὴ καὶ ταῦτα τοῖς ὁμοσίχοις Ὀρθογωνίοις τοῖς ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἴσης Βάσεως καὶ ἰσοϋψέσιν ἴσα (1) ἐστὶν, ἔσονται δὴ καὶ ταῦτα οὐδὲν ἧττον συνισούμενα, εἰ τὰ ὕψη καὶ τὰς Βάσεις ἀντιπεπόνθασιν.

Καὶ ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα ὀρθογώνια ὄντα, ἀντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τὰ δέ τοι πλαγιογώνια Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα, τοῖς τὴν αὐτὴν ἢ ἴσας ἔχουσι τὰς Βάσεις, καὶ ἰσοϋψέσιν ἐν ὀρθαῖς Γωνίαις ἴσα (2) ἐστὶν, ἔσονται δὴ ἁπλῶς τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα, ὁποῖάποτ' ἂν ᾖ, ἀντιπεπονθότα τάς τε Βάσεις καὶ τὰ ὕψη.

Σχόλιον.

κ. 368. Ἔστω Τρίγωνα δύω αβγ, δβε, ὧν αἱ πρὸς τῷ β Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἔστωσαν δὲ καὶ αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς Γωνίας ὑπὸ αβγ, δβε, ἀντιπεπονθεῖαι· ἔσται τὰ Τρίγωνα ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα· Ἐὰν δὲ τὰ Τρίγωνα ἴσα ᾖ, αἱ περὶ τὰς Γωνίας αβγ, δβε Πλευραὶ ἀντιπείσονται.

Πληρούσθω γὰρ τὰ Παραλληλόγραμμα βζ, βη, καὶ διὰ τὰς πρὸς τῷ β Γωνίας τὰς δυσὶν Ὀρθαῖς συνεξισημένας, αἱ Εὐθεῖαι γβ, βε ἐπ' εὐθείας (3) ἔσονται κείμεναι· διὰ δὲ τὰς Παραλλήλους γβε καὶ δζ, αἱ ἐναλλὰξ (4) ὑπὸ αθγ, θδζ ἴσαι εἰσί· Ἐπειδὴ δὲ (5) αθ : θδ :: εθ : θγ· ἴση δὲ ἡ εθ τῇ δζ (6), ἔσται καὶ αθ : θδ :: δζ : θγ· Ὅπερ ἐστὶν, ἐπεὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας αθγ, θδζ (7) ἀντιπεπόνθασι, τὰ Παραλληλόγραμμα (8) βη, εζ ἴσα ἐστὶ, καὶ ἑπομένως καὶ τὰ (9) τούτων ἡμίση αθγ, δθε.

---

(1) Λε. Λς. ΛΖ. ΛΗ. τοῦ α'. καὶ Ὀρ. Γ. τοῦ ς'. (2) Λυτ. (3) ΙΔ. τοῦ α'. (4) ΚΖ. τοῦ α'. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) ΛΔ. τοῦ α'. (7) Ὀρ. Β. τοῦ ς'. (8) ΙΔ. τοῦ ς'. (9) ΛΔ. τοῦ α'.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον τῶν Τριγώνων αϛγ, δϛε, ἴσων ὄντων, καὶ Γωνίας τὰς ὑπὸ αϛγ, δϛε, δυσὶν Ὀρθαῖς ἰσουμένων, αϛ : ϛδ : : εϛ : ϛγ. Πληρούσθω γὰρ δὴ τὰ Παραλληλόγραμμα ϛζ, ϛη, ἅτινα ἔσται (1) τῶν ἴσων Τριγώνων διπλάσια, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, διὰ δὲ τὰς Παραλλήλους (2) γϛε, δζ καὶ ἰσογώνια. Αἱ ἄρα περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ (3) ἀντιπεπόνθασι, τουτέστιν αβ : βδ : : δζ ἤτοι βε : βγ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ιϛ.

„Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι (αϛ, ζι, ιλ, ϛγ) ἀνάλογον ὦσι (τουτέστιν ἐὰν „ἡ αϛ : ζι : : ιλ : ϛγ), τὸ Ὀρθογώνιον (Χ) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμε„νον (αϛ, ϛγ), ἴσον ἐστὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ (Ψ) τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (ζι, ιλ) „περιεχομένῳ.

„Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ „τῶν μέσων περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔ„σονται.

Μέρος Α'. Ἐπὶ τῶν Ὀρθογωνίων Χ καὶ Ψ, περὶ τὰς ὀρθὰς καὶ ἑπομένως ἴσας Γωνίας τὰς β καὶ ι, ἔστιν ἐξ ὑποθ. αϛ : ζι, ὥσπερ κατ' ἀντιπεπόνθησιν ιλ : ϛγ· Ἄρα τὰ (4) Χ καὶ Ψ ἴσα ἐστί. Ο. Ε. Δ. κ. 369.

Μέρος Β'. Ἐπειδὴ τὰ Χ καὶ Ψ τίθεται ἴσα, αἱ ἄρα (5) περὶ τὰς ἴσας Γωνίας β καὶ ι ἀντιπεπόνθασιν, αϛ : ζι : : ιλ : ϛγ. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Κἀντεῦθεν πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τὸ δοθὲν Ὀρθογώνιον Ψ παραβαλεῖν ῥᾴδιον, ληφθείσης δηλονότι αϛ : ζι : : ιλ : ϛγ (6), καὶ τοῦ Ὀρθογωνίου Χ ὑπὸ αϛ καὶ ϛγ (7) κατασκευασθέντος· Οὕτω γάρ τοι τὸ Χ Ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται (8) τῷ δοθέντι Ψ, πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον· Τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἄλλως ἐκτελέσεις διὰ τοῦ Πορίσμ. καὶ τοῦ Σχολίου τῆς ΜΔ'. Προτάσεως τοῦ Α'. Βιβλίου.

Β'. Ἐντεῦθεν δὲ ἤρτηται καὶ ἡ τοῦ κατ' εὐθεῖαν τῶν ἀναλογιῶν κανόνος ἀπόδειξις, καθ' ὃν ἐκ τριῶν ὅρων δοθέντων τὸν Δ'. ἀνάλογον ἐξευρίσκομεν, ἐπιπολαπλασιάζοντες ἐπ' ἀλλήλοις τὸν Β'. καὶ τὸν Γ'., καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦντες διὰ τοῦ Α'. Διὰ γὰρ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότ., ἐὰν ᾖ αϛ : ζι : : ιλ : ϛγ,

(1) Διὰ τὴν αὐτήν. (2) ΚΖ. τοῦ α'. (3) ΙΔ. τοῦ ϛ'. (4) ΙΔ. τοῦ ϛ'. (5) Διὰ τὴν αὐτήν. (6) ΙΒ. τοῦ ϛ'. (7) Σχόλ. τῆς Μϛ. τοῦ α'. (8) Διὰ τὴν παροῦσαν.

ἔςαι αϛ × βγ = ζι × ιλ· καὶ διαιρεμένων τῶν ἴσων διὰ τῦ αὐτῦ αϛ, ἔςαι ϛγ = $\frac{\zeta\iota \times \iota\lambda}{\alpha\beta}$. Οὕτω καὶ ἀριθμοῖς τοῖς κειμένοις 5, 3, 10, τὸν τέταρτον εὑρεῖν δεῆσαν ἀνάλογον, ἡ τῆς κατ' εὐθεῖαν ἀναλογίας Μέθοδος ἀπαιτεῖ τὸν 3 καὶ 10 τὰς ἀριθμὰς ἐπιπολλαπλασιάζειν ἀλλήλοις, καὶ τὸν γινόμενον 30 διὰ τῆ Α'. ϛ διαιρεῖν, ὡς ἐντεῦθεν τῦ ζητεμένε 6 ἀριθμῦ ἀνακύπτοντος.

κ. 370. Γ'. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ ἡ πρακτικὴ Μέθοδος κατασκευάζεται, καθ' ἣν οἱ Θυροποιοὶ, καὶ τῶν τεχνιτῶν ὅσοις Ὀρθογωνίων τινῶν ἐλασσόνων χωρίων πρόκειται λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον χωρίον, Εὐθεῖαν μόνον καταμετρήσαντες, καὶ ἄνευ τῦ ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν ἀναλογισμῦ, ὅσον αὐτό ἐςιν ἔγνωσαν. Οἷον εἰ δέοι φέρε, ὅσων ἐςὶ ποδῶν Τετραγώνων τὸ Ὀρθογώνιον αϛγδ εἰπεῖν, ἀπὸ τῆς β Γωνίας τῇ Πλευρᾷ ϛγ παραβεβλήσθω ποδιαῖον μέτρον· τὸ βε, ἀπὸ δὲ τῆς α Γωνίας τῆς ἐπὶ θατέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς αβ, δὶ ἄκρε τῦ ποδιαίε μέτρε σπαρτίον τεινέσθω, προσπίπτον τῇ Πλευρᾷ δγ (προεκβληθείσῃ ἣν δέοι) κατὰ τὸ ζ· Ὅσων οὖν ἐςι ποδῶν τὸ μῆκος, ἢ γῦν ὅσων δή ποτε ὁποιωνῦν ὁμοίων μορίων ποδὸς ἡ Εὐθεῖα δζ, τοσύτων ποδῶν Τετραγωνικῶν, ἢ ποδὸς Τετραγωνικῶν ὁμοίων μορίων ἔςαι τὸ Ὀρθογώνιον αϛγδ. Διὰ γὰρ δὴ τὰς β καὶ δ Ὀρθὰς, καὶ τὰς ὑπὸ βαε, δζα, τὰς ἐναλλὰξ ἐν ταῖς Παραλλήλοις αβ, δζ, καὶ δὴ καὶ διὰ τας ὑπὸ ϛεα, δαζ, τὰς ἐναλλὰξ καὶ αὐτὰς ἐν ταῖς Παραλλήλοις ϛε, αδ, τὰ Τρίγωνα εϛα, αδζ (1) ἔςαι ὅμοια· ἔνθεντοι καὶ εϛ : ϛα :: αδ : δζ. Καὶ διὰ τὴν ἐν χερσὶ τοίνυν Πρότασιν, ἔςαι τὸ Ὀρθογ. ϛα × αδ = Ὀρθογωνίῳ εϛ × δζ· ἀλλὰ ϛα × αδ ἐςὶ τὸ καταμετρύμενον Ὀρθογώνιον, ὥπερ ἴσον εὕρηται τὸ Ὀρθογώνιον εϛ × δζ, οὗ ὕψος εϛ τὸ ποδιαῖον, τοσύτες Τετραγωνικὰς περιέχοντος πόδας, ἢ γοῦν ποδὸς μόρια Τετραγωνικὰ, ὅσων ποδῶν εἶναι τίθεται τὸ μῆκος, ἢ γῦν ὅσων ποδὸς μερῶν ὁμοίων τὸ τῆς Βάσεως (2) δζ. Ὅσων ἄρα ποδῶν ἡ δζ τῷ μήκει, τοσύτων Τετραγωνικῶν ἔςαι ποδῶν καὶ τὸ Ὀρθογώνιον τὸ αϛγδ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν δὲ τὸ βε μέτρον διποδιαῖον τύχῃ, ἢ τριποδιαῖον, κτ.ᾶ, τὸ τῦ Ὀρθογωνίε χωρίον ἐν ποσὶ Τετραγωνικοῖς ληφθήσεται, πολλαπλασιαζομένης τῆς δζ διὰ 4, ἢ διὰ 9 κξ: κατὰ λόγον, τυτέςι διὰ τῦ Τετραγώνε τῦ ἀριθμῦ τῶν ποδῶν, ἐξ ὧν τὸ μέτρον αὐτὸ συγκεκρότηται.

Ἐὰν Εὐθεῖαι τέσσαρες αϛ, ζι, ιλ, ϛγ ὦσιν ἀνάλογον, τὸ Τρίγωνον αϛγ τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης ὡς Βάσεως, καὶ τῆς τετάρτης ὡς ὕψος, ἴσον ἔςαι

(1) Δ. τῦ ϛ'. (2) Ἔπεται ἐκ τῆς Δ. τῦ ϛ'.

τῷ Τριγώνῳ ζιλ τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας ὡς Βάσεως, καὶ τῆς τρίτης ὡς ὕψους. Εἰσὶ γὰρ τῶν Ὀρθογωνίων Χ καὶ Ψ (ἃ διὰ ταύτην τὴν ἐν χερσὶ Προτ. ἴσα τυγχάνει) (1) ἡμίσειαι. Ὅρα τὸ Σχῆμ. τῆ Πορ. τῆς ΙΔ΄, καὶ (ὁ ταυτόν) τὸ τῆς Ιε΄.

Ἐὰν δύο Τρίγωνα αγλ, ζξβ, τὰς γ καὶ ξ Γωνίας ἴσας ἔχῃ, ἦ δὲ τὸ Ὀρθογώνιον αγ × γλ τὸ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας γ, ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ ζξ × ξβ τῷ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας ξ, τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξβ, ἴσα ἔσται. Καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξβ, εἰς αἱ πρὸς τῷ γ καὶ ξ Γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσα ᾖ, τὰ Ὀρθογώνια αγ × γλ, καὶ ζξ × ξβ ἴσα ἔσται· Τοῦτο δ' αὐτὸ καὶ τοῖς ἰσογωνίοις τῶν Παραλληλογράμμων συμβαίνει. Διὰ γὰρ τὰ ἴσα Ὀρθογ αγ × γλ, ζξ × ξβ, ἔσται κατὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας αγ : ζξ :: ξβ : γλ· Ταύτῃ τοι ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αγλ, ζξβ τῶν ἰσογωνίων πρὸς γ καὶ ξ, αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι, τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξβ ἔσονται (2) ἴσα. Ο. Η. τὸ Α΄.

Εἶτα ἐχέτω τὰ ἴσα Τρίγωνα αγλ, ζξβ, τὰς πρὸς τῷ γ καὶ ξ Γωνίας ἴσας (3), καὶ ἔσονται αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπονθεῖαι ἀνάλογον, τουτέστιν αγ : ζξ :: ξβ : γλ· καὶ ἑπομένως κατὰ τήνδε τὴν Προτ., ἔσται Ὀρθογών. αγ × γλ = Ὀρθογων. ζξ × ξβ. Ο. Η. τὸ ἕτερον. Ὅρα τὰ Σχήμ. τὰ ἐν τῇ ΙΕ΄. Προτ. Ε.

Αὐτὰ δὲ ταῦτα καὶ περὶ τῶν ἰσογωνίων Παραλληλογράμμων καὶ ὁμοίως ἐχόντων ἀποδειχθήσεται, εἰ μόνον ἀντὶ τῆς ΙΕ΄. ἡ ΙΔ΄. ληφθῇ· ὅρα καὶ τὰ ἐν αὐτῇ Σχήματα.

Ἐὰν ᾖ Α πρὸς Β ἐν μείζονι λόγῳ ἢ Γ πρὸς Δ, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων Ὀρθογώνιον μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων· ἐὰν δὲ ἐν ἐλάσσονι ἔλαττον. ς΄.

Α΄. Ἐπειδὴ γὰρ Α μείζονα λόγον ἔχει πρὸς Β, ἢ Γ πρὸς Δ, ἑτερόντι τὸ Ε (τοῦ Α ἔλαττον) ἔσται πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ· ὥστε διὰ ταύτην Ε × Δ = Β × Γ· Ἀλλὰ γὰρ Ε < Α, ἄρα Α × Δ > Β × Γ.

Β΄. Εἰ δὲ Α πρὸς Β ἐν ἐλάσσονι λόγῳ ᾖ, ἢ Γ πρὸς Δ, ἔσται τι ἕτερον τὸ Ζ (τοῦ Α μεῖζον) πρὸς Β = Γ : Δ· ὥστε Ζ × Δ = Β × Γ· Καὶ ἑπομένως Α × Δ < Β × Γ.

Ἔνθεντοι ἐὰν τῶν ἀνίσων Ὀρθογωνίων αἱ Πλευραὶ οὕτω διαταχθῶσιν, ὡς τοῦ μὲν τῶν Ὀρθογωνίων μείζονας τὰς Πλευρὰς ἐν ἄκροις, τὰς δὲ τοῦ ἐλάσσο- Ζ.

(1) ΛΔ. τοῦ α΄. (2) ΙΒ. τοῦ ε΄. (3) Διὰ τὴν αὐτήν.

νος ἐν μέσοις ἐκκεῖσθαι, ὁ μὲν Α΄. πρὸς τὸν Β΄. ὅρον μείζονα τὸν λόγον ἔξει, ἢ ὁ τρίτος πρὸς τὸν Δ΄.

Ἐὰν δὲ αἱ μὲν τοῦ ἐλάσσονος Ὀρθογωνίου Πλευραὶ ἐν ἄκροις, αἱ δὲ τοῦ μείζονος ἐν μέσοις, ἔσται ὁ τοῦ Α΄. πρὸς τὸν Β΄. ὅρον λόγος ἐλάσσων, ὁ δὲ τοῦ Γ΄. πρὸς τὸν Δ΄. μείζων.

Σχόλιον.

Ἀλλ' ἐνταῦθα καὶ τὸ θρυλλούμενον ἐκεῖνο τοῦ Πτολεμαίου Θεώρημα, ὡς ἐν „ὁτῳοῦν Τετραπλεύρῳ, ὃ ἂν εἰς Κύκλον ἐγγεγραμένον ᾖ, τὸ ὑπὸ τῶν Δια„γωνίων αγ καὶ βδ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶν Ὀρθογω„νίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων τοῦ Τετραπλεύρου Πλευρῶν, οἷον αβ καὶ γδ, „ἢ αδ καὶ βγ, ὡς ἐκ τῆς δε δὴ καὶ τῶν πρὸ ταύτης δειχθέντων ἐξηρτημένον, πρόδηλον ἂν εἴη προθέσθαι καὶ δεῖξαι.

χ. 371. Συνεστάσθω γὰρ ἡ ὑπὸ βαε ἴση τῇ ὑπὸ γαδ· Διὰ γὰρ ταύτας τὰς ἐκ κατασκευῆς ἰσουμένας, καὶ τὰς ὑπὸ αβε, αγδ, τὰς διὰ τὸ τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αδ βεβηκέναι ἴσας (1) ἀλλήλαις, ἔσται τὰ Τρίγωνα αβε, αγδ ἀλλήλοις (2) ὅμοια, καὶ ὅτως αβ : βε : : αγ : γδ· καὶ ἑπομένως (3) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αβ × γδ, ἴσον ἔσται τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ × βε. Παραπλησίως διὰ τὰς ὑπὸ βαε, γαδ ἴσας ἐκ κατασκ. Γωνίας, κοινῆς προσθείσης τῆς ὑπὸ γαε, ἔσται ἡ ὑπὸ βαγ ἴση τῇ ὑπὸ εαδ. Διὰ δὲ τὰς ὑπὸ αδε, αγβ, τὰς τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αβ βεβηκείας καὶ διὰ τοῦτο (4) ἴσας, ἔσται τὰ Τρίγωνα (5) αδε, αγβ ὅμοια, καὶ αδ : δε : : αγ : βγ. Ἔνθεντοι καὶ (6) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αδ × βγ = Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ × δε· Ἀλλὰ τὰ Ὀρθογώνια αγ × βε, καὶ αγ × δε, ἴσα ἐστὶ (7) τῷ Ὀρθογωνίῳ αγ × βδ. Ἄρα τὸ Ὀρθογώνιον αγ × βδ τὸ ὑπὸ τῶν Διαγωνίων, ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶν Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων Πλευρῶν, τῷ τε ὑπὸ αβ × γδ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ × βγ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΖ.

„Ἐὰν τρεῖς Εὐθεῖαι (αβ, ζλ, βγ) ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων (αβ, βγ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (ζλ) Τε„τραγώνῳ.

---

(1) Κλ. τοῦ γ΄. (2) Θ. Πόρισμ. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄. (3) Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας. (4) Κλ. τοῦ γ΄. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄. (6) Διὰ τὴν παρόδεσιν. (7) Α. τοῦ β΄.