Πρότασις ιη'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, καὶ ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἀχθῇ ἡμιδιάμετρος, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

Ἔςω AB ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΓΔΕ, καὶ K τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.. ἄγω τὴν ΚΓ, καὶ λέγω ὅτι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB. σχ. 108.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι, ἔςω μία ἄλλη, ὡς ἡ ΚΖ. Τότε εἰς τὸ τρίγωνον ΚΓΖ οὔσης τῆς γων. $ΚΖΓ = 90°$, ἡ γων. $ΚΓΖ < 90°$ καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ $ΚΓ > ΚΖ$ (πρ. ιθ'. βιβ. α'.).. ἀλλ' ἡ $ΚΓ = ΚΔ$, καθὸ ἡμιδιάμετροι, ὅθεν καὶ ἡ $ΚΔ > ΚΖ$.. ὅ ἐςι τὸ μέρος μεῖζον τοῦ ὅλου, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὥςε ἡ ΚΓ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ἐφαπτομένην AB, καὶ οὐδεμία ἄλλη. Ὥςε...

Πρότασις ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ἐφαπτομένην εὐθεῖά τις, ἐπ' αὐτῆς θέλει κεῖται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἔςω AB ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΓΔΕ, κατὰ τὸ Γ σημεῖον, τότε λέγω ὅτι ἂν ἀχθῇ ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν AB, ἐπ' αὐτῆς θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. σχ. 109.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι, ἔςω ἔξωθεν αὐτῆς, ὡς τὸ σημεῖον Ζ. Τότε ζευγνύων αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς Γ διὰ τῆς εὐθείας ΖΓ, ἔξω γων. $ΖΓΒ = 90°$ (πρ. ιη'.). ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ γων. $ΚΓΒ = 90°$, διὰ τοῦτο ἡ γων. $ΖΓΒ =$ γων. $ΚΓΒ$ (ἀξ. α'.): ὅ ἐςι τὸ μέρος ἴσον μὲ τὸ ὅλον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.. ὥςε τὸ σημεῖον Ζ δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀλλ' οὔτε ἄλλο οὐδὲν ἔξωθεν τῆς ΓΔ, ὅπερ ἐπρόκειτο. Ὥςε...

Πρότασις κ΄.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία εἶναι διπλασία τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἂν ἀμφότεραι ἔχωσι διὰ βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.

Ἔςω Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΠΑΒΔ, τότε λέγω ὅτι ἡ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΠΒ. σχ. 110.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Π ἄγω διὰ τοῦ κέντρου Κ τὴν ΠΓ.

α΄. Τοῦ τριγώνου ΚΠΑ ὄντος ἰσοσκελοῦς ἡ γων. ΚΑΠ = γων. ΚΠΑ.. ἀλλ' ἡ γων. ΓΚΑ = γων. ΚΑΠ + γων. ΚΠΑ (πρ. λβ΄. βιβ. α΄.) .. ὥςε ἡ γων. ΓΚΑ = 2 γων. ΚΠΑ .. διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γων. ΓΚΒ = 2 γων. ΚΠΒ. Ὥςε ὅλη ὁμοῦ ἡ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΠΒ, αἵτινες δηλονότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν: τὸ τόξον ΑγΒ, ἢ τὴν χορδὴν ΑΒ.

β΄. Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΔΒ. Καθότι ὄντος τοῦ τριγώνου ΚΔΒ ἰσοσκελοῦς, ἡ γων. ΚΔΒ = γων. ΚΒΔ, ἀλλ' ἡ γων. ΑΚΒ = γων. ΚΔΒ + γων. ΚΒΔ (πρ. λβ΄. βιβ. α΄.) .. ὥςε ἡ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΔΒ.

γ΄. Ἔτι ἡ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΕΒ. Καθότι ἄγων τὴν διάμετρον ΕΖ, ἔξω γων. ΖΚΒ = γων. ΚΕΒ + γων. ΚΒΕ = 2 γων. ΚΕΒ, ὡς ὄντος ἰσοσκελοῦς τοῦ τριγ. ΚΕΒ.. ἀλλὰ δέδεικται (α΄. μέρει) ἡ γων. ΖΚΑ = 2 γων. ΖΕΑ, ὥςε μένει καὶ ἡ λοιπὴ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΕΒ. Ὥςε...

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὥστε αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ τὴν αὐτὴν χορδὴν ἔχουσαι διὰ βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἡ γων. ΑΠΒ = γων. ΑΔΒ = γων. ΑΕΒ, ὡς οὖσαι ὑποδιπλάσιαι τῆς γων. ΑΚΒ.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ἔχουσι διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξον, ὑφ' οὗ ὑποτείνονται. Οὕτως ἡ γων. ΑΠΒ, ἥτις ὑποτείνεται ὑπὸ τοῦ τόξου ΑγΒ, ὅπερ δηλ. εἶναι μέτρον τῆς γων. ΑΚΒ, ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον Αγ = τοξ. $\frac{\text{Α}\gamma\text{Β}}{2}$.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Εἰ δὲ καὶ ἡ γωνία κεῖται μεταξὺ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς περιφερείας, τότε ἔχει διὰ μέτρον ὑπὲρ τοῦ ἡμίσεως τόξου.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κα'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι: τῷ ΒΕΔΠΑ, ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΠΒ, ΑΔΒ, ΑΕΒ, λέγω ὅτι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. 110. σχ.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ αὗται αἱ γωνίαι ἔχουσι διὰ βάσιν τὴν αὐτὴν χορδὴν: τὴν ΑΒ, τούτου ἕνεκεν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (πορ. α'. πρ. κ'). Ὥστε...

Π ρ ό τ α σ ι ς. κβ'.

Τῶν ἐν κύκλῳ τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς.

Ἔςω ἐν κύκλῳ τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ, τότε λέγω ὅτι γων. ΓΑΒ + γων. ΒΔΓ = 180°. σχ. 111.

Ἄγω τὰς διαγωνίους ΑΔ, ΒΓ.

Αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ = 180° (πρ. λβ'. βιβ. α'.).. ἀλλ' ἡ μὲν γων. α = γων. δ, ὡς ἐφιςάμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς τῆς ΑΒ, ἡ δὲ γων. β = γων. γ, ὡς ἐφιςάμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς τῆς ΑΓ (πόρ. α' πρ. κ'.).. ὥςε ἡ γων. ΓΑΒ + ΒΔΓ = 180°.

Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ γων. ΑΒΔ + γων. ΔΓΑ = 180°. Ὥςε...

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε ἂν ἐπεκταθῇ ἡ μία πλευρὰ τοῦ τετραπλεύρου, ἡ ἐκτὸς γωνία θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ὡς οὔσης τῆς ἐκτὸς μετὰ τῆς ἐντὸς = 180° (πρ. ιγ'. βιβ. α').

Π ρ ό τ α σ ι ς. κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα ἀδυνατοῦσι νὰ συςηθῶσιν.

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατὸν, ἔςωσαν ὅμοια τὰ ἄνισα τμήματα κύκλων ΑΓΒ, ΑγΒ ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς τῆς ΑΒ, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος Γ. σχ. 112.

Συνίςημι τυχοῦσαν γων. ΑΓΒ ἐν τῷ ΑΓΒ τμήματι.. ἄγω τὴν Βγ εὐθεῖαν.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ τμήματα τῶν κύκλων ΑΓΒ, ΑγΒ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ἡ γων. ΑΓΒ = γων. ΑγΒ (ὅρ. ι').. ἀλλ' ἡ γων. ΑγΒ > γων. ΑΓΒ (πρ. ιϛ'. βιϐ. α').. ὥςε αἱ αὐταὶ γωνίαι εἶναι καὶ ἴσαι ἀλλήλαις καὶ ἄνισοι, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Ὥςε...

Πρότασις κδ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων χορδῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Ἔςω ἡ χορδὴ ΑΒ = ΓΔ, καὶ τὰ κυκλικὰ τμήματα ΑΕΒ, ΓΖΔ ὅμοια, τότε λέγω ὅτι τμ. ΑΕΒ = τμ. ΓΖΔ. σχ. 113.

Εἰδὲ καὶ εἶναι, ἔςωσαν ἄνισα.

Τότε ἐφαρμόζοντός μου τὸ τμῆμα ΓΖΔ ἐπὶ τὸ ΑΕΒ, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ = ΓΔ, ἐξ ὑποθέσεως, διὰ τοῦτο ἐφαρμοσθέντος τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ Α σημεῖον, ἔχει νὰ ἐφαρμωσθῇ καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ τὸ Β σημεῖον, καὶ οὕτως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ συςαθήσονται δύο τμήματα κύκλων: τὰ ΑΕΒ, ΑΖΒ, ὅμοια καὶ ἄνισα, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον (πρ. κγ').. ὅθεν τμ. ΑΕΒ = τμ. ΑΖΒ. Ὥςε...

Πρότασις κε'.

Κύκλου τμήματος δοθέντος νὰ ἐκπληρώσῃ τις τὸν κύκλον, οὗτινος εἶναι τμῆμα.

Ἔςω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου. σχ. 114.

Τέμνω δίχα τὴν χορδὴν ΑΒ κατὰ τὸ Δ σημεῖον.. καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄγω πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΒ τὴν ΔΕ (πρ. ια' βιϐ. α').. ἄγω τυχοῦσαν χορδὴν τὴν ΑΓ.. τέμνω αὐτὴν δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄγω πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΓ τὴν ΖΗ.

Τώρα ἐπειδὴ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΖΗ τέμνουσι καὶ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τὰς χορδὰς ΑΒ, ΑΓ, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου (πρ. γ'), καὶ ἐπειδὴ αὗται ἔχουσι κοινὸν σημεῖον οὐδὲν ἄλλο, ἢ τὸ Κ.. ὅθεν τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου. Ὥςε ἂν κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΑ γράψω κύκλον τὸν ΑΕΒΓ, οὗτος θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος κύκλος.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κϛ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι, καὶ πρὸς τοῖς κέντροις καὶ πρὸς ταῖς περιφερείαις, ἐφίςανται ἐπὶ ἴσων τόξων καὶ χορδῶν.

Ἔςω ὁ κύκλ. ΠΑΒ = κύκ. παβ, καὶ ἡ γων. ΑΚΒ = γων. ακβ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΑΠΒ = γων. απβ.. τότε λέγω ὅτι τόξ. ΑΓΒ = τόξ. αγβ. σχ. 115.

Ἄγω τὰς χορδὰς ΑΒ, αβ.

α'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γων. ΑΚΒ = γων. ακβ, καὶ ἡ ΑΚ = ακ = ΚΒ = κβ, καθὸ ἡμιδιάμετροι ἴσων κύκλων, διὰ τοῦτο καὶ ἡ βάσις ΑΒ = αβ (πρ. δ'. βιб. α').

β'. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΒ = αβ, καὶ ἡ γων. ΑΠΒ = γων. απβ, ἐξ ὑποθέσεως, διὰ τοῦτο τμῆμα ΑΠΒ = τμημ. απβ. (πρ. κδ.). Ἀλλ' οἱ κύκλοι ΠΑΒ, παβ εἶναι ἴσοι, ὥςε τμῆμ. ΑΓΒ = τμήμ. αγβ. (ἀξ. ζ').. ὅθεν καὶ τοξ· ΑΓΒ = τοξ. αγб. ὥςε...

Π ρ ό τ α σ ι ς. κζ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι καὶ πρὸς τοῖς κέντροις καὶ πρὸς ταῖς περιφερείαις, αἱ ἐφιςάμεναι ἐπὶ ἴσων τόξων ἢ χορδῶν, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Καθότι ἂν ὁ κύκλος ΠΑΒ = κύκλ. παβ (σχ.

τὸ αὐτὸ), καὶ ἂν πλευρ. ΑΒ = πλευρ. αβ. τότε οὐσῶν καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ἴσων ἀλλήλαις, θέλει εἶναι καὶ ἡ γων ΑΚΒ = γων. ακβ. (πρ. η'. βιβ. α'), Καὶ ἐπομένως καὶ ἡ γων. ΑΠΒ = γων απβ (πρ. κ'). Ὥςε...

Πρότασις. κη'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι χορδαὶ ἀφαιροῦσιν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεῖζον τῷ μείζονι, τὸ δ' ἔλασσον τῷ ἐλάσσονι.

Ἔςω ὁ μὲν κύκλος ΠΑΒ = κυκλ. παβ, ἡ δ' ΑΒ = αβ (σχ. τὸ αὐτὸ), τότε λέγω ὅτι τὸ μὲν τοξ. ΒΠΑ = τοξ. βπα, τὸ δὲ τοξ. ΑΓΒ = τοξ. αγβ.

Καθότι ἂν χορ. ΑΒ = χορ. αβ, τότε καὶ τμημ. ΒΠΑ = τμημ. βπα (πρ. κζ'.), ὡς περιεχουσῶν ἴσας γωνίας, καὶ ἐπομένως καὶ τοξ. ΒΠΑ = τοξ. βπα, καὶ τοξ. ΑΓΒ = τοξ. αγβ. (ἀξ. ζ'.). Ὥςε...

Πόρισμα.

Ὥςε ἐν τῷ αὐτῷ, ἢ ἴσοις κύκλοις, αἱ μὴ ἴσαι χορδαὶ μὴ ἴσα τόξα ἀφαιροῦσι.

Πρότασις. κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσας γωνίας.

Καθότι ἂν ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐφιςῶνται ἐπ' ἴσων βάσεων (πρ. κς'), ἑπόμενον εἶναι καὶ αἱ ἴσαι χορδαὶ νὰ ὑποτείνωσιν ἴσας γωνίας: πρός τε τοῖς κέντροις δηλονότι καὶ πρὸς ταῖς περιφερείαις.

Πόρισμα.

Ὥςε ἐν τῷ αὐτῷ, ἢ ἴσοις κύκλοις, αἱ μὴ ἴσαι χορδαὶ μὴ ἴσας γωνίας ὑποτείνουσι.

Πρότασις. λ'.

Τὸ δοθὲν τόξον νὰ διχοτομήσῃ τις.

Ἔςω ΑΓΒ τὸ δοθὲν τόξον. σχ. 116.

Ζευγνύω τὰ πέρατα τοῦ τόξου διὰ τῆς ΑΒ χορδῆς.. τέμνω δίχα τὴν χορδὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Δ (πρ. ί. βιβ. α'.).. ἄγω πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΒ τὴν ΔΓ (πρ. ιά.).. ἄγω καὶ τὰς ΓΑ, ΓΒ χορδάς.

Εἰς τὰ τριγ. ΑΓΔ, ΒΓΔ, ἡ μὲν ΑΔ = ΔΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΓΔ κοινὴ, ἡ δὲ γων. ΑΔΓ = γων. ΒΔΓ, καθὸ ὀρθαὶ, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΑΓ = ΒΓ (πρ. δ'. βιβ. α'.).. ἀλλ' αἱ ἴσαι χορδαὶ μὲν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἀφαιροῦσι τόξα ἴσα (πρ. κη'.). Ὥςε τοξ. ΑΓ = τοξ. ΒΓ: ὅ ἐςι τὸ τόξον ΑΓΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις. λα'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία εἶναι ὀρθὴ (α), ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι, ὀξεῖα, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάσσονι, ἀμβλεῖα.. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος ὀξεῖα.

Ἔςω ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΕΔ, καὶ Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ, τότε λέγω ὅτι ἡ μὲν γων. ΒΓΑ = 90°, ἡ δὲ γων. ΒΑΓ < 90°, ἡ δὲ γων. ΒΔΓ > 90°.. καὶ ἔτι ἡ γων. ΒΓγΑ > 90°, ἡ δὲ γων. ΒΓδΔ < 90°. σχ. 117.

(α) Θαλῆς ὑπῆρξεν ὁ ἐφευρετὴς τοῦ, ὅτι πᾶν τρίγωνον ἐν κύκλῳ ἔχον βάσιν τὴν διάμετρον, εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ διετέθη τοσοῦτον, ὥςε προσέφερε θυσίαν τοῖς θεοῖς. Διογεν. εἰς τοῦ Θαλ.

Ἄγω διὰ τοῦ κέντρου Κ τὴν ΓΕ.

α΄. Ἡ γων. ΒΚΕ + γων. ΒΚΓ = 180° (πρ. ιγ΄. βιβ. α΄.).. ἀλλ' ἡ μὲν γων. ΒΚΕ = 2 γων. ΚΓΒ, ἡ δὲ γων. ΒΚΓ = 2 γων. ΚΓΑ (πρ. λβ΄. βιβ. α΄.), ὡς ὄντων δηλονότι ἰσοσκελῶν τῶν τριγώνων ΚΓΒ, ΚΓΑ.. ὥςε ὅλη ἡ γων. ΒΓΑ = 90°, ἥτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ΑΓΔΒ.

β΄. Εἰς τὸ τριγ. ΒΓΑ λοιπὸν οὔσης τῆς γων. ΒΓΑ = 90°, μένει ἡ γων. ΓΑΒ < 90° (πόρ. ε΄. προ. λβ΄. βιβ. α΄.), ἥτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΒΓΑΕΒ.

γ΄. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ ἡ γων. ΓΑΒ + γων. ΒΔΓ = 180° (πρ. κβ΄.).. ἀλλὰ δέδεικται ἡ γων. ΓΑΒ < 90°.. ὥςε ἡ λοιπή: τουτέςιν ἡ γων. ΒΔΓ > 90°, ἥτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι: τῷ ΒΓΔΒ.

δ΄. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γων. ΒΓΑ = 90°, ὡς δέδεικται (α΄.), διὰ τοῦτο ἡ γων. ΒΓγΑ > 90°, ἥτις δηλονότι εἶναι γωνία τοῦ μείζονος τμήματος τοῦ: ΒΓΑΕΒ.

ε΄. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ ἡ γων. ΒΓγΑ > 90°, διὰ τοῦτο ἡ ἐφεξῆς γων. ΒΓδΔ < 90°, ἥτις δηλονότι εἶναι γωνία τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τοῦ ΒΓΔΒ.

Π ό ρ ι σ μ α. α΄.

Ὥςε ἐν κύκλῳ ἡ διάμετρος ὑποτείνει ὀρθὴν γωνίαν πάντοτε.

Π ό ρ ι σ μ α. β΄.

Ἂν εἰς τρίγωνον ληφθῇ ὡς διάμετρος ἡ ὑποτείνουσα, καὶ περὶ αὐτὴν περιγραφῇ κύκλος, ἡ περιφέρεια θέλει διέλθει διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας; ὅ ἐςι θέλει διέλθει διὰ τῆς κορυφῆς τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Οὕτως ἄντος ὀρθογωνίου τοῦ τριγώνου ΒΓΑ, ἂν λάβω διὰ διάμετρον τὴν ΑΒ, εἴτε δὲ ἡμιδιάμετρον τὴν ΚΑ, καὶ γράψω κύκλον, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θέλει διέλθει διὰ τοῦ Γ σημείου; ὅ ἐςι διὰ τῶν σημείων Β, Γ, Α.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Εὐκόλως ἤθελεν ἄξοι τις κάθετον ἐπί τινος εὐθείας, ἀπό τινος σημείου ἔξωθεν αὐτῆς, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Καθότι ἂν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα γένη χορδὴ κύκλου, ὡς ἡ ΑΓ.. καὶ ἀφ' ἑνὸς αὐτῆς πέρατος, ὡς τοῦ Α, ἀχθῇ διάμετρος, ὡς ΑΒ, ἡ ΓΒ εὐθεῖα θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΓ. Καὶ ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἡ ΒΓ, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Εὐκόλως ἤθελεν ἄξοι τις ἐφαπτομένην εἰς κύκλον ἀπό τινος ἔξωθεν δοθέντος σημείου. Καθότι ἔσω Α τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ ΒΕΖ ὁ δοθεὶς κύκλος (σχ. 122.). Τότε ζευγνύω τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Κ διὰ τῆς ΑΚ εὐθείας.. εἶτα ὡς διαμέτρου τῆς ΑΚ, γράφω κύκλον, ὅςτις θέλει διέλθει διὰ τῶν σημείων Α, Γ, Κ (πορ. β'.).. ἄγω τὴν ΑΓ, ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Καθότι ἂν ἄξω τὴν χορδὴν ΚΓ, ἡ γων. ΑΓΚ = 90°, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΓ ἐφαπτομένη (πορ. ιϛ'.).

Π ρ ό τ α σ ι ς. λβ'.

Ἐν κύκλῳ ἂν ἀπὸ τῆς ἀφῆς τῆς ἐφαπτομένης ἀχθῇ χορδὴ, αἱ γωνίαι, ἅς περ ποιήσει μὲ τὴν ἐφαπτομένην, θέλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τὰς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου.

Ἔςω ΔΑΓ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΕ, καὶ ἀχθήτω ἡ χορδὴ ΑΒ, τότε λέγω ὅτι ἡ μὲν γων. ΔΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐν τῷ τμήματι ΒΕΑ, ἡ δὲ γων. ΓΑΒ ἴση μὲ τὴν ἐν τῷ τμήματι ΒΖΑ. σχ. 118.

Ἄγω τὴν ΑΕ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΔΓ, καὶ τυχοῦσαν χορδὴν τὴν ΑΖ.. ζευγνύω τὰ σημεῖα Ε, Β, Ζ διὰ τῶν ΕΒ, ΒΖ χορδῶν.

α΄. Αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΕ $=$ 180°.. ἀλλ' ἡ γων. ΑΒΕ $=$ 90° (πρ. λα΄.).. ὅθεν ἡ γων. ΒΕΑ $+$ γων. ΒΑΕ $=$ 90°.. ἀλλ' αἱ γων. ΔΑΒ $+$ γων. ΒΑΕ $=$ 90°, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. ὥςε ἡ γων. ΔΑΒ $+$ γων. ΒΑΕ $=$ γων. ΒΕΑ $+$ γων. ΒΑΕ.. καὶ ἀφαιρεθείσης κοινῶς τῆς γων. ΒΑΕ, μένει γων. ΔΑΒ $=$ γων. ΒΕΑ, ἥτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι: τῷ ΒΕΑ.

β΄. Αἱ γων. ΒΕΑ $+$ γων. ΒΖΑ $=$ 180° (πρ. κγ΄.).. ὡσαύτως καὶ αἱ γων. ΓΑΒ $+$ γων. ΔΑΒ $=$ 180° (πρ. ιγ΄. βιϐ. α΄.).. ὥςε ἂν ἐκ τῶν ἴσων ἀφέλω ἴσα, εἴτε τὴν γων. ΔΑΒ $=$ γων. ΒΕΑ, θέλει μοὶ μένοι γων. ΓΑΒ $=$ γων. ΒΖΑ, ἥτις εἶναι ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι: τῷ ΒΖΑ.

Ἂν ὅμως ἡ εἰρημένη χορδὴ ἦν πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ, τότε τὸ πρᾶγμα ἤθελεν εἶναι σαφὲς οἴκοθεν (πρ. λα΄.). Ὥςε....

Πρότασις. λγ΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ γράψῃ τις τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ Γ ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία. σχ. 119.

Πρὸς τῷ σημείῳ Α τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, συνίςημι γων. ΔΑΒ = γων. Γ (ὑποτιθεμένης ὀξείας δηλονότι τῆς γωνίας Γ, εἰδὲ καὶ ἦν ἀμβλεῖα, ἐκτείνουν αὐτὴν = γων, ΕΑΒ).. ἄγω τὴν ΑΖ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΔΕ, ἐφ' ἧς θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ γραφησομένου κύκλου (πρ. ιθ'.).. ἐκτελῶ τὴν γων. ΑΒΚ = γων. ΚΑΒ, καὶ διὰ τοῦτο ἔξω ΒΚ = ΑΚ (πρ. ς'. βιϐ. α'.).. εἶτα ἂν κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΑ γράψω κύκλον τὸν ΑΒΖΗ, τὸ τμῆμα ΒΖΗΑ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, ἔνθα ἄγω τὴν χορδὴν ΒΖ.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. ΒΖΑ = γων. ΔΑΒ (πρ. λϐ'.).. καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γων. ΔΑΒ = γων. Γ, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΒΖΑ = γων. Γ. Ὥςε τὸ τμῆμα ΒΖΗΑ τοῦ κύκλου ἐγράφη καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, καὶ περιέχει καὶ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γων. Γ, ὅπερ ἐζητεῖτο..

Ἂν ὅμως καὶ ἡ δοθεῖσα γωνία ἦν ἀμϐλεῖα, τότε ἐκτελουμένης αὐτῆς ἴσης γων. ΕΑΒ, τὸ ζητούμενον τμῆμα ἤθελεν εἶναι τὸ ΑβΒ.

Εἰ δὲ τέλος πάντων καὶ ἡ δοθεῖσα γωνία ἦν ὀρθὴ, τότε ἤθελον ἐκτελέσοι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν διάμετρον, καὶ ἐπ' αὐτὴν γράφων ἡμικύκλιον νὰ σχῶ τὸ ζητούμενον τμῆμα (πρ. λα'.).

Πρότασις. λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου νὰ ἀφέλῃ τις τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον.

Ἔςω ΑΒΖΗ ὁ δοθεὶς κύκλος, καὶ Γ ἡ δοθεῖσα γωνία. σχ. 119.

Ἄγω τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ.. ἐκτελῶ τὴν γων. ΔΑΒ = γων. Γ.. καὶ λέγω ὅτι τὸ τμῆμα ΒΖΗΑ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι· ἐπειδὴ ἡ γων. ΒΖΑ = γων. ΔΑΒ (πρ. λβ'.) καὶ ἡ γων. ΔΑΒ = γων. Γ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ τοῦτο καὶ γων. ΒΖΑ = γων. Γ. Ὥςε τὸ τμῆμα ΒΖΗΑ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρότασις. λε'.

Ἐν κύκλῳ ἐὰν δύο χορδαὶ τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ἐκ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν τῆς ἑτέρας.

Αἱ χορδαὶ ΑΒ, αβ ἄς τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ σημεῖον Γ, τότε λέγω ὅτι $ΑΓ \times ΓΒ = αΓ \times Γβ$. σχ. 120.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ κατάγω καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΒ, αβ τὰς ΚΔ, Κδ, αἵτινες θέλουσι τάμωσι δίχα αὐτὰς κατὰ τὰ σημεῖα Δ, δ (πρ. γ'.).. ἄγω τὰς εὐθείας ΚΓ, Κα, ΚΒ.

Τὸ ὀρθογ. $ΑΓ \times ΓΒ + ΔΓ^2 = ΔΒ^2$ (πρ. ε'. βιβ. β.).. προςίθημι κοινῶς τὸ $ΚΔ^2$, καὶ ἔχω ὀρθογ. $ΑΓ \times ΓΒ + ΔΓ^2 + ΚΔ^2 = ΔΒ^2 + ΚΔ^2 = ΚΒ^2$ (πρ. μζ'. βιβ. α'.) : ὅ ἐςιν ἴσα μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου.

Διὰ τοὺς ὁμοίους λόγους καὶ τὸ ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + K\delta^2 = \alpha\delta^2 + K\delta^2 = K\alpha^2$ · ὃ ἐστὶν ἴσα μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθογ. $A\Gamma \times \Gamma B + \Delta\Gamma^2\ K\Delta^2 =$ ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + K\delta^2$: ὃ ἐστὶν ὀρθογ. $A\Gamma \times \Gamma B =$ ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta$, ὡς ὄντος $K\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = K\delta^2 + \delta\Gamma^2 = K\Gamma^2$ (πρ. μζ΄. βιβ. α΄).

Εἰ δὲ καὶ αἱ δοθεῖσαι χορδαὶ ἦσαν καὶ διάμετροι, τότε τὸ πρᾶγμα ἤθελεν εἶναι σαφὲς ἐξ ἑαυτοῦ.

Ἂν ὅμως ἡ μία ἦν διάμετρος, καὶ ἡ ἑτέρα μὴ, τότε ἡ διάμετρος ἢ ἤθελε τέμνει τὴν χορδὴν δίχα, ἢ μή.

Ἂς τέμνῃ λοιπὸν δίχα κατὰ τὸ Ε τὴν ΓΔ. σχ. 92.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εὐθεῖα τέτμηται εἰς ἴσα κατὰ τὸ Κ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε, διὰ τοῦτο ὀρθογ. $AE \times EB + KE^2 = KB^2$ (πρ. ε΄. βιβ. β΄.) $= K\Delta^2$.. ἀλλὰ $K\Delta^2 = E\Delta^2 + KE^2$ (πρ. μζ΄. βιβ. α΄.).. ὥστε ὀρθογ. $AE \times EB + KE^2 = E\Delta^2 + KE^2$.. καὶ τοῦ KE^2 κοινῶς ἀφαιρεθέντος, μένει ὀρθογ. $AE \times EB = E\Delta^2 = E\Delta \times \Gamma E$, τμηθείσης δίχα δηλονότι τῆς ΓΔ.

Ἔστω τέλος πάντων ἡ χορδὴ αβ εἰς ἄνισα τετμημένη ὑπὸ τῆς διαμέτρου κατὰ τὸ Γ σχ. 121.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἄγω τὴν Κδ κάθετον ἐπὶ τὴν αβ, ἥτις καὶ δίχα τάμει αὐτὴν (πρ. γ΄).. ὅθεν ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 = \delta\beta^2$ (πρ. ε΄. βιβ. β΄.).. προςίθημι κοινῶς τὰ $K\delta^2$, καὶ ἔχω ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + K\delta^2 = \delta\beta^2 + K\delta^2 = K\beta^2$ (πρ. μζ΄. βιβ. α΄.) $= KB^2$..

ἀλλὰ $KB^2 =$ ὀρθογ. $A\Gamma \times \Gamma B + K\Gamma^2$ (πρ. ε΄. βιβ. β΄.).. ὥστε ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + K\delta^2 =$ ὀρθογ. $A\Gamma \times \Gamma B + K\Gamma^2$: ὅ ἐστιν ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta =$ ὀρθογ. $A\Gamma \times \Gamma B$, ὡς ὄντος δηλονότι $\delta\Gamma^2 + K\delta^2 = K\Gamma^2$ (πρ. μζ΄.). Ὥστε . . .

Πόρισμα.

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καθέτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων. Καθότι ἐπειδὴ $\Gamma E \times E\Delta = AE \times EB$, (σχ. 92.).. καὶ ἐπειδὴ $\Gamma E = E\Delta$ (πρ. γ΄), διὰ τοῦτο $\Gamma E^2 = AE \times EB$.

Πρότασις λς΄.

Ἐὰν ἀπότινος σημείου, ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἀχθῇ διατέμνουσα καὶ ἐφαπτομένη εἰς αὐτὸν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς διατεμνούσης καὶ τῆς προσφιλούσης θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης.

Ἔστω Δ τὸ δοθὲν σημεῖον ἔξω τοῦ κύκλου, AB ἡ διατέμνουσα, καὶ $A\Gamma$ ἡ ἐφαπτομένη, τότε λέγω ὅτι ὀρθογ. $AB \times A\Delta = A\Gamma^2$. σχ. 122.

Ἄγω διὰ τοῦ κέντρου τὴν διατέμνουσαν AE, τὰς ἡμιδιαμέτρους $K\Gamma$, $K\Delta$, καὶ τὴν $K\Theta$ κάθετον ἐπὶ τὴν AB, ἥτις διχοτομεῖ αὐτὴν κατὰ τὸ Θ σημεῖον. (πρ. γ΄).

Καὶ διὰ τοῦτο $A\Theta^2 =$ ὀρθογ. $AB \times A\Delta + \Theta\Delta^2$ (πρ. ς΄. βιβ. β΄.).. προςίθημι κοινῶς τὸ $K\Theta^2$, καὶ ἔχω $A\Theta^2 + K\Theta^2 =$ ὀρθογ. $AB \times A\Delta + \Theta\Delta^2 + K\Theta^2$.. ἀλλὰ $\Theta\Delta^2 + K\Theta^2 = K\Delta^2$, καὶ $A\Theta^2 + K\Theta^2 = AK^2$, διὰ τοῦτο $AK^2 =$ ὀρθογ. $AB \times A\Delta + K\Delta^2 =$ ὀρθογ. $AB \times A\Delta + K\Gamma^2$.. ἀλλὰ τὸ $AK^2 = A\Gamma^2 +$

$K\Gamma^2$ (πρ. ιη').. ὥςε ὀρθογ. $A\Gamma \times A\Delta + K\Gamma^2 = A\Gamma^2 + K\Gamma^2$, εἴτε κοινῶς ἀφαιρεθέντος τοῦ $K\Gamma^2$, ὀρθογ. $AB \times A\Delta = A\Gamma^2$. Ὥςε...

Πόρισμα. α'.

Ὥςε τὰ ὀρθογώνια τὰ ἐκ τῶν διατεμνουσῶν καὶ τῶν προσφιλουσῶν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις. Οὕτως ὀρθογ. $AB \times A\Delta =$ ὀρθογ. $AE \times AZ$, ὡς ὄντος ἑκατέρου $= A\Gamma^2$.

Πόρισμα. β'.

Ἂν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι, αὗται θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἂν ἄξω ἐφαπτομένην καὶ τὴν Αγ, αὕτη θέλει εἶναι $= A\Gamma$.. διότι τὸ τετράγωνον ἑκατέρας εἶναι ἴσον μὲ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον.

Πόρισμα. γ'.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐκτὸς σημείου τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι πλέον τῶν δύο ἐφαπτομένων.

Πόρισμα. δ'.

Αἱ γωνίαι αἱ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου διατεμνούσης εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις: τουτέςιν ἡ γων. $\Gamma AK =$ γων. γAK.

Πόρισμα. ε'.

Οὔσης ἐγνωσμένης τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς προσφιλούσης, ἤθελεν ἐγνωσθῆ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου. Καθότι ἂν ὀνομάσω χ τὴν διάμετρον, ἔξω $A\Gamma^2 = (\chi + AZ)\, AZ$, εἴτε $\chi = \dfrac{A\Gamma^2 - AZ^2}{AZ}$.

Πρότασις. λζ'.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου, ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἐκ δύο ἀχθεισῶν εἰς αὐτὸν εὐθειῶν, τῆς μιᾶς διατεμνούσης καὶ τῆς ἑτέρας προσψιλούσης, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς διατεμνούσης καὶ τοῦ προσψιλοῦντος αὐτῆς μέρους ἦναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς προσψιλούσης, ἡ προσψιλοῦσα θέλει εἶναι ἐφαπτομένη.

Ἔσω ὀρθογ. $AB \times A\Delta = A\Gamma^2$, τότε λέγω ὅτι ἡ $A\Gamma$ εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη. σχ. 122.

Ἄγω τὴν $A\gamma$ ἐφαπτομένην (πρ. ιζ.), καὶ ἔχω ὀρθογ. $AB \times A\Delta = A\gamma^2$ (πρ. λς'.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ὀρθογ. $AB \times A\Delta = A\Gamma^2$.. Ὥςε $A\gamma^2 = A\Gamma^2$, καὶ διὰ τοῦτο $A\gamma = A\Gamma$. Ὥςε ἐπειδὴ εἰς τὰ τρίγωνα $K\gamma A$, $K\Gamma A$ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ἑκάςη ἑκάςῃ, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $K\Gamma A =$ γων. $K\gamma A$ (πρ. η'. βιβ α').. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γων. $K\gamma A = 90°$.. διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $K\Gamma A = 90°$, ὅθεν ἡ $A\Gamma$ εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη (πρ. ις'). Ὥςε...

Πόρισμα.

Ὥςε εὐκόλως τις ἤθελεν ἄξοι ἐφαπτομένην εἰς ἕνα κύκλον ἀπό τινος ἔξωθεν σημείου δοθέντος. Καθότι ἂν ἄξῃ ἀπὸ τοῦ εἰρημένου σημείου μίαν τυχοῦσαν διατέμνουσαν, καὶ ἐκτελέσῃ τὸ ἐξ αὐτῆς καὶ τοῦ προσψιλοῦντος αὐτῆς μέρους ὀρθογώνιον, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει εἶναι ἡ ἐφαπτομένη: τουτέςιν $= \sqrt{AB \times A\Delta}$. Οὕτως ἂν $AB = 18$, καὶ $A\Delta = 2$, τότε $A\Gamma = \sqrt{36} = 6$.