§. Ε'.

Η' τῶν λογικῶν λόγων πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Προσίθενται οἱ λόγοι τῶν κατ' αὐτὰς Παρονομασῶν προσιθεμένων· ὁ γὰρ τοι λόγος, ὃν τὸ τῶν Παρονομασῶν ἄθροισμα ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, τὸ τῶν δοθέντων λόγων τυγχάνει ἄθροισμα.

Κείσθωσαν λόγοι 12 : 3 καὶ 15 : 6, καὶ τούτων Παρονομασαὶ 4 καὶ 2 ½ προσιθέμενοι ἀλλήλοις καὶ 6 ½ συναποτελοῦντες· ὁ τοίνυν λόγος 6 ½ πρὸς 1, ἴσος κρίνεται τοῖς λόγοις 12 : 3 καὶ 15 : 6· Δῆλον δὲ ἐκ τῶν Α'ξιωμ. τοῦ Α καὶ τοῦ Γ'.

Α'φαιροῦνται δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἐλάσσονος τῶν Παρονομασῶν ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὃν γὰρ ἔχει λόγον τὸ λοιπὸν πρὸς τὴν μονάδα, τοιοῦτον ἔχει τὸ λοιπὸν, μετὰ τὸ τὸν ἐλάσσονα τῶν λόγων ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῆναι. Δῆλον καὶ τοῦτο ἔκτε τοῦ Α'. καὶ τοῦ Γ'. Α'ξιώμ.

Κείσθωσαν οἱ λόγοι 12 : 3 καὶ 15 : 6, ὧν Παρονομασαὶ 4 καὶ 2 ½, ἀφαιρεθήτω δὲ ὁ ἐλάσσων 2 ½ ἀπὸ τοῦ μείζονος 4, ὥστε λοιπὸν εἶναι ½. Τὰ γοῦν ½ πρὸς τὴν 1, ἐστὶν ὡς ὁ λοιπὸς λόγος, μετὰ τὴν γενομένην ἀφαίρεσιν τοῦ 15 : 6 ἤτοι τοῦ 2 ½ : 1, ἀπὸ τοῦ λόγου 12 : 3, ἤτοι 4 : 1.

§. ς'.

Η' τῶν ἀλόγων λόγων πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Οἱ δοθέντες λόγοι (Α : Β καὶ Γ : Δ) ἀναχθήτωσαν ἐπὶ τὸν τὸ αὐτὸ ἔχοντας ἑπόμενον (ζ : θ καὶ η : θ, τὸ θ· τῶν γοῦν ἡγουμένων ζ καὶ η προσεθέντων ἀλλήλοις, ἔσται τὸ ἄθροισμα ζη πρὸς τὸ ἑπόμενον θ, ἴσον τοῖς λόγοις ζ : θ καὶ η : θ, τουτέστι τοῖς λόγοις Α : Β καὶ Γ : Δ.

Η' δὲ τούτων ἀφαίρεσις τελεῖται τῶν δοθέντων λόγων ἐπὶ τὸ αὐτὸ κοινὸν ἑπόμενον ἀναγομένων, καὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡγουμένου, οἷον τοῦ η, ἀπὸ τοῦ μείζονος φέρε ζ ἀφαιρουμένου· ὁ γάρ τοι τοῦ λοιποῦ πρὸς θ, ἐστὶν ὁ λοιπὸς, μετὰ τὸ τὸν λόγον η : θ, ἤτοι τὸν Γ : Δ ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τοῦ λόγου ζ : θ, ἤτοι τοῦ Α : Β. Δῆλον ἐκ τοῦ Α'. Α'ξιώματος.

§. Ζ'.

Ο' τῶν λογικῶν λόγων πολλαπλασιασμὸς, καὶ ἡ τούτων διαίρεσις.

Οἱ τῶν λόγων Παρονομασαὶ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντες, δώ-

ϛϛι τὸν Παρονομαϛὴν τȣ̃ λόγȣ, τȣ̃ ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμȣ̃ παρακύπτοντος.

Τȣτέϛιν ὁ λόγος, ὃν πρὸς τὴν μονάδα ἔχει ὁ διὰ πολλαπλασιασμȣ̃ ἐπ' ἀλλήλοις τῶν Παρονομαϛῶν παρηγμένος ἀριθμὸς, αὐτὸς ὁ ἐκ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων ἐϛὶ γινόμενος. Δῆλον δὲ ἐκ τῶν Α'ξιωμ. Α'. ϗ Γ'. ὁ γὰρ τῶν λόγων πολλαπλασιασμὸς, ȣ̓δὲν ὅ,τι μὴ θατέρȣ ἐπὶ θατέρῳ ἐπανειλημμένη τις πολλάκις πρόθεσις ἐϛί· τȣ̃τον δὲ τελεῖθαι ἐπαναληφθείσης πολλάκις τῆς τῶν ἡγȣμένων προθέσεως, πρόδηλόν ἐϛιν ἔκ τε τȣ̃ Α'. ϗ τȣ̃ Γ'. Α'ξιώματος.

Οἷον δὴ κείθωσαν λόγοι 9 : 3 ϗ 20 : 4, ϗ τȣ́των Παρονομαϛαὶ 3 ϗ 5, οἱ ϗ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαζόμενοι παρέχȣσι 15. Ο' τοίνυν λόγος 15 : 1, ἡλίκος ἐϛὶν ὁ διὰ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων 9 : 3, ἤτοι (3 : 1), καὶ 20 : 4 (ἤτοι 5 : 1) παραγόμενος.

Η' δὲ δὴ τȣ́των διαίρεσις τελεῖται, τȣ̃ Παρονομαϛȣ̃ τȣ̃ μείζονος λόγȣ διαιρȣμένȣ διὰ τȣ̃ Παρονομαϛȣ̃ τȣ̃ λόγȣ τȣ̃ ἐλάσσονος. Ο' γὰρ τȣ̃ πηλίκȣ λόγος πρὸς τὴν μονάδα, ἐϛὶν ἡλίκος ὁ ἐκ τῆς διαιρέσεως τȣ̃ μείζονος τῶν δοθέντων λόγȣ διὰ τȣ̃ ἐλάσσονος· Δῆλον ἐκ τȣ̃ Α'. ϗ Γ'. τῶν Α'ξιωμάτων· ἡ γὰρ λόγȣ διὰ λόγȣ ἑτέρȣ διαίρεσις, οὐδὲν ὅτι μὴ ἀφαίρεσις ἐϛὶ θατέρου ἀπὸ θατέρȣ πολλάκις ἐπανειλημμένη.

§. Η'.

Ο' τῶν ἀλόγων λόγων πολλαπλασιασμός.

Κείθωσαν λόγοι Α : Β ϗ Γ : Δ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαϛέοι, καὶ γινέθω Α : Β : : Δ : Ε. Ο' τοίνυν λόγος Γ : Ε ἐϛὶν ὁ παραγόμενος διὰ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων Α : Β ϗ Γ : Δ.

Η' μὲν οὖν Πρᾶξις τȣ̃ παρὰ τȣ̃ ἁγίȣ Βικεντίȣ ἐπίκλην Γρηγορίȣ ἐϛὶν ἐν Η'. Βιβλ. Προτ. ΟΕ'., ȣ̓θ' ὑπ' αὐτȣ̃ μέντοιγε, ȣ̓θ' ὑφ' ἑτέρȣ τινὸς δεδειγμένη, ἣν αὐτὸς ȣ̓τω δείκνυμι.

Ο' λόγος Γ : Ε παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Γ : Δ, καὶ Δ : Ε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τȣ̃ §. ΙΒ'. τῆς ἐντεῦθεν μηδαμῶς ἠρτημένης. Α'λλ' οἱ λόγοι Γ : Δ ϗ Δ : Ε, ἐκ κατασκευῆς, οἱ αὐτοί εἰϛι τοῖς Γ : Δ καὶ Α : Β, ἄρα ὁ λόγος Γ : Ε, ἐϛὶν ἡλίκος ὁ ἐκ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων Α : Β ϗ Γ : Δ ἀναθορῶν. Ο. Ε. Δ.

§. Θ'.

Η' τῶν ἀλόγων λόγων Διαίρεσις.

Κείσθω λόγος ὁ Γ : Ε διαιρετέος διὰ τοῦ λόγου Α : Β, καὶ δὴ γινέσθω Α : Β : : Γ : Δ. Ο' γοῦν λόγος Δ : Ε τὸ Πηλίκον ἐστί.

Ο' γὰρ τοι λόγος Γ : Δ (τουτέστιν ἐκ κατασκευῆς ὁ Α : Β) πολλαπλασιασθεὶς διὰ τοῦ λόγου Δ : Ε, παράγει τὸν λόγον Γ : Ε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. ΙΒ'. τῆς ἐντεῦθεν μηδαμῶς ἠρτημένης, ὁ ἄρα λόγος Δ : Ε ἐστὶ τὸ Πηλίκον, πολλαπλασιασθὲν γὰρ ἐπὶ τῷ διαιρέτῳ, ὅς ἐστιν ὁ λόγος Α : Β, ἀποκαθίστησι τὸν λόγον Γ : Ε, ὅς τις ἦν ὁ διαιρετέος.

§. Ι'.

Περὶ Συνθέσεως τῶν λόγων, καὶ ταύτης Ο'ρισμός.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅτε τῶν κατὰ τοὺς λόγους πηλικοτήτων (ἤτοι τῶν Παρονομαστῶν) ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιαζομένων, λόγον τινὰ συνιστῶσιν· ἔστι δὲ παρ' Εὐκλείδῃ ὁ Ε'. τῶν τοῦ ς'. Βιβλ. Ο'ρισμῶν.

Κείσθωσαν λόγοι ὁποσοιοῦν, καὶ τούτων Παρονομασταὶ 2, 3, 1 ¼. Πολλαπλασιαζέσθωσαν δὲ ἐπ' ἀλλήλοις οἱ Παρονομασταὶ 2 καὶ 3, τό,τε παραγόμενον 6, Παρονομαστὴς τοῦ λόγου ἔσται, τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἁπλουστέρων λόγων, ὧν Παρονομασταὶ οἱ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντες. Α'μέλειτοι ὁ λόγος 6 : 1 σύνθετός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων 6 : 3 καὶ 12 : 4· ὡς εἴγε καὶ τὸν Παρονομαστὴν 6 πολλαπλασιάσαις περαιτέρω, καὶ διὰ τοῦ τρίτου τῶν ἐκτεθέντων ἁπλουστέρων Παρονομαστῶν, οἷον διὰ 1 ¼, ἀνακύψει δὴ ὁ 7 ½ Παρονομαστὴς τοῦ λόγου τοῦ συνθέτου ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων λόγων, ὧν Παρονομασταὶ ἦσαν 2, 3, 1¼.

§. ΙΑ'.

Η' τῶν λόγων σύνθεσις πολλαπλασιασμὸς τῶν αὐτῶν ἄντικρυς ἐστί· καὶ πᾶς δὲ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν ἐκείνων λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ἐξ ὧνπερ διὰ πολλαπλασιασμοῦ παράγεται.

Ω'ς γὰρ ἐκ τοῦ Α'ξιωμ. τοῦ Δ'. καὶ §. Ζ'. δῆλον ἐστὶ, λόγος ἐκ λόγων πλειόνων πολλαπλασιασμῷ παραγόμενος ἐστὶν, ὃν τὸ ἐκ τῶν Παρονομαστῶν τῶν ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων γινόμενον, ἔχει πρὸς τὴν μονάδα,

ἤτοι πρὸς τὸ κοινῇ ἑπόμενον· ἀλλὰ καὶ κατά γε τὸν πάρ Εὐκλείδῃ ὁρισμὸν, λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὃν τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Παρονομαστῶν γινόμενον ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι πρὸς τὸ κοινῇ ἑπόμενον. Ὁ ἄρα λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συντίθεται, ἐξ ὧν καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ παράγεται.

Σχόλιον.

Πρὸς ῥᾳοτέραν τῆς ἐφεξῆς ἀποδείξεως σύνεσιν παρατηρητέον, ὡς τὰ Μεγέθη ἐπιδέχεται τὸν ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασμὸν, καὶ τὴν δὶ ἀλλήλων διαίρεσιν κατά τινα πρὸς τὰς ἀριθμὰς ἀναλογίαν. Καθάπερ γὰρ ἀριθμὸς δὶ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζεσθαι λέγεται, ὅταν ὡς ἡ μονὰς ἔχει πρὸς τὸν ἕτερον, οὕτως ὁ λοιπὸς πρὸς τρίτον ἀριθμὸν, ὃς τὸ παραγόμενον εἶναι λέγεται, οὕτω δὴ καὶ Μέγεθος διὰ Μεγέθους πολλαπλασιάζεσθαι λέγεται, ὅταν ὡς ὁποιαδήποτε Εὐθεῖα ἀντὶ μονάδος ληφθεῖσα πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν δοθεισῶν ἔχει, οὕτως ἡ ἑτέρα πρὸς ἄλλην τινὰ τετάρτην, ἥτις καὶ αὐτὴ τὸ παραγόμενον εἶναι ἀκούσεται. Παραπλησίως δὲ, ὥσπερ ἀριθμὸς δὶ ἀριθμοῦ διαιρεῖσθαι λέγεται, ὅταν ὡς θάτερος ἔχει πρὸς θάτερον, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τρίτον, ὃς τὸ Πηλικον καλεῖται, οὕτω τοι καὶ Μέγεθος διὰ Μεγέθους διαιρεῖσθαι εἰρήσεται, ὅταν ληφθείσης τινὸς πηλικότητος ἀντὶ μονάδος, ὡς θάτερον ἔχει πρὸς θάτερον, οὕτω τοι ἡ μονὰς πρός τι ἄλλο, ὃ δὴ Πηλίκον ὁμοίως κληθήσεται.

§. ΙΒ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποιοιδηποτοῦν καὶ ὁσοιδηποτοῦν ἤτοι ἀριθμοὶ, ἢ Μεγέθη, ὁ τοῦ Α'. λόγος πρὸς τὸν ἔσχατον, συγκείμενός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων τῶν μεταξύ.

Ἐν μὲν ἀριθμοῖς Θέωνί τε καὶ Εὐτοκίῳ καὶ τῷ Οὐιτελλίωνι ἀποδέδεικται, ἐπὶ δὲ τῶν Μεγεθῶν ὅς τις ἴδοι ὁ εἰς τόδε κατασκευάσας τὸ προτεθέν. Ταύτῃ τοι καὶ ὁ ῥηθεὶς ἀνωτέρω Γρηγόριος Γεωμετρῶν τὰ πρῶτα γενόμενος, ἐν τῷ Η'. Βιβλ. ἐν ἀρχ. Β'., ταῖς ἀρχαῖς ὑπείληφε δεῖν τὸ τοιοῦτο συγκαταλέγεσθαι, εἰς ὅ τις ἀποδείξει αὐτὸ κρατύνας, τοῖς Θεωρήμασιν ἐναρίθμιον τάξειε. Αὐτοὶ γοῦν τὴν ἐν γένει τοῦ τοιοῦδε ἀπόδειξιν παραχεῖν ὧδε ἐπιχειροῦμεν.

Δείκνυται ἐν τοῖς Μεγέθεσι.

Κείσθω Μεγέθη ὁποιαοῦν καὶ ὁποσαοῦν τὰ Α, Β, Γ, Δ· δεικτέον τὸν Α : Δ λόγον συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ.

Γινέσθω ὡς Β : Γ, οὕτω Χ : Β, καὶ ἔσονται οἱ λόγοι Α : Β καὶ Β : Γ ἐπὶ τὰς λόγους ἀνηγμένοι Α : Β καὶ Χ : Β, τὰς ἔχοντας ἑπόμενον τὸ αὐτὸ τὸ Β. Ἔνθεντοι καὶ τῶν τοιῶνδε λόγων Παρονομαστὶ ἔσονται Α καὶ Χ, τὸ δὲ ἑπόμενον Β (1) ἔργον πληρώσει μονάδος, ἣ δὴ πρὸς πάντας τὰς ἀριθμητικὰς Παρονομαστὰς κοινόντι τίθεται εἶναι ἑπόμενον.

Βληθέντας τοίνυν τὰ μεγέθη Α καὶ Χ εἰ ἀλλήλων πολλαπλασιάσαι, λαβεῖν δεῖ (2) ὡς Β ἡ μονὰς ἐστι πρὸς Χ, ἥτως Α πρὸς ἄλλοτι τὸ Ζ, ὃ δὴ τὸ παραγόμενον ἔσται πολλαπλασιασμῷ τῷ τοῦ Α διὰ τοῦ Χ, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστι) τῷ τοῦ Χ διὰ τοῦ Α. Οἷον εἰ καὶ ἀριθμὸς ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιάσαι θελήσαις τὰς Ρ, Σ, σχοίης ἂν τὴν μονάδα πρὸς τὸν ἕτερον τὸν Σ, ὡς τὸν ἕτερον Ρ πρὸς τὸ ἀπ' ἐντεῦθεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμῆ παραγόμενον, φέρε τὸ Υ.

Ἐπεὶ γοῦν τὸ Ζ, τὸ παρηγμένον εἶναι ἐτέθη πολλαπλασιασμῷ τῷ τῶν Παρονομαστῶν Α καὶ Χ, ἔσται δὴ ὁ λόγος (3) τοῦδε τοῦ γενομένου Ζ πρὸς τὴν μονάδα Β, ὃ τὸ κοινὸν εἶναι ἑπόμενον εἴρηται, ἡλίκος ὁ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Χ : Β γινόμενος, ὡς καὶ τῇ τῶν Ἀριθμητικῶν λόγων πολλαπλασιάσει ἐν §. Ζ' συμβαίνειν δέδεικται, καθ' ἣν ἐὰν οἱ Παρονομαστὶ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαθῶσιν, ὁ τοῦ παραγομένου λόγος πρὸς τὴν μονάδα, ἡλίκος ὁ ἐκ τοῦ τῶν λόγων πολλαπλασιασμῆ τυγχάνει γε ὤν.

Ἀλλαμὴν ἐκ κατασκ. ὁ λόγος Χ : Β, αὐτόχρημα ἐστὶν ὁ Β : Γ, ἄρα καὶ ὁ λόγος Ζ : Β παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ· Ἐπεὶ δέτοι ἐκ κατασκ. ὡς Β : Χ, ἥτως ἐστὶ καὶ Α : Ζ, καὶ ἀνάπαλιν Ζ : Α :: Χ : Β, τουτέστιν ἐκ κατασκ. ὡς Β : Γ· τοιγαροῦν καὶ ἐναλλὰξ Ζ : Β :: Α : Γ· Δέδεικται δὲ ὅτι Ζ : Β παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ, ἄρα καὶ ὁ λόγος Α : Γ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ. Ἀλλὰ γὰρ ἐν §. ΙΑ'. ἐδείχθη τὸν λόγον συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν αὐτῶν λόγων, ἐξ ὧν καὶ πολλαπλασιασμῷ παράγεται. Ὁ ἄρα λόγος Α : Γ σύνθετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ.

Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος Α : Δ σύνθετός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων Α : Γ καὶ Γ : Δ· Ὁ ἄρα λόγος Α : Δ σύνθετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον. Ο. Ε. Δ.

---

(1) §. Γ'. (2) Σχόλ. τὸ ἀνατ. (3) §. Ι. Ὁρ.

Δείκνυται καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν.

Τὴν αὐτὴν πάντῃ δεῖξιν χῶραν ἔχειν καὶ ἐπὶ τῶν Ἀριθμῶν ἤδη δείξω, ὅθεν δὴ κἀκείνης τὸ ἀληθὲς καὶ ἐδραῖον μᾶλλον ἀναφανήσεται.

8 2 $\frac{8}{3}$
4 1 $\frac{4}{3}$
3 $\frac{3}{4}$ 1

Κείσθωσαν ἀριθμοὶ ὁποιοιδηποτοῦν τρεῖς 8, 4, 3, καὶ γινέσθω 4 : 8 : : 3 : 1, καὶ 4 : 3 : : 1 : $\frac{3}{4}$· καὶ δῆτα ἔσονται οἱ λόγοι 8 : 4 καὶ 2 : 1, καὶ δὴ καὶ οἱ 4 : 3 καὶ 1 : $\frac{3}{4}$, ἀλλήλοις ἴσοι· καὶ δὶ ἴσα δὲ (1) 8 : 3 : : 2 : $\frac{3}{4}$.

Εἶτα γινέσθω ὡς $\frac{3}{4}$: 1 : : 1 : $\frac{4}{3}$· καὶ ἔσονται οἱ λόγοι 2 : 1 καὶ 1 : $\frac{3}{4}$ (τουτέστιν οἱ λόγοι 8 : 4 καὶ 4 : 3) ἀναγόμενοι ἐπὶ τοὺς δύω λόγους 2 : 1 καὶ $\frac{4}{3}$: 1, κοινὸν ἔχοντας ἑπόμενον τὴν μονάδα· ἔνθεντοι 2 καὶ $\frac{4}{3}$ ἔσονται (2) τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3 Παρονομαστί. Πεπολλαπλασιάσθωσαν οὖν δὶ ἀλλήλων οἱ Παρονομαστὶ 2 καὶ $\frac{4}{3}$, γινέσθω δηλονότι 1 : $\frac{4}{3}$: : 2 : $\frac{8}{3}$, καὶ ἔστι $\frac{8}{3}$ τὸ παραγόμενον ἐκ 2 καὶ $\frac{4}{3}$, οἱ παρονομαστί εἰσι τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3 ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντων. Ὁ ἄρα λόγος τοῦδε τοῦ παραγομένου $\frac{8}{3}$ πρὸς 1, ἤλικος ἐστὶν (3) ὁ παραγόμενος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3· ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ ἐκ τῆς κατασκ. 1 : $\frac{4}{3}$ = 2 : $\frac{8}{3}$, ἔστι καὶ ἀνάπαλιν $\frac{8}{3}$: 2 = $\frac{4}{3}$: 1· πάλιν δὲ ἐκ τῆς κατασκ. $\frac{4}{3}$: 1 = 1 : $\frac{3}{4}$, ἄρα $\frac{8}{3}$: 2 = 1 : $\frac{3}{4}$, καὶ δὴ καὶ ἐναλλὰξ $\frac{8}{3}$: 1 = 2 : $\frac{3}{4}$. Ἐδείχθη δὲ ὡς ὁ λόγος $\frac{8}{3}$: 1 ἐστὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3, ἄρα καὶ ὁ λόγος 2 : $\frac{3}{4}$ ἐστὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3· δέδεικται δὲ ἀνωτέρω τὸν λόγον 2 : $\frac{3}{4}$ ἴσον εἶναι τῷ λόγῳ 8 : 3, ἄρα καὶ ὁ λόγος 8 : 3 παράγεται καὶ αὐτὸς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3. Καὶ τοίνυν διὰ τὰ ἐν §. ΙΑ'., ὁ λόγος 8 : 3 ἐκ τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3 συγκείμενος ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ πλειόνων ἢ τρεῖς προκειμένων ἀριθμῶν, τὸν λόγον 8 : 25 συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων 8 : 3 (οὗτος γὰρ ἐστιν ἐκ τῶν 8 : 4 καὶ 4 : 3) καὶ 3 : 25· τόντε λόγον 8 : 73 συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων 8 : 25 (οὗτος γὰρ ἐστιν ἐκ τῶν 8 : 4, καὶ 4 : 3, καὶ 3 : 25) καὶ 25 πρὸς 73, καὶ ἕτως εἰς ἄπειρον.

8
3
25
73

(1) ΚΒ. τοῦ ε'. (2) §. Β'. (3) §. Ζ'.

§. ΙΓ'.

Ὁποσωνῦν λόγων δοθέντων Α : Β, καὶ Γ : Δ, καὶ Ε : Ζ, λόγον παραχεῖν τὸν ἐξ ἁπάντων συγκείμενον.

Ἐὰν γένηται ὡς Α : Β, ὕτως ὅ,τι τύχοι Η : Θ· καὶ ὡς Γ : Δ, ὕτω Θ : Ι· καὶ ὡς Ε : Ζ, ὕτω Ι : Κ, ὁ λόγος Η : Κ συγκείμενος ἔσται ἐκ τῶν λόγων Η : Θ, καὶ Θ : Ι, καὶ Ι : Κ, ὡς ἐν §. ἀνωτ. ἀποδέδεικται· ἀμέλειτοι διὰ τὴν κατασκ. ἐκ τῶν δοθέντων λόγων Α : Β, Γ : Δ, Ε : Ζ.

§. ΙΔ'.

Ὁ λόγος ὃν ἔχει ἴσος τοῖς λόγοις ἐξ ὧνπερ συντίθεται.

Δυεῖν μεταξὺ πηλικοτήτων Η, Κ πηλικότητες ἄλλαι παρεμβεβλήσθωσαν, εἴτε συνεχῶς ἀνάλογοι αὗται εἶεν, εἴτε καὶ μή. Ὁ γοῦν λόγος τῆς πρώτης Η πρὸς τὴν ἐσχάτην Κ ὃν ἔχει ἴσος τοῖς λόγοις τοῖς μεταξὺ Η : Θ, Θ : Ι, Ι : Κ, καί τοι ἐξ αὐτῶν δὴ τούτων συγκείμενος.

Τὸ γὰρ ἐξ αὐτῶν συγκεῖσθαι οὐδὲν ἕτερον σημαίνει, ἢ τὸ ἐξ ἐκείνων ἐπαλλήλοις τοῖς πολλαπλασιασμοῖς παράγεσθαι, ὡς δέδεικται ἐν §. ΙΑ'· Ἐπεὶ οὖν ὁ λόγος Η : Κ, ἐκ τῶν λόγων Η : Θ, καὶ Θ : Ι, καὶ Ι : Κ παρῆκται ἐπαλλήλως πολλαπλασιασθέντων, ὡς ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. ΙΒ'. δῆλον, ἀδύνατον τοὺς λόγους Η : Θ, Θ : Ι, Ι : Κ, ἴσους τυγχάνειν ἅμα ληφθέντας τῷ λόγῳ Η : Κ, εἰ μήπου κατὰ συμβεβηκός, ἤτοι τῶν λόγων πρόθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τὸν αὐτὸν λόγον σωζήσειαν. Ἐφ' ᾧ δὲ τοῖς εἰρημένοις λόγοις λόγον ἴσον λαβεῖν, δέον αὐτοὺς προσιθέναι, ὡς εἴρηται ἐν §. Ε'. καὶ ς'., ἐκ γὰρ τῆς τοιαύτης προθέσεως, λόγος ἀνακύψει ἴσος τοῖς δοθεῖσιν ἅπασιν. Ὅς δή που λόγος, ἥπερ ἔφην, ἀεὶ διοίσει τοῦ κατὰ σύνθεσιν, εἴτουν πολλαπλασιασμὸν ἀνακύπτοντος.

Τῶν ςοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ς'.

Η' ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Ε'. Βιβλίῳ ἐν γένει ἐκτεθεῖσα τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλία, ἐπὶ τῶ ἐν χερσὶν ς'. τοῖς ἐπιπέδοις τῶν Σχημάτων προσεφαρμόζεται. Ε'ςι δὲ οὕτως ἀναγκαία ἡ τῶν ἐνταῦθα παραδιδομένων γνῶσις, ὡς τούτων ἄνευ ἐς τὰ ἄδυτα τῆς Γεωμετρίας χωρεῖν, καὶ τὰς ἀπὸ τῶν μαθημάτων ἡδίςας καρπὰς δρέπεσθαι, μὴ ἐξεῖναι. Ε'κάςης τῶν Προτάσεων ἰδίᾳ ἔδει ἐξευφαίνειν ἐγκώμιον, τοσαύτη ἡ ἐξ ἁπάσων ἀποφερομένη ὠφέλεια.

Ε'πιχειρεῖ δὲ τυτὶ τὸ ς'. Βιβλ. τὴν καλλίςην περὶ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας διδασκαλίαν, τὴν προσφάτως ἐκτεθεῖσαν, παντοίαις τε καὶ πάντῃ ἐπιςημωτάταις προσάπτειν ταῖς χρήσεσιν, ἀπό τε τῶν ἐν σχήμασιν ἁπλοςάτων Τριγώνων τὴν καταρχὴν ποιούμενον, τάς τε ἐν αὐτοῖς πλευρὰς καὶ τὰ χωρία, ὅπως ἔχουσιν ἀναλογίας πρὸς ἄλληλα ἐξετάζει· εἶτα καὶ τῶν Γραμμῶν τὰς ἀναλόγους, καὶ τὰς τῶν Σχημάτων αὐξήσεις τε καὶ μειώσεις, τὰς κατ' ἰσότητα λόγων ὁρίζεται, καὶ ὅτῳ δή ποτε τρόπῳ ἐκεῖνα αὔξειν ἔνι, ἢ μειοῦν κατὰ λόγον τὸν δοθέντα κατασκευάζει· ἔτι τε μὴν καὶ τὴν Α'ναλογικὴν μέθοδον, ἥτις Χρυσῇ γεραίρεται, καὶ ἧς δι' ὅλης τῆς Α'ριθμητικῆς πυκνοτάτη ἡ χρῆσις, ἐκτίθησί τε καὶ ἀναπτύσσει· καὶ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου Τριγώνου, οὐχ ὅπως τὸ Τετράγωνον, ἀλλὰ δὴ καὶ τὸ Πεντάγωνον καὶ τὸ Ε'ξάγωνον, καὶ ἁπλῶς τῶν Πολυγώνων ὁποιονοῦν, τὰ ἀπὸ τῆς Υ'ποτεινούσης, τοῖς δυσὶν οὐχ ὅπως Τετραγώνοις, ἀλλὰ καὶ Πενταγώνοις καὶ Ε'ξαγώνοις, καὶ ἁπλῶς τῶν Πολυγώνων ὁποιοισοῦν τοῖς ὁμοίοις, καὶ ἀπὸ τῶν δύω Πλευρῶν τῶν τὴν Ο'ρθὴν περιεχουσῶν Γωνίαν συνιςαμένοις ἅμα ληφθεῖσι συνεξισοῦσθαι ἀποδείκνυσι· τελευταῖον δὲ ῥάςας τινὰς καὶ ἀσφαλεςάτας προτίθησι τὰς ἀρχὰς, αἷς ἂν δι' ἁπάσης Μαθηματικῆς ἐπιςήμης ἐξείη τῶν τε Γραμμῶν, καὶ τῶν Ε'πιφανειῶν, καὶ τῶν ςερεῶν Σωμάτων λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν.

Ο'ρισμοί.

Ο'μοια Σχήματα εὐθύγραμμά ἐςιν, ὅσα τάς τε Γωνίας ἴσας ἔχει κα-

τὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευρὰς ἀνάλογον, ἢ (ὃ ταὐτόν ἐστι) τὰς μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ καὶ τὰς Ὑποτεινούσας τὰς ἴσας.

κ. 322. Οἷον τὰ Τρίγωνα χ, ψ ὅμοια εἰρήσεται, ἐὰν ἡ Γωνία α ἴση ἦ τῇ Γωνίᾳ ζ, καὶ ἡ β τῇ ι, καὶ ἡ γ τῇ λ· καὶ μὴν καὶ ἐὰν ᾖ αβ : ζι :: βγ : λι, καὶ βγ : λι :: γα : λζ, καὶ γα : λζ :: αβ : ζι, ἢ γοῦν καὶ ἐναλλὰξ (1) ἐὰν ᾖ αβ : βγ :: ζι : λι, καὶ βγ : γα :: ιλ : λζ, καὶ γα : αβ :: λζ : ζι· γινομένης ἀεὶ τῆς παραθέσεως μεταξὺ τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἢ (ὃ ταὐτόν ἐστι) τῶν μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ τῶν τὰς ἴσας ὑποτεινουσῶν.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἡ τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων ἀπάντων ὁμοιότης ἀναπτυχθήσεται.

Κ. Ἀντιπεπονθότα δὲ Σχήματα ἐστὶν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν Σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι ὅροι (ἀντιστρόφως) ὦσι.

κ. 323. Οἷον ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων χ καὶ ψ, ἐὰν ᾖ αγ : γβ :: ζγ : γλ. Ἡγούμενοι τοίνυν εἰσὶν ὅροι αγ καὶ ζγ, ὧν ἐν ἑτέρῳ τῶν Σχημάτων ἕτερος, ὁ μὲν αγ ἐν τῷ χ, ὁ δὲ ζγ ἐν τῷ ψ· ἑπόμενοι δὲ οἱ γβ καὶ γλ, ὧν ὁμοίως ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν Σχημάτων ὁ ἕτερος, ἀλλ' ἀντιστραφείσης τῆς τάξεως, ὁ μὲν γὰρ γβ ἐν τῷ ψ, ὁ δὲ γλ ἐν τῷ χ· ἐντεῦθεν γὰρ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα χ, ψ ἀντιπεπονθότα ἤκουσε. Τὸ δ' αὐτόμοι νόει καὶ περὶ τῶν ἄλλων Σχημάτων.

Πηλικότητες δὲ τέσσαρες πρὸς ἀναλογίαν ἀντιπεπόνθασι, τῆς Α'. πρὸς τὴν Γ'., ὃν ἡ Δ'. πρὸς τὴν Β'. λόγον ἐχούσης, ἢ τῆς Α'. πρὸς τὴν Δ'., ὃν ἡ Γ'. πρὸς τὴν Β'. Οἷον ἐὰν ᾖ Α : Γ :: Δ : Β, ἢ γοῦν Α : Δ :: Γ : Β, ἔσονται αἱ Α, Β, Γ, Δ ἀντιπεπονθεῖαι ἀνάλογον.

κ. 324. Γ'. Ὕψος ἐπὶ παντὸς Σχήματος ἐστὶν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν βάσιν Κάθετος ἀγομένη ΑΠ· ἔστι δὲ παρ' Εὐκλείδῃ ὅρος δ'.

Οἷον τοῦ Τριγώνου ΑΒΓ ὕψος ἐστὶν ἡ Κάθετος ΑΠ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀγομένη ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ, ἤτοι ἐντὸς τοῦ Τριγώνου, ἢ καὶ ἐκτός ἢν δέοι προσαχθεῖσαν· Ἡ δὲ δὴ Βάσις καὶ ἡ κορυφὴ κατὰ τὸ δοκοῦν μεταλαμβάνονται.

Δ'. Τόξα ὅμοια Κύκλων λέγεται, τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὰς ὅλας Περιφερείας.

Οἷον ἐὰν ἑκάτερον ᾖ τῆς ἰδίας Περιφερείας τριτημόριον, ἢ τεταρτημόριον, κτ.

Καὶ Τμήματα δὲ Κύκλων ὅμοιά ἐστιν, οἷς Τόξα ὅμοια ἐστί. Τὸ δ' αὐτόμοι νοείσθω καὶ περὶ τῶν ὁμοίων Τομέων.

(1) Ις. τοῦ.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν οἱ τούτων Ἐκθέται ἐπ' ἀλ- Ε'.
λήλοις πολλαπλασιασθέντες, τὸν ἐκείνου Ἐκθέτην παράγωσι· τὸ δὲ τοῦ λόγου Ἐκθέτην λαμβάνειν, ἐξὶ διαιροῦντας διὰ τοῦ ἑπομένου τὸ ἡγούμενον.

Οὕτως ἐκ τῶν λόγων α : β καὶ ρ : σ, σύγκειται ὁ λόγος α × ρ πρὸς β × σ, καὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\alpha \times \rho}{\beta \times \sigma}$· ἢ ἐὰν γένηται ρ : σ = β : γ, ἐκ τῶν λόγων α : β καὶ ρ : σ, σύγκειται ὁ λόγος α : γ· Τηνικαῦτα γὰρ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\rho}{\sigma}$ $= (1)\ \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \beta}{\beta \times \gamma} = (2)\ \frac{\alpha}{\gamma}$.

Οὕτωτοι καὶ τὸ διπλοῦν τοῦ τριπλοῦ ἑξαπλοῦν ἐστίν· οὐκ ἄλλως δὲ καὶ ὁ λόγος 4 : 3 σύγκειται ἐκ τῶν λόγων 4 πρὸς ὁντινοῦν ἀριθμὸν (οἷον πρὸς 7), καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (φέρε τοῦ 7) πρὸς 3, καὶ γὰρ $\frac{4}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δῆλον, καὶ ὅτι λόγος ὁποιοσοῦν ἐκ πλειόνων λόγων συγκεῖσθαι δύναται· οὕτως ὁ λόγος α : ε σύγκεῖσθαι δύναται ἐκ τῶν λόγων α : β, καὶ β : γ, καὶ γ : δ, καὶ δ : ε.

Πρότασις Α.

„Τὰ Τρίγωνα (αβγ, δεζ), καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (αξφγ, δπρζ) „τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τουτέστι τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις, „πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ Βάσεις (αγ, δζ).

Ἐκ τοῦδε ὅλον τὸ ς'. Βιβλ. ἐξῆπται τοῦ Θεωρήματος, καὶ εἴτι ἁπλῶς κ. 325.
ἐπὶ Σχημάτων εἴτε ἐπιπέδων, εἴτε καὶ στερεῶν, διὰ τῆς ἀναλογίας φέρεται ἀποδεδειγμένον· Οἱ μὲν οὖν Εὐκλείδης διὰ τῶν πολλαπλασίων τὸ προτεθὲν ἀποδείκνυσιν, ἐξ ὧν πολλὴ ἐκ πρώτης τοῦ Βιβλίου ἀφετηρίας τοῖς πρωτοπείροις συμβαίνει δυσχέρεια· καὶ τοίνυν ἄλλην ἡμῖν ἀποδοτέον δεῖξιν εὐχερεστέραν, ἐκ τοῦ Ε'. λαβοῦσι ταύτην θεωρήματος τοῦ Β'. μέρους τοῦ Ε'. Βιβλίου, ἢ γοῦν ἐκ τοῦ ἑτέρου ἐκείνου τῶν ἴσων λόγων τεκμηρίου τοῦ πρώτου τε καὶ ἀπταίστου, ὃ μεταξὺ τῶν ὅρων τοῦ Ε'., πρὸ τοῦ Ζ'. δηλ. Ὁρισμοῦ, παρετέθη, ὧδε.

Ληφθήτω δὴ τῆς Βάσεως δζ μόριον ἡλικονοῦν, οἷον τὸ δη τεταρτημόριον, καὶ ἀχθήτω εη, καὶ ἔστω τὸ δεη τεταρτημόριον τοῦ Τριγώνου δεζ. (3). Διόπερ ἥτε δη Εὐθεῖα, καὶ τὸ δεη Τρίγωνον εἰσὶ τῶν ἑπομένων ὅμοια μόρια (4). Ἀφαιρεθήτω τοίνυν δη ἀπὸ τῆς Βάσεως αγ, ὁσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον ὀκτάκις· καὶ ἐπειδὴ αἱ γθ., θι, κ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι εἰσὶ τῇ δη ἑκάστῃ, ἔστω δὴ καὶ τὰ

(1) ΛΔ. τοῦ ι'. (2) ΙΕ. τοῦ ε'. (3) ΛΗ. Βιβλ. α'. (4) Ορ. Ζ. τοῦ ε'.

ὀκτὼ Τρίγωνα γβθ, θβι, ιβκ καὶ τὰ λοιπὰ, τῷ Τριγώνῳ δεη ἴσα ἕκαςον (1)· καὶ ὁσάκις ἄρα ἡ δη περιέχεται ἐν τῷ ἡγουμένῳ αγ, τοσάκις τὸ Τρίγωνον δεη περιέχεται ἐν τῷ ἡγουμένῳ αβγ· Τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ δείξω, καὶ ἡλικαῦν τῶν ἑπομένων (τῆς τε Βάσεως φηι δζ, καὶ τοῦ Τριγώνου δεζ) ὁμοίας μερίδας, ἐν τοῖς ἡγουμένοις (λέγω τῇ Βάσει αγ, καὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ) ἰσαρίθμως ἀεὶ περιέχεσθαι· Ἄρα διὰ τὸ Ε΄. Θεώρ. τοῦ Β΄. μέρους τοῦ Ε΄. Βιβλίου, τουτέστι διὰ τὸ ἕτερον ἐκεῖνο τῶν ἴσων λόγων τεκμήριον, ὡς Βάσις αγ πρὸς Βάσιν δζ, οὕτω καὶ Τρίγωνον τὸ αβγ πρὸς Τρίγωνον ἐστὶ τὸ δεζ. Ο. Ε. Δ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ Παραλληλόγραμμα αφ καὶ δρ διπλάσιόνα ἐστὶ (2) τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ, ἔστι δὴ καὶ αὐτὰ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Βάσεις.

Πορίσματα.

κ. 326. Α. Τὰ Τρίγωνα (αβγ, ζιλ) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα, τὰ ἴσας ἔχοντα τὰς Βάσεις αγ, ζλ, ἢ τὴν αὐτὴν, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὕψη βξ, ιφ. Ἔστωσαν καὶ γὰρ φσ καὶ ξρ ἴσαι ταῖς ἴσαις βάσεσι ζλ, αγ, καὶ ἔσονται φσ, ξρ ἀλλήλαις ἴσαι· ἀχθήτωσαν οὖν αἱ στ, ρβ, καὶ ἐὰν ἐπὶ τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ ληφθῶσιν αἱ βξ, ιφ ὡς Βάσεις, ἔσονται αἱ ξρ, σφ τούτων ὕψη· Ἐπεὶ δὲ ταῦτα ἴσα εἰσὶν, ἔσονται ξβρ, φισ πρὸς ἄλληλα (3) ὡς αἱ Βάσεις βξ, ιφ· ἀλλ' ἐκ κατασκ. ξρ ἴση τῇ αγ ἐστὶ, καὶ φσ ἴση τῇ ζλ, ἔνθεντοι καὶ τὰ Τρίγωνα ξβρ, φισ, ἴσα ἐστὶ (4) τοῖς Τριγώνοις αβγ, ζιλ· Ἄρα καὶ τὰ Τρίγωνα αβγ, ζιλ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς βξ πρὸς ιφ.

κ. 325. Β. Τὰ Τρίγωνα (αβγ, δεζ), καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (αφ, δρ), ἅτινα ἐστὶν ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ, τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσιν, ἐν ταῖς αὐταῖς δηλονότι Παραλλήλοις καθῆναι δυνήσονται. Ἔστι δὲ τὸ ἀντίστροφον τῆς Α΄. Προτάσεως.

Εἰ μὴ γὰρ, οὐδὲ ἡ βε Παράλληλος πρὸς τὴν αζ. Ἀχθήτω δὴ διὰ τοῦ ε Σημείου ἡ εσ Παράλληλος πρὸς τὴν αζ, τέμνουσα τὴν γβ κατὰ τὸ σ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ασ. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα ασγ, δεζ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα Παραλλήλοις, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα (5) ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ· ἀλλὰ καὶ τὰ Τρίγωνα αβγ, δεζ εἰσὶ (6) καὶ αὐτὰ ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ, ἄρα τὸ Τρίγωνον ασγ (7) ἴσον ἐστὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα διὰ τοῦ ε Σημείου Εὐθεῖα τις πρὸς τὴν αζ Παράλληλος ἀχθῆναι δυνήσεται ἄλ-

(1) ΛΗ. Βιβ. α΄. (2) ΜΑ τοῦ α΄. (3) Α. τοῦ ς΄. (4) ΛΗ. τοῦ α΄. (5) Διὰ τὴν Προτ. (6) Ἐξ ὑποθ. (7) Διὰ τὴν ΙΑ. καὶ Θ. τοῦ ε΄.

λη παρὰ τὴν βε· Καὶ ἑπομένως τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις Τρίγωνα αβγ, δεζ, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις εἰσί.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα αφ, δρ, τὰ τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ (1) διπλάσια, ἐπὶ ταῖς αὐταῖς μὲν βάσεσι, ταῖς αὐταῖς δὲ παραλλήλοις εἰσὶν, αἷς καὶ τὰ Τρίγωνα, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (2), ἅτινα εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις, ἐν ταῖς αὐταῖς καὶ ταῦτα Παραλλήλοις ἐσί.

Τὰ Τρίγωνα (αβγ, ζιλ) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα, ἃ ἐστι πρὸς ἄλληλα ὡς ὕψη τὰ βξ, ιφ, τὰς Βάσεις αγ, ζλ ἴσας ἔχει· Ἔστι δὲ ἀντίστροφον τῷ Α'. Πορίσματι. Γ'. κ. 327.

Κατασκευασθέντων γὰρ τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ὡς ἐν τῷ Α'. Πορίσμ., δειχθήσεται ὡς ἀνωτ. τὸ Τρίγωνον αβγ = Τριγ. ξβρ, καὶ τὸ ζιλ = φισ· Ἀλλαμὴν ἐξ ὑποθ. αβγ : ζιλ :: βξ : ιφ, ἄρα ξβρ : φισ :: βξ : ιφ· Ἐὰν δὲ λημφθῶσιν αἱ βξ, ιφ, ὡς Βάσεις τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ἔσονται ξρ, φσ, τὰ τούτων ὕψη· Καὶ ἐπειδὴ τὰ Τρίγωνα ἐστὶν ὡς αἱ Βάσεις, τὰ ὕψη ξρ, φσ (3) ἴσα ἔσται· ἀλλ' ἐκ κατασκ. ξρ = αγ καὶ φσ = ζλ, ἄρα αγ καὶ ζλ ἔσονται ἴσαι.

Πρότασις Β.

„Ἐὰν Τριγώνου παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν (βγ) ἀχθῇ τις Εὐθεῖα παράλληλος (ζλ), ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ Τριγώνου Πλευράς (τουτέστιν αζ : ζβ :: αλ : γλ).

„Καὶ ἐὰν αἱ τοῦ Τριγώνου Πλευραὶ (βκ, γκ) ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα (ζλ), παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ Τριγώνου Πλευρὰν (βγ) παράλληλος.

Μέρος Α'. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ βλ, γζ· Ἐπεὶ οὖν ἡ ζλ τίθεται Παράλληλος εἶναι πρὸς τὴν βγ, ἔσται τὰ Τρίγωνα ζβλ, λγζ ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ζλ, ἀλλήλοις (4) ἴσα, ὥστε τὸ Τρίγωνον χ πρὸς ἑκάτερον, λόγον ἔξει (5) τὸν αὐτόν, τουτέστι χ : ζβλ :: χ : λγζ· ἀλλὰ τὸ Τρίγωνον χ ἐστὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον ζβλ, ὡς αζ (6) πρὸς ζβ· καὶ πάλιν τὸ Τρίγωνον χ ἐστὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ, ὡς (7) αλ πρὸς λγ, ἄρα (8) καὶ αζ : ζβ :: αλ : λγ. Ο. Η. τὸ Α'. κ. 328.

Μέρος Β'. Ὡς αζ πρὸς ζβ, οὕτω (9) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον

(1) ΜΑ. τοῦ α'. (2) ΙΕ. τοῦ ε'. (3) Διὰ τὸ Β'. Πόρ. τῆς παρούσης. (4) ΛΖ. τοῦ α'. (5) Ζ. τοῦ ε'. (6) Διὰ τὴν ἀνωτ. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) ΙΑ. τοῦ ε'. (9) Διὰ τὴν ἀνωτ.

ζβλ. Πάλιν ὡς αλ πρὸς λγ, οὕτω (1) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ· τίθεται δὲ αζ : ζβ : : αλ : λγ, ἄρα (2) Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον ζβλ, ὡς Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον λγζ· Ὥστε τὰ Τρίγωνα (3) ζβλ καὶ λγζ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ ἑπομένως (4) αἱ ζλ, βγ Παράλληλοι εἰσίν. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 329. Α. Ἐὰν παρὰ μίαν τῆ Τριγώνη Πλευρὰν (βγ) πλείονες ἀχθῶσι Παράλληλοι (ιξ, ζλ), ἔσται ἅπαντα τὰ τῶν Πλευρῶν Τμήματα ἀλλήλοις ἀνάλογον.

Ἀχθήτω γὰρ ἡ ζπ Παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ· Αἱ γὰρ Εὐθεῖαι ζσ, σπ ἴσαι εἰσὶ (5) ταῖς λξ, ξλ· ἀλλὰ (6) βι : ιζ : : πσ : σζ, ἄρα καὶ βι : ιζ : : γξ : ξλ.

κ. 330. Β. Ἐὰν ὦσι Κύκλοι δύω ἔνδοθεν ἁπτόμενοι, ἀπὸ δὲ τῆ Σημείη τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ αβ ἡ τῆ μείζονος τῶν Κύκλων Διάμετρος, τέμνηση τὸν ἐλάσσονα κατὰ τὸ γ, ἀχθῇ δὲ καὶ ὁποιαδήποτε ἄλλη ἡ αδ, τέμνηση τὸν ἐλάσσονα κατὰ τὸ ε, ἔσται μὲν ἡ αγ Διάμετρος (7) τῆ ἐλάσσονος τῶν Κύκλων, ἔσονται δὲ αἱ Διάμετροι ταῖς Ὑποτεινούσαις ἀνάλογον, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν Διαμέτρων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν Ὑποτεινουσῶν ὡσαύτως· τουτέστιν αβ : αδ : : αγ : αε : : βγ : δε, ἢ καὶ ἐναλλὰξ αγ : γβ : : αε : εδ, καὶ αβ : βγ : : αδ : αε. Ἐὰν γὰρ ἀχθῶσιν αἱ Εὐθεῖαι βδ, γε, διὰ τὰς ὑπὸ αδβ, αεγ Ὀρθὰς (8) ὔσας, καὶ διὰ τοῦτο ἴσας, αἱ βδ, γε (9) Παράλληλοι ἔσονται· Ἄρα (10) αγ : γβ : : αε : εδ. Ο. Η. τὸ Α'.

Καὶ ἐν συνθέσει (11) αβ : βγ : : αδ : δε. Ο. Η. τὸ Β'.

Καὶ ἐν ἀντιστροφῇ (12) βα : αγ : : δα : αε. Ο. Η. τὸ Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Ἐὰν Τριγώνη Γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν Γωνίαν Εὐθεῖα „(βζ), τέμνει καὶ τὴν Βάσιν (αγ), τὰ τῆς Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν „αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τῆ Τριγώνη Πλευραῖς (αβ, γβ).

„Καὶ ἐὰν τὰ Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς „λοιπαῖς τῆ Τριγώνη Πλευραῖς (αβ, γβ), ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν το-

(1) Διὰ τὴν αὐτήν. (2) ΙΑ. τῆ ε'. (3) Θ. τῆ ε'. (4) ΛΘ. τῆ α'. (5) ΛΔ. τῆ α'. (6) Β. τῆ ς'. (7) Πόρισμα τῆς ΙΒ. τῆ γ'. (8) ΛΔ. τῆ γ'. (9) ΚΘ. τῆ α'. (10) Διὰ τὴν παρῆσ. (11) ΙΗ. τῆ ε'· (12) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῆ ε'.

„μὴν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα (βζ), δίχα τέμνει τὴν τοῦ Τριγώνου Γωνίαν (ὑπὸ „αβγ).

Μέρος Α'. Προαχθήτω ἡ γβ, ὥστε τὴν προεκβληθεῖσαν βγ ἴσην εἶναι τῇ βα· καὶ ἐπειδὴ ἐν τῷ Τριγώνῳ ψ, αἱ Πλευραὶ λβ, αβ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ Γωνίαι (1) αἱ κατὰ τὸ λ καὶ ξ ἴσαι ἔσονται· Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ αβγ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση (2) ἐστὶν, ἡ Γωνία ι, ἥτις ἐξ ὑποθέσεως, τῆς ὑπὸ αβγ ἡμίσεια ἐστὶ, τῇ κατὰ τὸ λ Γωνίᾳ ἴση ἔσται, ὥστε αἱ αλ καὶ ζβ Παράλληλοι (3) εἰσί· Καὶ τοίνυν ἐπὶ τοῦ Τριγώνου αγλ (4), αζ : ζγ :: λβ (τουτέστιν αβ) : βγ. Ο. Η. τὸ Α'. κ. 331.

Μέρος Β'. Προεκβληθείσης ὡς ἀνωτέρω τῆς γβ, ὡς τὴν λβ ἴσην εἶναι τῇ αβ, ἐπειδὴ τίθεται εἶναι αζ : ζγ :: αβ (ταυτὸν εἰπεῖν λβ) βγ, ἔσονται αἱ αλ, ζβ (5) Παράλληλοι, καὶ οὕτως ἡ ἐκτὸς Γωνία ι ἔστιν ἴση (6) τῇ ἐντὸς λ, ἥτοι ἐναλλὰξ π, ἴση τῇ ξ· Ἀλλὰ γὰρ τῶν λβ, αβ ἴσων οὐσῶν, καὶ αἱ Γωνίαι (7) λ καὶ ξ ἴσαι εἰσίν· ἄρα καὶ αἱ ι καὶ π ἴσαι Γωνίαι εἰσὶ, καὶ δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ὑπὸ αβγ Ο. Η. τὸ Β'.

Πόρισμα.

Ἐὰν ἡ τὴν Γωνίαν τοῦ Τριγώνου δίχα τέμνουσα Εὐθεῖα, καὶ τὴν Βάσιν δίχα τέμνῃ, τὸ Τρίγωνον τῇ δυνάμει τῆς ἐν χερσὶ Προτάσεως, Ἰσοσκελὲς ἔσται, καὶ ἡ διχοτομοῦσα Εὐθεῖα ἐπὶ τὴν Βάσιν πρὸς ὀρθὰς (8) στήσεται.

Πρότασις Δ.

„Τῶν Ἰσογωνίων Τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας „Γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνουσαι Πλευραὶ, τουτέ„στιν ὅτι τὰ Ἰσογώνια Τρίγωνα ὅμοια (9) ἐστί. κ. 332.

Ἐπὶ τῶν Τριγώνων χ, ψ, ἔστω ἡ Γωνία α ἴση τῇ ζ, καὶ ἡ γ τῇ λ, καὶ καὶ ἡ β τῇ ι. Φημὶ δὴ ὅτι αβ : ζι :: αγ : ζλ, καὶ αγ : ζλ :: γβ : λι, καὶ γβ : λι :: βα : ιζ· καὶ ὁμοίως αβ : αγ :: ζι : ζλ, καὶ αγ : γβ :: ζλ : λι, καὶ γβ : βα :: λι : ιζ.

Ἐὰν γὰρ ἡ ζ Γωνία τῇ ταύτης ἴσῃ α ἐπιτεθῇ, αἱ Πλευραὶ ζι, ζλ, ταῖς αβ, αγ Πλευραῖς ἐφαρμόσουσι· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ αιλ, καθ' ὑπόθ., κ. 333.

(1) Ε. τοῦ α'. (2) ΛΒ. τοῦ α'. (3) ΚΘ. τοῦ α'. (4) Β. τοῦ ς'. (5) Β. τοῦ ς'. (6) ΚΖ. τοῦ α'. (7) Ε. τοῦ α'. (8) Διὰ τὸν Γ'. Ἀριθμ. τοῦ Σχολ. τοῦ μετὰ τὴν Κς. τοῦ α'. (9) Ὁρ. Δ. τοῦ ς'.

ἴση ἐςὶ τῇ ἐντὸς β, ἔσονται (1) ιλ, βγ Παράλληλοι· ἄρα (2) βι : ια : : γλ : λα, καὶ ἐν συνθέσει βα : ιζ : : γα : λζ. Ἐὰν δὲ ἡ λ Γωνία τῇ ἴσῃ γ ἐπιτεθῇ, ὡσαύτως δείξω, ὅτι καὶ αγ : ζλ : : βγ : ιλ· καὶ τελευταῖον ἐὰν ἡ ι Γωνία τῇ ἴσῃ β ἐπιτεθῇ, δείξω παραπλησίως, ὅτι καὶ βγ : ιλ : : αβ : ζι. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ ἡγούμενα βα, αγ, γβ, πρὸς τὰ ἑπόμενα ιζ, ζλ, λι, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα ἐςὶν, ἔςαι δὴ καὶ ἐναλλὰξ (3) βα : αγ : : ιζ : ζλ, καὶ αγ : γβ : : ζλ : λι, καὶ γβ : βα : : λι : ιζ· Ὥςε δῆλον ἐςὶ τὸ προτεθέν.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 333. Α. Ἐὰν Τριγώνου παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν βγ, Παράλληλος ἀχθῇ ἡ ιλ, συςήσεται Τρίγωνον τὸ ιζλ ὅμοιον τῷ ὁλοχερεῖ Τριγώνῳ βζγ· Ὅθεν δὴ γζ ἔςαι πρὸς λζ, ὡς βγ πρὸς λι, καὶ ἐναλλὰξ γζ : βγ : : λζ : λι· καὶ πάλιν ζβ : ζγ : : ζι : ζλ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ λι, βγ παράλληλοι εἰσὶν, ἔσονται αἱ ἐκτὸς (4) ὑπὸ ζιλ, ζλι, ἴσαι ταῖς ἐντὸς β καὶ γ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ κοινή· ὥςε Ἰσογώνια ἔςαι τὰ Τρίγωνα, καὶ τὰς Ὑποτεινούσας ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας β, καὶ ὑπὸ ζιλ, τουτέςι τὰς γζ, λζ, πρὸς τὰς βγ, λι, αἳ ὑποτείνουσιν ὑπὸ τὴν κοινὴν Γωνίαν ζ, ἀνάλογον ἔχοντα· ὁμοίως δὲ καὶ τὰς περὶ τὴν κοινὴν (5) Γωνίαν ζ, τουτέςι ζβ : ζγ : : ζι : ζλ.

κ. 334. Β. Ἐὰν Τριγώνου τὰς Παραλλήλους αγ, λξ τέμνῃ τις Εὐθεῖα ἡ βζ, ἡ ἀπὸ τῆς ἀντιθέτου Γωνίας β ἠγμένη, τεμεῖ αὐτὰς ἀνάλογον.

Κατὰ γὰρ τὸ Α'. Πόρισμα, αζ : λι : : ζβ : ιβ, καὶ ζγ : ιξ : : ζβ : ιβ· ὥςε αζ : λι : : ζγ : ιξ, καὶ ἐναλλὰξ αζ : ζγ : : λι : ιξ (6).

κ. 335. Γ. Καὶ μεταξὺ δυεῖν Παραλλήλων αβ, γδ, ἐὰν Εὐθεῖαι δύο εζ, ηθ διατέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ ι, τὰ τούτων Τμήματα ει, ιζ, ηι, ιθ, ἔςαι ἀνάλογον· Τὰ γὰρ ειη, ζιθ Τρίγωνα διὰ τὰς ἐν τῷ ι κατὰ κορυφὴν (7) ἴσας ὔσας, καὶ τὰς ἐναλλὰξ (8) κατὰ ε καὶ ζ, καὶ η καὶ θ, αἳ καὶ αὗται ἴσαι εἰσὶν, Ἰσογώνια ἔςαι καὶ ὅμοια· Ἄρα ει : ιζ : : ηι : ιθ.

Δ. Ἐκ δὲ δὴ τοῦ Α'. Πορίσματος, καὶ πύργου, ἢ τοῦ τυχόντος ἄλλου μετεώρου σημείου τὸ ὕψος, μόνῃ τῇ ὑπὸ τῆς ςηριχθείσης βακτηρίας πεμπομένῃ σκιᾷ, καταμετρεῖν παιδευόμεθα.

κ. 336. Πήξας γὰρ πρὸς ὀρθὰς τὴν βακτηρίαν ζλ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, οὕτως ὥςε

---

(1) ΚΘ. τοῦ α'. (2) Β. τοῦ ς'. (3) Ις. τοῦ ε'. (4) ΚΖ. τοῦ α'. (5) Α. Ὁρ. τοῦ ς'. (6) Ις. τοῦ ε'. (7) ΙΕ. τοῦ α'. (8) ΚΖ. τοῦ α'.

τὴν ἀφ' ἡλίου ἀκτῖνα βα, τὸ τοῦ πύργου περατοῦσαν σκίασμα, καὶ διὰ τοῦ λ χωρεῖν, ἕξεις ἐπὶ τοῦ τριγώνου αψβ, τὴν ζλ πρὸς τὸ ψβ ὕψωμα τοῦ πύργου παράλληλον. Ἔνδεντοι καὶ ὡς αζ ἡ τῆς βακτηρίας ἀπ' ἄκρας τοῦ σκιάσματος ἀπόσασις, πρὸς ζλ τὸ τῆς βακτηρίας ὑπὲρ γῆν μῆκος, οὕτως αψ ἡ τοῦ πύργου ἀπ' ἄκρας τοῦ σκιάσματος ἀπόσασις, πρὸς ψβ τὸ τοῦ πύργου αὐτοῦ ὕψος. Εὐχερὴς δὲ ἔσται τῆς τῶν τριῶν πρώτων καταμετρήσεως, βᾶσα καὶ τὸ Δ'., τουτέστι τὸ ζητούμενον ὕψος εὑρεθήσεται. Ο. Ε. Ε.

Ἐντεῦθεν δὲ καὶ τῶν Κανονίων, τῶν τὰ Ἡμίτονα, καὶ τὰς Ἀπτομένας, καὶ τὰς Τεμνούσας περιεχόντων, τὴν ἀρχὴν λαμβάνομεν· Ἔστω γὰρ Κύκλου Ἡμιδιάμετρος ἡ αγ, μερῶν φέρε 100000, καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ βαΔ μοιρῶν 80· καὶ ἐπεὶ ἡ μοιρῶν 60 Ὑποτείνουσα (1) ἴση ἐστὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αγ, ἡ ΔΒ, ἥτις ἐστὶ τὸ Ἡμίτονον μοιρῶν 30, τῇ ἡμισείᾳ τῆς Ἡμιδιαμέτρου, ἤτοι $\frac{1}{2}$ αγ ἴση ἔσται (2), καὶ μέρη 50000 περιέξει. Ἐπὶ γοῦν τοῦ ὀρθογωνίου Τριγώνου αδβ, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αβ (3) ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶ Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ αδ καὶ βδ· Τετραγωνισθήτω τοίνυν ἡ Διάμετρος αβ, διὰ πολλαπλασιασμοῦ 100000 × 100000, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντος Τετραγώνου, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ βδ ἀφαιρεθήτω, καὶ λοιπὸν ἔσται Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αδ, ἤτοι τὸ ἀπὸ τοῦ Συνημιτόνου ζβ, τοῦ τῇ αδ ἴσου (4), ἐξ οὗ δὴ ἐξαχθείσης τῆς ῥίζης, δήλη ἔσται ἡ βζ, εἴτουν ἡ αδ. Ἀφαιρεθεῖσα δὲ καὶ αὕτη ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου αγ = 100000, το πλάγιον Ἡμίτονον δγ καταλείψει· Εἶτα διὰ τῆς ἑξῆς ἀναλογίας (5) αδ : βδ : : αγ : εγ, δήλη ἔσται καὶ ἡ Ἐφαπτομένη εγ· ἐπειδὴ δὲ (6) ἐστὶν αδ : αβ : : αγ : αε, δήλη ἔσται καὶ ἡ Τέμνουσα αε· Τῇ δ' αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐκ τῆς βζ, ἥτις ἐστὶ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαη μοιρ. 60, ληφθήσεται τὸ τῆς αὐτῆς Γωνίας πλάγιον Ἡμίτονον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνουσα. Ἤδη δὲ ἐπεὶ (7) τὸ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον (8), διπλάσιον ἐστὶ τοῦ Τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου, ἐὰν ἡ Ἡμιδιάμετρος ὑποτεθῇ 100000, ἔσται ἡ Πλευρὰ τοῦ Τετραγώνου τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου (τουτέστιν ἡ μοιρ 90 ὑποτείνουσα) ἴση τῇ τετραγωνείῳ ῥίζῃ τοῦ ἀριθμοῦ 100000 × 100000 × 2· ὅθεν δὴ γινώσκεται καὶ ἡ ἡμίσεια Πλευρὰ, τουτέστι τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον (9) μοιρ. 45, καὶ ἑπομένως καὶ τὸ πλάγιον Ἡμίτονον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνουσα· Καὶ ἐν γένει ἐὰν δοθῇ ὁ τῆς Ὑποτεινούσης οὐτινοσοῦν τόξου λόγος, ὃν ἔχει πρὸς τὴν

Ε'. κ 337.

κ. 338.

(1) Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τοῦ Δ. (2) Α. Πόρ. τῆς Γ. τοῦ γ'. (3) ΜΖ. τοῦ α'. (4) ΛΔ. τοῦ α'. (5) Α. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ ς'. (6) Διὰ τὴν αὐτήν. (7) Ὅρα Σχῆμ. (8) Σχόλ. πρὸ μετὰ τὴν ς. καὶ Ζ. τοῦ δ'. (9) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῆς Γ. τοῦ γ'.

Ἡμιδιάμετρον, εὑρεθήσεται τῆς τȣ̃ τόξȣ ἡμισείας τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον, καὶ τὸ πλάγιον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνȣσα· Ὃς δ' ἂν πλειόνων ἐφίοιτο, μετιέτω τὸ τȣ̃ περιχλεȣ̃ς Οὐαλλιστίȣ πόνημα, τὸ περὶ τῶν τομῶν τῆς Γωνίας, ἐν τῷ Β'. τεύχει τῶν ἐκείνȣ συγγραμμάτων, Σελ. 533—601.

κ 339. ς'. Κἀντεῦθεν ἐὰν ἀπὸ ἡςινοσȣ̃ν Γωνίας α τȣ̃ Τριγώνȣ αβγ τȣ̃ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένȣ, Κάθετος ἐπὶ τὴν Βάσιν ἀχθῇ ἡ αε, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρος αδ, ἔςαι δὴ ἡ Κάθετος αε, πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὴν Γωνίαν, φέρε πρὸς τὴν αγ, ὡς ἡ ἑτέρα Πλευρὰ αβ, πρὸς τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρον αδ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βδ, τὰ Τρίγωνα αεγ, αβδ, Ἰσογώνια ἐςὶ, καὶ γὰρ αἱ γ καὶ δ Γωνίαι (1) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Περιφερείας βα βεβηκεῖαι· αἱ δὲ Γωνίαι ἥτε (2) ὑπὸ αβδ καὶ ἡ (3) ὑπὸ αεγ ὀρθαὶ καὶ ἴσαι· ὥςε καὶ αἱ ὑπὸ βαδ καὶ εαγ ἀλλήλαις (4) ἴσαι εἰσί· Τὰ ἄρα Τρίγωνα διὰ τὴν ἐν χερσὶ Προτ. ὅμοια, καὶ ἔτως αε : αγ :: αβ : αδ. Ο. Ε. Δ.

κ. 340. β'. Τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρον αβ (προεκβληθεῖσαν ἣν δέοι) τεμνέτω πρὸς ὀρθὰς Εὐθεῖα ἄπειρος ἡ εζ κατὰ τὸ γ, ἐπὶ δὲ τῆς Εὐθείας εζ, ληφθέντος τȣ̃ τυχόντος σημείȣ ε ἐκτὸς τȣ̃ Κύκλȣ, ἐπεζεύχθω ἡ αε τέμνȣσα τὸν Κύκλον κατὰ τὸ δ· ἔςαι γὰρ ἔτως ἡ Ὑποτείνȣσα αδ πρὸς τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρον αβ, ὡς αγ πρὸς αε· Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς Εὐθείας δβ, τὰ Τρίγωνα αδβ καὶ αγε Ἰσογώνια ἐςίν· ἡ μὲν γὰρ α ἑκατέροις κοινὴ, αἱ δὲ κατὰ τὸ γ καὶ δ Γωνίαι ὀρθαὶ (5) εἰσίν· ἔνθεντοι καὶ ἡ τρίτη ἴση ἔςαι (6) τῇ τρίτῃ· Τοιγαρȣ̃ν διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν, τὰ Τρίγωνα ὅμοια ἐςὶ, καὶ αδ : αβ :: αγ : αε.

Τῶν δέ τοι σημείων β καὶ γ συμπιπτόντων, ἡ τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρος μέση ἀνάλογος ἐςὶ τῶν αδ καὶ αε· ἔςαι γὰρ δὴ αδ : αβ = αβ : αε.

Πρότασις Ε.

„Ἐὰν δύω Τρίγωνα τὰς Πλευρὰς ἁπάσας ἔχῃ ἀνάλογον, Ἰσογώνια ἔ„ςαι τὰ Τρίγωνα.

κ. 341. Τȣτέςιν ἐὰν αβ ᾖ πρὸς ρζ ὡς αγ πρὸς ρπ, καὶ αγ : ρπ :: γβ : πζ, καὶ γβ : πζ :: αβ : ρζ, λέγω δὴ ὅτι αἱ Γωνίαι αἱ ἀπεναντίον τοῖς ἡγȣμένοις, ταῖς Γωνίαις ταῖς ἀπεναντίον τοῖς ἑπομένοις ἴσαι εἰσί· τȣτέςιν ἡ μὲν γ τῇ ι, ἡ δὲ β τῇ ζ, ἡ δὲ α τῇ ξ.

---

(1) ΚΛ. τȣ̃ γ'. (2) ΛΑ. τȣ̃ γ'. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'. (5) Ἡ μὲν ἐξ ὑποθ. ἡ δὲ διὰ τὴν ΛΑ. τȣ̃ γ'. (6) Διὰ τὸ Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'.

Γωνίαι	Ἡγούμ.	Ἐπόμ.	Γωνίαι.
γ	αβ	ρζ	ι
β	αγ	ρπ	ζ
α	γβ	πζ	ξ

Ταῖς Γωνίαις α καὶ γ ποίει ἴσας τὰς χ καὶ ψ, ὥστε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν· οὕτω δέ τοι καὶ αἱ β καὶ ν (1) ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐπειδὴ οὖν τὰ Τρίγωνα Φ καὶ Τ Ἰσογώνια ἐστὶν, ἔχει αβ : ρν :: αγ : ρπ (2), ἄρα αβ : ρζ :: αβ : ρν, καὶ ἑπομένως αἱ ρν, ρζ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Ὡσαύτως δείξω ἴσας εἶναι καὶ τὰς πν, πζ· κἀντεῦθεν τὰ Τρίγωνα Φ καὶ Σ Ἰσόπλευρα ἐστὶν, ἀκολούθως δὲ καὶ αἱ Γωνίαι ι, ζ, ξ ἴσαι εἰσὶ (4) ταῖς χ, ν, ψ, τουτέστι (5) ταῖς γ, β, α. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ς.

„Ἐὰν δύω Τρίγωνα Τ καὶ Σ, μίαν μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχει (τὴν α τῇ ξ), „περὶ δὲ τὰς ἴσας Γωνίας τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον (αβ : αγ :: ρζ : ρπ), τὰ „Τρίγωνα ἔσται ὅμοια.

Ταῖς Γωνίαις α καὶ γ ἴσαι γινέσθωσαν αἱ χ καὶ ψ, ὥστε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν, καὶ Γωνίαι γοῦν (6) β καὶ ν ἴσαι ἔσονται καὶ αὗται· Οὕτω δέ τοι δεῖξαι ῥᾴδιον, ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, ἴσας εἶναι καὶ τὰς ρζ, ρν, ἡ δὲ ρπ ἐπ' ἀμφοῖν, τῷ τε Φ καὶ τῷ Σ κοινή· ἀλλὰ γὰρ καὶ αἱ Γωνίαι ξ καὶ χ ἀλλήλαις ἴσαι, ὡς συνεξισούμεναι τῇ αὐτῇ α, ἡ μὲν χ ἐκ κατασκ., ἡ δὲ ξ ἐξ ὑποθ., ἄρα καὶ αἱ ι καὶ ζ (7) ἴσαι καὶ αὗταὶ εἰσὶ ταῖς ψ καὶ ν· Ὥστε τὸ Σ Τρίγωνον Ἰσογώνιον ὂν ἐστὶ τῷ Φ Τριγώνῳ, τουτέστιν ἐκ κατασκ. τῷ Τ· Ἄρ' οὖν τὰ Τρίγωνα Σ καὶ Τ (8) ὅμοια ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ζ.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, ζιλ), μίαν Γωνίαν (β) μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔ„χῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας Γωνίας (α, ζ) τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον (ὡς εἶναι βα „: αγ :: ιζ : ζλ), τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν, ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐ„λάσσονα Ὀρθῆς, ὅμοια ἔσται τὰ Τρίγωνα.

Εἴπερ αἱ γ καὶ λ Ὀρθαὶ, διὰ τὰς β καὶ ι τὰς ἴσας εἶναι τιθεμένας, Ἰσο- κ. 342.
γώνια (9) ἔσται τὰ Τρίγωνα, καὶ δὴ (10) καὶ ὅμοια.

---

(1) Πόρ. Θ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Θ. τοῦ ε'. (4) Η. τοῦ α'. (5) Διὰ τὴν κατασκ. (6) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (7) Δ. τοῦ α'. (8) Δ. τοῦ ς'. (9) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (10) Δ. τοῦ ς'.

Ἐὰν δὲ αἱ Γωνίαι γ καὶ λ μὴ ὀρθαὶ ὦσιν, ὁμογενεῖς δὲ (τοῦτο δέ ἐστιν, ἤτοι ἅμα Ὀρθῆς ἐλάσσονες, ἢ μείζονες), εἴτε α καὶ ζ Γωνίαι τύχωσιν ἴσαι, διὰ τὰς συνιστᾶσθαι ὑποτιθεμένας β καὶ ι, οὐδὲν ἧττον τὰ Τρίγωνα (1) Ἰσογώνια ἔσται, καὶ δὴ (2) καὶ ὅμοια. Κείσθωσαν γεμὴν αἱ α καὶ ζ μὴ ἴσαι, καὶ ἔστω ἡ α μείζων, πρὸς δὲ τῷ α σημείῳ τῆς αβ Εὐθείας, τῇ Γωνίᾳ ζ ἴση συνεστάσθω ἡ ὑπὸ βαδ· καὶ διὰ τὰς β καὶ ι τὰς ἴσας, καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ αδβ καὶ λ ἴσαι (3) ἔσονται, τά τε Τρίγωνα αβδ, ζιλ (4) ὅμοια, καὶ ιζ : ζλ :: βα : αδ· ἀλλὰ ιζ : ζλ (5) :: βα : αγ, ἄρα (6) αγ = αδ. Καὶ οὕτως ἐπὶ τοῦ Ἰσοσκελοῦς αγδ, αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι γ καὶ ὑπὸ αδγ (7) ὀξεῖαι, ἤτοι Ὀρθῆς ἐλάσσονες εἰσί· Τοίνυν ἡ ὑπὸ αδβ ἀμβλεῖα (8) ἐστὶ, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολουθοῦ καὶ ἡ κατὰ τὸ λ· ἀλλ' ἡ κατὰ τὸ λ αὐτῇ ὁμογενὴς εἶναι ἐτέθη τῇ γ, καὶ ἑπομένως ὀξεῖα, ἡ αὐτὴ ἄρα ἑκάτερον, ὅπερ ἀδύνατον· Οὐκ ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ Γωνίᾳ ζ ἄνισος ἐστίν· ἐπεὶ δὲ ἴσαι, τὰ αβγ, ζιλ Τρίγωνα Ἰσογώνιά τε ἐστὶ καὶ ὅμοια. Ο. Ε. Δ.

Ταύτην δὴ τὴν Πρότασιν ὑπὸ Τακυετίου καλῶς παραλειφθεῖσαν, ἐπάναγκες εἶναι ἔγνω ἀποκατασῆσαι ὁ Οὐίζων, ὡς πάνυ οὖσαν πολύχρηστον.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἔστω ἡ Γωνία α = τῇ Γων. ζ, καὶ ἡ γ = λ.

Β'. Ἐὰν δύω Τρίγωνα Σ, Φ (ὅρα ἐν Σχόλ. τῆς Ε'. ἀνωτ.), μίαν μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ζ τῇ ν, τὰς δὲ περὶ τὰς ἄλλας Γωνίας ξ καὶ χ Πλευρὰς ἴσας, τάς τε λοιπὰς Γωνίας ι καὶ ψ, ἤτοι ἅμα ὀρθὰς, ἢ ἅμα ὀξείας, ἢ ἅμα ἀμβλείας, τὰ Τρίγωνα ἴσα ἔσται. Ὅμοια γὰρ ἐστι διὰ τὴν παρᾶσαν, καὶ τὸ Σχόλ. τῆς Ζ'. τοῦ Ε'., ἡ ἄρα χ = ξ (9), καὶ ἑπομένως (10) καὶ Τρίγωνον Τριγώνῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ (αβζ), ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας ἐπὶ τὴν „Βάσιν Κάθετος ἀχθῇ (βγ), τὰ πρὸς τῇ Καθέτῳ Τρίγωνα, ὅμοια ἐστὶ τῷ „τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

κ. 343. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων αβζ καὶ Λ, ἡ μὲν κατὰ τὸ ζ Γωνία κοινή, αἱ δὲ ὑπὸ αβζ καὶ χ ἐξ ὑποθέσ. ὀρθαὶ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ α καὶ ξ (11)

(1) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (2) Δ. τοῦ ς'. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (4) Δ. τοῦ ς'. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Θ. καὶ ΙΑ. τοῦ ε'. (7) Πόρ. ΙΑ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'. (8) ΜΓ. τοῦ [illegible]. (9) Ὁμ. Δ. τοῦ ς'. (10) Δ. τοῦ α'. (11) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ [illegible].

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ Τρίγωνα αβζ καὶ Ρ ὅμοια εἶναι, ἥτε Γωνίαι ἴση τῇ ζ. Κἀντεῦθεν δῆλον ἔσται, ὅτι καὶ τὰ Ρ καὶ Λ ἀλλήλοις ὅμοια, αἱ γὰρ Γωνίαι ι καὶ ζ, α καὶ ξ, υ καὶ χ ἴσαι ἀλλήλαις. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Η βγ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αγ, γζ. Α'.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐπὶ τῶν Τριγώνων Ρ καὶ Λ, ἴσαι εἰσὶν αἱ Γωνίαι ι καὶ ζ, ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς αγ, ἡ δὲ τῆς γβ, ἴσαι δὲ καὶ α καὶ ξ, ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς γβ, ἡ δὲ τῆς γζ, φανερὸν (1) ὅτι αγ : γβ :: γβ : γζ.

Η βζ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αζ, γζ· ἡ δὲ αβ μέση τῶν ζα καὶ γα. Β'.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβζ καὶ Λ, ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ αβζ, καὶ ἡ κατὰ τὸ χ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ βζ· ἴσαι δὲ καὶ α καὶ ξ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ βζ, τὴν δὲ ἡ γζ· ὥστε (2) αζ : βζ :: βζ : γζ.

Παραπλησίως, ἐπεὶ ἐν τοῖς Τριγώνοις αβζ καὶ Ρ, ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ αβζ καὶ υ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ αβ, ἴσαι δὲ καὶ αἱ κατὰ τὸ ζ καὶ ι, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αβ, τὴν δὲ ἡ αγ, ἔσται πάλιν αζ : αβ :: αβ : αγ.

Ἐπὶ τῶν τριῶν τετωνὶ Τριγώνων αβζ, καὶ Ρ, καὶ Λ, αἱ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνουσαι ἀνάλογον (3) εἰσίν. Ὅθεν ἐὰν τοῦ Α'. λόγου οἱ ὅροι ἀπὸ τοῦ Τριγώνου αβζ, οἱ δὲ τοῦ Β'. ἀπὸ τοῦ Ρ, οἱ δὲ τοῦ Γ'. ἀπὸ τοῦ Λ ληφθῶσιν, ἔσται αβ : βζ :: αγ : γβ :: βγ : γζ· καὶ πάλιν βα : αζ :: γα : αβ :: γβ : βζ· καὶ τελευταῖον αζ : ζβ :: αβ : βγ :: βζ : ζγ. Τούτῳ γὰρ τῷ τρόπῳ ἀναλογιζομένοις, οἱ ὁμόλογοι τῶν ὅρων ταῖς ἴσαις τῶν Γωνιῶν πανταχῇ ὑποκείσονται. Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (ζι : ιλ) τεμεῖν.

Ἀχθήτω ἄπειρος ἡ αψ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθήτωσαν απ, πρ ἴσαι ταῖς ζι, ιλ· ἀπὸ δὲ τοῦ ρ ἐπεζεύχθω ἡ ρβ, καὶ πρὸς αὐτὴν διὰ τοῦ π ἤχθω Παράλληλος ἡ πγ. Φημὶ δὴ ὡς οὕτως ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν· δῆλον δὲ ἐκ τῆς Β'. Προτάσ. τοῦ ς'. Βιβλίου. σ. 344.

(1) Δ. τοῦ ς'. (2) Δ. τοῦ ς'. (3) Δ. τοῦ ς'.