ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Α΄.

Πρόβλημα. (α).

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας νὰ συςήσῃ τις τρίγωνον ἰσόπλευρον.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα. σχ. 25.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΒ γράφω κύκλον τὸν ΒΓΔ (αἰτ. γ΄.).. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαςήματι δὲ τῷ ΒΑ γράφω κύκλον τὸν ΑΕΓ.. ἔπειτα ἀπὸ

τοῦ παρόντος βιβλίου: τὴν «ἐὰν αἱ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ὦσιν ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι οὐδέποτε συμπεσοῦνται», πρέπει ὡσαύτως καὶ τοῦτο τὸ ἀξίωμα νὰ ἐξωσθῇ τῶν ἀξιωμάτων ὡς ὂν ἄντικρυς θεώρημα.

Ἐγὼ ὅμως λέγω, ὅτι ἂν τοῦτο τὸ ἀξίωμα ἐκτεθῇ δἰ ἄλλων λέξεων, ἴσως ἀποφύγοι ὁ Εὐκλείδης τὴν κατηγορίαν.. καὶ ὧδε πως. «Δύο εὐθεῖαι κείμεναι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἂν δὲν ἀπέχωσιν ἐξίσου καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν, αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι, καὶ διὰ τοῦτο θέλουσι συμπέσοι εἰς ἓν σημεῖον». Καὶ ἐπειδὴ οἱ γεωμέτραι ἐδέχθησαν τὸν ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων, ὧνπερ ἰδιότης εἶναι ἡ οὐδέποτε σύμπτωσις, εἴτε ἡ ἰσότης τῶν διαςάσεων, δίκαιον ἤθελεν ἦναι νὰ δεχθῶσι καὶ τὸ τούτου ἐναντίον: τὸ ὅτι μὴ παράλληλοι εἶναι ἐκεῖναι τῶν εὐθειῶν, ὧνπερ κειμένων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ διαςάσεις αὐτῶν δὲν εἶναι ἴσαι, ἀλλ' αἱ μὲν ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους μηκύνονται, ἐκ δὲ τοῦ ἑτέρου σμικρύνονται.. καὶ ἂν σμικρύνωνται, δῆλον ὅτι μηδενισθήσονται, καὶ διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι συμπεσοῦνται.

(α) Ἅπασαι αἱ προτάσεις εἶναι ἢ θεωρήματα, ἢ προβλήματα. Καὶ ὀνομάζεται μὲν θεώρημα ὅταν ἔχῃ μόνον ἀπόδειξιν, πρόβλημα δὲ, ὅταν καὶ ἀπόδειξιν καὶ πρᾶξιν.

Καὶ εἰς ἀμφότερα ὅμως, ὡς ἐκ μὲν τοῦ προβάλλοντος, θεωροῦνται δύο τινὰ: διδόμενον καὶ ζητούμενον, ὡς δὲ ἐκ τοῦ λύοντος, ἄλλα δύο; ἀπόδειξις καὶ συμπέρασμα, ἐνίοτε ὅμως καὶ κατασκευή.

τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ οἱ δύο κύκλοι διατέμνονται, ἄγω τὰς δύο εὐθείας ΓΑ, ΓΒ ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα (αἴτ. ά.), καὶ λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΓ = ΑΒ, καθὸ ἡμιδιάμετροι (ὅρ. ά.), καὶ ἡ ΒΓ = ΑΒ, καθὸ ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου ΑΕΓ, διὰ τοῦτο ΑΓ = ΒΓ (ἀξί. ά.): ὅ ἐστιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ νὰ θέσῃτις εὐθεῖαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν. Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ ΒΓ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. σχ. 26.

Ζευγνύω τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ σημεῖον Β, πέρας τῆς δοθείσης εὐθείας.. ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐκτελῶ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΔ (πρ. ά.).. ἐπεκτείνω τὰς δύο πλευρὰς ΔΑ, ΔΒ τοῦ τριγώνου ἀπροσδιορίστως (αἴτ. β'.).. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ γράφω κύκλον τὸν ΓΕΖ, ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΕ γράφω κύκλον τὸν ΗΕΘ, καὶ λέγω ὅτι ἡ ΑΘ εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Καθότι ἐπειδὴ ἡ ΔΘ = ΔΕ, καθὸ ἡμιδιάμετροι, καὶ τὰ τούτων μέρη ΔΑ = ΔΒ, καθὸ πλευραὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΑΘ = ΒΕ (ἀξ. ζ'.). Ἀλλ' ἡ ΒΕ = ΒΓ, καθὸ ἡμιδιάμετροι, ὅθεν καὶ ἡ ΑΘ = ΒΓ. Ὥστε ἡ ΑΘ εὐθεῖα εἶναι καὶ ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν ΒΓ, καὶ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ Α, ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις. γ'.

Δύο ἀνίσων δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ ἀφέλῃτις ἀπὸ τῆς μείζονος μέρος ἴσον μὲ τὴν ἐλάσσονα.

Ἔςωσαν ΑΒ, ΓΔ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 27.

Πρὸς τῷ σημείῳ Β πέρατι τῆς μείζονος εὐθείας ΑΒ γράφω τὴν ΒΕ = ΓΔ δοθείσῃ (πρ. β'.).. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαςήματι δὲ τῷ ΒΕ γράφω κύκλον τὸν ΖΕΗ, καὶ λέγω ὅτι ἡ ΒΖ εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Καθότι ἐπειδὴ ἡ ΒΕ = ΓΔ, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. καὶ ἡ ΒΕ = ΒΖ, καθὸ ἡμιδιάμετροι, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΒΖ = ΓΔ (ἀξ. ά.). Ὥςε ἀπὸ τῆς μείζονος ΑΒ ἀφῄρηται μέρος: τὸ ΒΖ, ἴσον μὲ τὴν ἐλάσσονα ΓΔ, ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις. δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἴσας τὰς δύο πλευράς: ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν δύο ἴσων πλευρῶν περιεχομένην ἴσην, ἕξουσι καὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἴσας, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἴσον μὲ ὅλον τὸ τρίγωνον.

Ἔςω ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ = ΔΖ καὶ ἡ γων. Α = γων. Δ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ βάσις ΒΓ = ΕΖ βάσει, καὶ ἡ γων. Γ = γων. Ζ, καὶ ἡ γων. Β = γων. Ε, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ = τριγ. ΔΕΖ. σχ. 28.

Καθότι ἂν ἐφαρμώσῃ τὴν γων. Α ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ γων. Δ, τότε οὔσης τῆς μὲν ΑΒ = ΔΕ, τῆς δὲ ΑΓ = ΔΖ, ἡ μὲν ΑΒ ἔχει νὰ ἐφαρμώσῃ μὲ τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ μὲ τὴν ΔΖ.. ὅθεν καὶ τὰ σημεῖα Β, καὶ Γ ἐφαρμώσουσι μὲ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, καὶ ἑπομένως καὶ ὁλόκληρος ἡ βάσις ΒΓ μὲ ὁλόκληρον τὴν βάσιν ΕΖ, ἀλλέως δύο εὐθεῖαι περιέξουσι χωρίον (ἀξ. ιβ΄.). ὥςε ἂν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἐφαρμώσωσι μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ἑτέρου, δῆλον ὅτι καὶ ἡ γων. Β = γων. Ε, καὶ ἡ γων. Γ = γων. Ζ, καὶ ὅλον τὸ τρίγ. ΑΒΓ = τριγ. ΔΕΖ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Πρότασις ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.. καὶ ἂν ἐπεκτανθῶσι τὰ ἴσα σκέλη, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἐπίσης ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἔςω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ. σχ. 29.

Ἐπεκτείνω τὰ ἴσα σκέλη ΑΒ καὶ ΑΓ ἀορίςως μέχρι τῶν Δ καὶ Ε σημείων.. ἐπὶ τῆς ΑΔ εὐθείας λαμβάνω ἓν τυχὸν σημεῖον, ὡς τὸ Ζ.. τέμνω ἀπὸ τῆς ΑΕ εὐθείας τὴν ΑΗ = ΑΖ (πρ. γ΄.).. ἄγω τὴν ΖΓ καὶ ΗΒ.. καὶ λέγω πρῶτον ὅτι τὸ τρίγ. ΑΓΖ = τρίγ. ΑΒΗ.

Καθότι ἡ μὲν ΑΖ = ΑΗ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΑΓ = ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ἡ γων. Α κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα.. ὥςε τὸ τρίγ. ΑΓΖ = τρίγ. ΑΒΗ (προ. δ΄.), καὶ ἡ γων. Ζ = γων. Η, καὶ ἡ βάσις ΖΓ. = ΗΒ βάσει.

Ἀλλ' αἱ πλευραὶ ΖΓ, ΗΒ, καὶ αἱ γων. Ζ, καὶ Η εἶναι ἐν ταυτῷ πλευραὶ καὶ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων ΖΒΓ, ΗΓΒ, τούτου ἕνεκεν εἰς τὰ τρίγωνα ΖΒΓ, ΗΓΒ ἐγὼ ἔχω γων. Ζ = γων. Η, καὶ τὴν πλευρὰν ΖΓ = ΗΒ, ἔχω δὲ καὶ τὴν ΖΒ = ΗΓ διὰ τὸ (ἀξ. ζ΄.), τούτου ἕνεκεν τὸ τρίγ ΖΒΓ = τρίγ. ΗΓΒ (πρ. δ΄.), καὶ ἑπομένως καὶ ἡ γων. ΖΒΓ = γων. ΗΓΒ. Ἀλλ' αὗται αἱ γωνίαι εἶναι ὑπὸ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Ὥςε δέδεικται τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ζητήματος.

Ἀλλ' ἀποδειχθεισῶν ἅπαξ τῆς τε γων. ΑΓΖ = γων. ΑΒΗ, καὶ τῆς γων. ΖΓΒ = γων. ΗΒΓ, ἂν ἀφαιρέσω τὰς δευτέρας ἐκ τῶν πρώτων, ἔξω τὰ κατάλοιπα ἴσα (ἀξ. ζ.): ὃ ἐςιν ἔξω γων. ΑΒΓ = γων. ΑΓΒ, ὅπερ εἶναι τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ζητήματος. Ὥςε...

Πρότασις. ϛ'.

Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, ἔξει καὶ τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτεινούσας πλευρὰς ἴσας.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔςω ἡ γων. ΑΒΓ = γων. ΑΓΒ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ = ΑΒ σχ. 30.

Εἰδὲ μὴ, ἔςωσαν ἄνισοι, καὶ μείζων θατέρα αὐτῶν, ὡς ἡ ΑΒ. Τότε τέμνων ἀπ' αὐτῆς τὴν ΑΒ = ΑΓ (πρ. γ.), ἄγω τὴν ΓΔ εὐθεῖαν, καὶ ἔχω τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΔΒΓ.. διότι ἐγὼ ἔχω εἰς αὐτὰ τὴν μὲν ΔΒ = ΑΓ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν δὲ ΒΓ κοινὴν πλευρὰν, τὴν δὲ γων. ΔΒΓ = γων. ΑΓΒ, ἐξ ὑποθέσεως, ὥςε τὸ τρίγ. ΔΒΓ = τρίγ. ΑΒΓ (πρ. δ'.): ὃ ἐςι τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ μέρος αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι ἄτοπον (ἀξ. ι.). Ὥςε...

Πρότασις. ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως δυσὶν εὐθείαις ἐπικειμέναις καὶ εἰς ἓν σημεῖον συμπιπτούσαις, ἄλλαι δύο, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἀδυνατοῦσι νὰ ςαθῶσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους, καὶ νὰ συμπέσωσιν εἰς ἄλλο σημεῖον.

Ἔςω ΑΒ ἡ βάσις, καὶ ΑΓ, ΒΓ αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐπικείμεναι καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ συμπίπτουσαι, λέγω ὅτι ἂν ἡ ΑΔ = ΑΓ, καὶ ἡ ΒΔ = ΒΓ, ἀδυνατοῦσι νὰ συμπέσωσιν εἰς διαφορετικὸν σημεῖον τοῦ σημείου Γ, ὡς εἰς τὸ Δ. σχ. 31.

Ἔςω ὅμως τοῦτο δυνατόν. Ἄγω τὴν ΓΔ, καὶ ἔχω δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ τὰ ΑΓΔ, ΒΔΓ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ μὲν γων. ΑΓΔ = γων. ΑΔΓ, ἡ δὲ γων. ΒΔΓ = γων. ΒΓΔ (πρ. έ.): ὅ ἐςιν ἡ γων. ΒΔΓ (οὖσα μέρος τῆς γων. ΑΔΓ = ΑΓΔ) = γων. ΒΓΔ (ἥτις εἶναι ὅλον τῆς γων. ΑΓΔ.): τουτέςι τὰ ὅλα ἴσα μὲ τὰ μέρη, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.

Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν, ἤθελεν εἰποῖ τις, νὰ συμπέσωσιν αἱ δεύτεραι εὐθεῖαι ἢ ἐντὸς, ἢ ἔξωθεν τῶν πρώτων, ὡς εἰς τὸ σχ. 32.

Ἔςω. Τότε ἄγων τὴν ΓΔ εὐθεῖαν, ἔξω δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ τὰ ΑΓΔ, ΒΓΔ.. ἐπεκτείνω τὰ δύο ἴσα σκέλη τοῦ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς: τοῦ ΒΓΔ, καὶ οὕτως ἔξω τὰς ἀπὸ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις (κατὰ τὴν αὐτήν): τουτέςι τὴν γων. ΕΓΔ = γων. ΖΔΓ, ὡσαύτως καὶ τὴν γων. ΑΔΓ = γων. ΑΓΔ ὡς πρὸς τῇ βάσει: ὅ ἐςι τὰ ὅλα ἴσα μὲ τὰ μέρη, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.. ὅθεν οὔτε ἡ ΑΔ = ΑΓ, οὔτε ἡ ΒΔ = ΒΓ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν (α). Ὥςε...

(α.) Αὕτη ἡ πρότασις ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἑξῆς: ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας: ἑκάςην ἑκάςῃ, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ σχῶσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας. Καθότι ἔςωσαν ΑΓ = ΑΔ, καὶ ΒΓ = ΒΔ σχ. 31, ἢ 32, καὶ ἐπικείσθωσαν καὶ αἱ τέσσαρες ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα. Τότε ἂν αἱ μὲν δύο σύμ.

Πρότασις. η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας· ἑκάστην ἑκάστῃ, ἔξουσι καὶ τὰς τρεῖς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν ὑποτεινομένας ἴσας, καὶ τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔσω ἡ μὲν ΑΒ = ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ = ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ = ΕΖ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ γων. Α = γων. Δ, καὶ ἡ γων. Β = γων. Ε, καὶ ἡ γων. Γ = γων. Ζ, καὶ τὸ τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΔΕΖ σχ. 33.

Καθότι ἐφαρμόζω τὴν βάσιν ΑΒ ἐπὶ τῆς βάσεως ΔΕ, καὶ τότε εἶναι ἀναγκη νὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ΑΓ μὲ τὴν ΔΖ, καὶ ἡ ΒΓ μὲ τὴν ΕΖ· ὅ ἐςι καὶ τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ σημεῖον Ζ, ἀλλέως ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΔΕ δυσὶν εὐθείαις ἐπικειμέναις καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ συμπιπτούσαις, ἄλλαι δύο·, αἱ ΑΓ, ΒΓ, ἴσης ἑκατέρας ἑκατέρᾳ, συνιςῶνται καὶ συμπίπτουσιν εἰς ἄλλο σημεῖον, ὡς εἰς τὸ Γ, ὅπερ δέδεικται ἀδύνατον (πρ. ζ΄.). Ὥςε...

Πρότασις. θ΄.

Νὰ διαιρέσῃ τις δίχα τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

πίπτωσι εἰς τὸ Γ σημεῖον, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο εἰς τὸ Δ· ὅ ἐςιν εἰς δύο διαφορετικὰ, τότε τὰ γινόμενα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ θέλουσιν εἶναι μὲν ἰσόπλευρα, πλὴν ὄχι καὶ ἰσογώνια., διότι ἡ μὲν γων. ΔΑΒ < γων. ΓΑΒ, ἡ δὲ γων. ΔΒΑ < ΓΒΑ σχ. 32. ὅ περδηλονότι ἀποδεικνύεται ἀδύνατον. Ὥςε αὕτη μὲν ἡ πρότασις ἀποδεικνύει διὰ τῆς ἀτόπου ἀπαγωγῆς τὸ πρᾶγμα, ἡ δὲ ἑξῆς διὰ τῆς εὐθείας· ἢ ἂν θέλῃς ἡ μία ἀναλυτικῶς, καὶ ἡ ἑτέρα συνθετικῶς..

Ἔςω ΒΑΓ ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία. σχ. 34.

Λαμβάνω ἀπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ.. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὴν ΑΕ = ΑΔ (πρ. γ΄.).. ἄγω τὴν ΔΕ εὐθεῖαν, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς συνίςημι τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΖΕ (πρ. ά.).. ἄγω τὴν ΑΖ εὐθεῖαν, καὶ ἔχω τρίγ. ΑΔΖ = τρίγ. ΑΕΖ.

Καθότι εἰς ταῦτα τὰ τρίγωνα ἐγὼ ἔχω τὴν μὲν ΑΔ = ΑΕ, τὴν δὲ ΔΖ = ΕΖ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ τὴν ΑΖ κοινὴν πλευράν. Ὥςε τὸ τρίγ. ΑΔΖ = τριγ. ΑΕΖ (πρ. ή.), καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΖΑΔ = γων. ΖΑΕ: ὃ ἐςιν ἡ γων. ΔΑΕ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

ΠΟΡΙΣΜΑ (α).

Ὥςε διὰ τῆς εἰς δίχα ὑποδιαιρέσεως, δύναταί τις νὰ διαιρέσῃ μίαν γωνίαν καὶ εἰς τέσσαρα, καὶ εἰς ὀκτὼ, κτξ.

Πρότασις ί.

Νὰ διαιρέσῃ τις δίχα τὴν δοθεῖσαν μὴ ἄπειρον εὐθεῖαν.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα σχ. 35.

Συνίςημι ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΓΒ (πρ. α΄).. διαιρῶ δίχα τὴν γωνίαν ΑΓΒ (πρ. θ΄.) διὰ τῆς ΓΔ εὐθείας, καὶ λέγω ὅτι ἡ ΑΔ = ΒΔ.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ ἡ μὲν ΑΓ = ΒΓ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΓΔ κοινή, ἡ δὲ γων. ΑΓΔ = γων. ΒΓΔ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ

(α.) Τὸ πόρισμα εἶναι πρότασίς τις, ἄνευ ἀποδείξεων, ὡς προειπεμμένων.

τοῦτο καὶ ἡ ΑΔ = ΒΔ (πρ. δ΄.). Ὥϛε ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς ια΄.

Μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ ὑψώσῃ τις πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ ἐπ᾽ αὐτῆς δοθέντος σημείου.

Ἔϛω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ Γ τὸ ἐπ᾽ αὐτῆς δοθὲν σημεῖον σχ. 36.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ λαμβάνω ἕν τυχὸν σημεῖον, ὡς τὸ Δ.. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῆς ΓΒ τὴν ΕΓ = ΔΓ (προτ. γ΄.).. ἐπὶ τῆς ΔΕ συνίϛημι τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΖΕ.. ἄγω τὴν ΖΓ εὐθεῖαν, καὶ λέγω ὅτι αὕτη εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΒ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα ΖΓΔ, ΖΓΕ ἡ μὲν ΔΖ = ΕΖ, ἡ δὲ ΔΓ = ΕΓ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ ἡ ΖΓ κοινὴ πλευρά. Ὥϛε καὶ ἡ γων. ΖΓΔ = γων. ΖΓΕ (προτ. ή.): ὅ ἐϛιν ἡ εὐθεῖα ΓΖ ὕψωται πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν δοθεῖσαν ΑΒ (όρ. ζ΄.), καὶ ἀπὸ τοῦ ἐπ᾽ αὐτῆς Γ δοθέντος σημείου, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α α΄.

Ὥϛε ἄντις λάβῃ δύο σημεῖα ἐπίσης ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ πέρατος μιᾶς πρὸς ὀρθὰς εὐθείας, καὶ ἄξῃ δύο εὐθείας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς πρὸς ὀρθὰς, αὗται αἱ εὐθεῖαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἡ ΔΖ = ΕΖ.. διότι ΔΓ = ΕΓ.

Π ό ρ ι σ μ α β΄.

Καὶ ἂν ἡ μὲν ΔΓ = ΕΓ, ἡ δὲ ΔΖ = ΕΖ, ἡ ΓΖ θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΒ.

Πόρισμα γ'.

Ὥςε εὐκόλως ἤθελεν ἀναγράψαι τις τρίγωνον ἰσοσκελές. Καθότι ἂν εἰς ἓν τῆς πρὸς ὀρθὰς ὑψωθείσης ἄξῃ δύο εὐθείας ἀπὸ δύο σημείων ἀπεχόντων ἐπίσης τῆς ἀρχῆς αὐτῆς, τὸ συςησόμενον τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές. Οὕτως οὔσης τῆς ΓΔ = ΓΕ, τὸ τρίγωνον ΕΔΖ εἶναι ἰσοσκελές.

Πρότασις ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθεῖαν νὰ κατάξῃ τις κάθετον ἀφ' ἑνὸς σημείου κειμένου ἔξωθεν αὐτῆς.

Ἔςω Α τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ ΒΓ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα σχ. 37.

Ἐπεκτείνω τὴν ΒΓ εὐθεῖαν ἀδιορίςως μέχρι τοῦ Δ σημείου (αἴτη. β').. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΕ ὑπερβαίνοντι πρὸς τὰ ἄλλα μέρη τῆς εὐθείας, γράφω κύκλον τὸν ΖΕΗ.. τέμνω τὴν ΖΗ εὐθεῖαν δίχα κατὰ τὸ σημεῖον Θ.. ἄγω τὰς εὐθείας ΑΘ, ΑΖ, ΑΗ, καὶ λέγω, ὅτι ἡ γων. ΑΘΖ = γων. ΑΘΗ.

Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα ΖΑΘ, ΗΑΘ ἡ μὲν ΑΖ = ΑΗ, καθὸ ἡμιδιάμετροι, ἡ δὲ ΖΘ = ΗΘ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΑΘ κοινὴ πλευρά, ὅθεν ἡ γων. ΑΘΖ = γων. ΑΘΗ (πρ. η'). Ὥςε ἡ ΑΘ ἦκται καθέτως ἐπὶ τὴν ΑΒ (ὁρ. ζ'.), ὅπερ δηλονότι ἐζητεῖτο.

Πρότασις ιγ'.

Ἂν εὐθεῖα ςαθῇ ἐπ' εὐθείας, αἱ γενησόμεναι δύο γωνίαι θέλουσιν εἶναι ὀρθαί, ἢ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς.

Ἔςω ΑΒ ἡ ἐφεςηκυῖα εὐθεῖα, καὶ ΓΔ, ἐφ' ἧς ἐφέςηκε σχ. 38.

Τότε ἐγὼ λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἢ εἶναι κάθετος: ὅ. ἐςιν ἡ γων. ΑΒΓ = γων. ΑΒΔ, ἢ δὲν εἶναι.. ἂν δὲν ἦναι, ὑψῶ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ Β σημείου τὴν ΒΕ (πρ. ια΄.), καὶ ἔχω γων. ΕΒΓ = γων. ΕΒΔ = 90° (ὁρ. ζ΄). Ἀλλ', ὡς ὁρᾶται, τὸ τούτων κεφάλαιον: τουτέςι γων. ΕΒΓ + γων. ΕΒΔ = γων. ΕΒΓ + γων. ΕΒΑ + γων. ΑΒΔ = γων. ΑΒΓ + γων. ΑΒΔ. Ὥςε αἱ δύο ἐφεξῆς γωνίαι, εἴτε αἱ γων. ΑΒΓ + γων. ΑΒΔ = γων. ΕΒΓ + γων. ΕΒΔ = 180°: τουτέςι μὲ δύο ὀρθὰς ἴσαι, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α α΄.

Ὥςε ἂν πολλαὶ εὐθεῖαι ςαθῶσιν ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἅπασαι αἱ γενηθόμεναι γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ δύο ὀρθὰς, εἴτε = 180°.

Π ό ρ ι σ μ α β΄.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἀπὸ τοῦ ἀπέναντι μέρους τῆς αὐτῆς εὐθείας δὲν εἶναι τρόπος νὰ ὑπάρξῃ διαφόρως, τούτου ἕνεκεν ἅπασαι αἱ γενόμεναι γωνίαι εἰς ἓν σημεῖον μιᾶς εὐθείας, εἶναι ἴσαι μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, εἴτε = 360°.

Π ό ρ ι σ μ α γ΄.

Ὥςε δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας, ἐκτελοῦσι γωνίας = 360°.

Π ό ρ ι σ μ α δ΄.

Ὅτι ἂν ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ κοίλης, αἱ δύο ἐφεξῆς γωνίαι < 180°, εἰδὲ ἐπὶ κυρτῆς > 180°. Καθότι αἱ γων. ΕΒγ + γων. ΕΒδ < γων. ΕΒΓ + γων. ΕΒΔ, ὡς μέρος καὶ ὅλον, ἐν ᾧ ἀκολουθεῖ.. τὸ ἀνάπαλιν ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ μέρους.

Πρότασις ιδ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι μὲ μίαν τρίτην κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὄχι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους αὐτῆς, ἐκτελοῦσι τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας μὲ δύο ὀρθάς, αὗται αἱ εὐθεῖαι θέλουσι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔςωσαν ΑΒ, καὶ ΓΒ αἱ συμπίπτουσαι μὲ τὴν ΔΒ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Β σημεῖον οὕτως, ὥςε αἱ γων. ΑΒΔ $+$ γων. ΔΒΓ $= 180^\circ$. σχ. 39.

Τότε ἐγὼ λέγω ὅτι ἡ ΑΒ, καὶ ΓΒ εἶναι μία εὐθεῖα, ἀλλέως: ἂν δηλονότι δὲν ἦναι μία εὐθεῖα, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ μία ἄλλη ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν ΑΒ, καὶ ἔςω ἡ ΒΕ. Ἀλλὰ τότε γων. ΑΒΔ $+$ γων. ΔΒΕ $= 180^\circ$, εἴτε μὲ δύο ὀρθὰς (πρ. ιγ'.).. καὶ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ γων. ΑΒΔ $+$ γων. ΔΒΓ $= 180^\circ$, τούτου ἕνεκεν ἀφαιρῶν κοινῶς τὴν γων. ΑΒΔ, ἔξω γων. ΔΒΓ $=$ γων. ΔΒΕ (ἀξ. ζ'): ὅ ἐςι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ ἴδιον μέρος, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὥςε...

Πρότασις ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ποιήσουσι τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις (α).

(α) Θαλῆς λέγεται ὁ ἐφευρετὴς ταύτης τῆς προτάσεως. Καὶ ἂν τοῦτο ἔχηται ἀληθείας, τότε οἱ Αἰγύπτιοι, ὧνπερ αὐτὸς ὑπῆρξε μαθητὴς, ἢ ἠγνόουν αὐτὴν, ἢ γινώσκοντες ὑπέκρυπτον ἐκ τῶν μαθητῶν: ὅ ἐςι καθ' ἑκάτερα ἦσαν ὄχι μεγάλου πνεύματος. Ὅθεν ὅσοι παραβάλλουσιν αὐτοὺς μὲ τοὺς Ἕλληνας, ἔχουσιν ἀδύνατον τὴν ὅρασιν.

Ἔςωσαν αἱ διατεμνόμεναι ΑΒ, ΓΔ, τότε λέγω ὅτι γων. ΑΕΔ = γων. ΓΕΒ. σχ. 40.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΕ ἵςαται ἐπὶ τὴν ΑΒ, διὰ τοῦτο αἱ γων. ΓΕΒ + γων. ΑΕΓ = 180° (προτ. ιγ΄.).. ὡσαύτως ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ἵςαται ἐπὶ τῆς ΓΔ, διὰ τοῦτο αἱ γων. ΓΕΑ + γων. ΑΕΔ = 180°.. ἀφαιρῶ κοινῶς τὴν γωνίαν ΓΕΑ, καὶ μένει γων. ΓΕΒ = γων. ΑΕΔ (ἀξ. ζ.).. κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ γων. ΓΕΑ = γων. ΔΕΒ. Ὥςε...

Πρότασις ις΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία θέλει εἶναι μείζων ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον.

Προσεκβεβλήσθω ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε λέγω ὅτι, γων. ΑΓΔ > γων. ΓΒΑ καὶ τῆς ΓΑΒ. σχ. 41.

Καθότι τέμνω δίχα τὴν ΑΓ πλευρὰν κατὰ τὸ Ε σημεῖον (πρ. ι΄).. ἄγω τὴν ΒΕ εὐθεῖαν .. τὴν ἐπεκτείνω, ἕως οὗ ἡ ΕΖ = ΒΕ (πρ. β΄.).. ἄγω τὴν ΖΓ εὐθεῖαν, καὶ λέγω ὅτι ἡ γων. ΕΓΖ = γων. ΒΑΕ.

Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα ΒΑΕ, ΓΖΕ ἡ μὲν ΒΕ = ΕΖ, ἡ δὲ ΑΕ = ΕΓ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ γων. ΒΕΑ = γων. ΖΕΓ (πρ. ιε΄), διὰ τοῦτο καὶ γων. ΕΓΖ = γων. ΒΑΕ (πρ. δ΄.).. ἀλλ' ἡ γων. ΕΓΔ > γων. ΕΓΖ (ἀξ. ι΄), ὥςε θέλει εἶναι ἐπίσης μείζων καὶ τῆς ταύτῃ ἴσης: τῆς ΒΑΓ λέγω.

Διὰ τῆς ὁμοίας κατασκευῆς καὶ ἀποδείξεως ἤθελεν ἀποδειχθῆ, ὅτι καὶ γων. ΘΓΗ = γων. ΑΒΗ.. ἀλλ' ἡ γων.

ΘΓΗ = γων. ΔΓΖ, καθὸ κατὰ κορυφήν.. ὥςε ἡ γων. ΔΓΖ = γων. ΑΒΗ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γων. ΕΓΔ > γων. ΑΒΔ. Ὥςε...

Πρότασις ιζ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἐλάσσονες δύο ὀρθῶν.

Καθότι αἱ γων. ΑΓΔ + γων. ΑΓΒ = 180° (πρ. ιγ΄.) σχ. 41. Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἡ γων. ΑΓΔ > γων. ΓΑΒ, καὶ τῆς ΑΒΓ (πρ. ι΄.).. ὥςε αἱ γων. ΑΓΒ + γων. ΓΑΒ < 180°. Ὡσαύτως καὶ αἱ γων. ΑΓΒ + γων. ΓΒΑ < 180°.. καὶ τέλος καὶ αἱ γων. ΓΑΒ + γων. ΓΒΑ < 180°.

Πρότασις ιη΄.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔςω ἡ πλευρὰ ΑΒ > ΔΓ πλευρᾶς, τότε λέγω ὅτι καὶ γων. ΑΓΒ > γων. ΓΒΑ. σχ. 42.

Ἀπὸ τῆς ΑΒ τέμνω τὴν ΑΔ = ΑΓ (πρ. γ΄.).. ἄγω τὴν ΓΔ εὐθεῖαν, καὶ ἔχω γων. ΑΔΓ = γων. ΑΓΔ (πρ. ε΄.).. ἀλλὰ γων. ΓΔΑ > γων. ΔΒΓ (πρ. ις΄.).. ὥςε καὶ γων. ΑΓΔ > γων. ΔΒΓ, καὶ ἔτι πολλῷ μείζων ταύτης ἡ γων. ΑΓΒ. Ὥςε...

Πόρισμα.

Ὥςε παντὸς τριγώνου ἡ ἐλάσσων πλευρὰ τὴν ἐλάσσονα γωνίαν ὑποτείνει.. καὶ ἐπομένως τὸ σκαληνὸν ἔχει ἀνίσους τὰς τρεῖς γωνίας.

Πρότασις ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων γωνία ὑποτείνεται ὑπὸ τῆς μείζονος πλευρᾶς.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔςω γων. Α > γων. Β, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΓΒ > ΑΓ πλευρᾶς. σχ. 43.

Ἀλλέως, ἢ ἴση ἤθελεν εἶναι ἢ ἐλάσσων.. ἔςω λοιπὸν τὸ πρῶτον: ὅ ἐςιν ἔςω ΓΒ = ΓΑ, ἀλλὰ τότε ἤθελεν εἶναι καὶ ἡ γων. Α = γων. Β (πρ. ε'.), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἔςω τὸ δεύτερον: ὅ ἐςιν ἔςω ΓΒ < ΓΑ, ἀλλὰ τότε ἤθελεν εἶναι καὶ γων. Α < γων. Β (πρ. ιη'.), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὥςε ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΓΒ ἀδυνατεῖ νὰ ἦναι μήτε ἴση, μήτε ἐλάσσων τῆς πλευρᾶς ΓΔ, ἀναγκαίως θέλει εἶναι μείζων, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Πόρισμα.

Ὥςε εἴς τε τὰ ὀρθογώνια καὶ ἀμβλυγώνια τρίγωνα ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ τὴν ὀρθὴν καὶ ἀμβλεῖαν γωνίαν εἶναι μείζων ἑκατέρας τῶν λοιπῶν.

Πρότασις. κ'.

Παντὸς τριγώνου τὸ κεφάλαιον τῶν δύο πλευρῶν εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης (α).

(α) Ὁ Ἀρχιμήδης φαίνεται ὅτι ἐξέλαβεν εἰς ἀξίωμα ταύτην τὴν πρότασιν, ὅθεν καὶ ὡρίσατο τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν σμικροτάτην πασῶν τῶν γραμμῶν τῶν περατουμένων εἰς δύο σημεῖα (ὅρον. γ. σημ.), εἴτε καμπυλῶν δηλονότι, εἴτε εὐθειῶν καὶ ἐμποιουσῶν γωνίαν.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, λέγω ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΓ + ΓΒ > ΑΒ. σχ. 44.

Ἐπεκτείνω τὴν ΑΓ ἕως οὗ ἡ ΓΔ = ΓΒ (πρ. γ΄.).. καὶ ἔχω γωνίαν ΓΔΒ = γων. ΓΒΔ (πρ. ε΄.). Ἀλλ' ἡ γων. ΑΒΔ > ΓΒΔ, ὡς ὅλον μέρους, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι μείζων καὶ τῆς ταύτῃ ἴσης: τῆς ΓΔΒ.. ὅθεν ἡ ΑΔ εἴτε αἱ ΑΓ + ΓΒ > ΑΒ (πρ. ιθ΄.).. ὁμοιόν τι ἤθελε λεχθῇ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν. Ὥςε...

Πρότασις. κα΄.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἑνὸς τριγώνου συςαθεῖσαι ἄλλαι δύο εὐθεῖαι συμπέσωσιν εἰς ἕν τῶν ἐντὸς αὐτοῦ σημείων, τὸ μὲν κεφάλαιον αὐτῶν θέλει εἶναι ἔλασσον τῶν πρώτων, περιέξουσι δ' ὅμως μείζονα γωνίαν.

Ἔςωσαν αἱ ΑΔ, ΒΔ αἱ δεύτεραι εὐθεῖαι, τότε λέγω ὅτι αἱ μὲν ΑΔ + ΒΔ < ΑΓ + ΒΓ, πλὴν ἡ γων. Δ > γων. Γ. σχ. 45.

Ἐπεκτείνω τὴν ΑΔ πλευρὰν, ἕως οὗ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ οὕτως ἔχω ΒΕ + ΕΔ > ΔΒ (πρ. ιθ΄.).. προςίθημι κοινῶς τὴν ΑΔ, καὶ ἔχω ΑΕ + ΒΕ > ΑΔ + ΒΔ. Ἀλλὰ ΑΓ + ΓΕ > ΑΕ (κατὰ τὴν αὐτὴν), ὅθεν προςιθέμενος κοινῶς τὴν ΒΕ, ἔξω ΑΓ + ΓΕ + ΕΒ: ὅ ἐςιν ΑΓ + ΒΓ > ΑΕ + ΒΕ. Ἀλλὰ δέδεικται ΑΔ + ΒΔ < ΑΕ + ΒΕ. Ὥςε πολλῷ πλέον αἱ ΑΔ + ΒΔ < ΑΓ + ΒΓ, ὅπερ δηλονότι εἶναι τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Εἰς τὸ τρίγ. ΒΔΕ ἡ ἐκτὸς γων. ΒΔΑ > ΒΕΔ (πρ. ις΄).. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ἐκτὸς γων. ΒΕΔ > γων. ΕΓΑ.. ὅθεν πολλῷ μᾶλλον ἡ γων. ΒΔΑ > γων. ΕΓΑ, εἴτε τῆς ΒΓΑ, ὅπερ εἶναι τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως. Ὥςε . . .

Πρότασις κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, ἐξ ὧν ἑκάςη νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ κεφαλαίου τῶν λοιπῶν δύο, νὰ συςήσῃ τις τρίγωνον.

Ἔςωσαν Α, Β, Γ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 46.

Γράφω τὴν ΔΕ εὐθεῖαν.. ἐκ ταύτης λαμβάνω τὴν μὲν ΔΖ = Α, τὴν δὲ ΖΗ = Β, τὴν δὲ ΗΘ = Γ (πρ. γ'.).. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαςήματι δὲ τῷ ΔΖ, γράφω κύκλον τὸν ΔΙΚ.. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαςήματι δὲ τῷ ΗΘ, γράφω κύκλον τὸν ΙΘ.. ἄγω τὰς εὐθείας ΖΙ, ΗΙ, καὶ λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΙΗ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι ἡ μὲν πλευρὰ αὐτοῦ ΖΙ = ΔΖ, καθὸ ἡμιδιάμετροι, ἡ δὲ ΗΙ = ΗΘ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.. ἀλλ' ἡ μὲν ΔΖ = Α, ἡ δὲ ΖΗ = Β, ἡ δὲ ΗΘ = Γ, ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ὥςε τὸ τρίγωνον ΖΙΗ συνεςάθη ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων μὲ τὰς τρεῖς δοθείσας, ὡς ἐζητεῖτο.

Πρότασις κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ ἐπ' αὐτῆς δοθέντι σημείῳ, νὰ συςήσῃ τις γωνίαν εὐθύγραμμον ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, Α τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον, καὶ ΔΓΕ ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία. σχ. 47.

Ἐπὶ τῶν σκελῶν τῆς δοθείσης γωνίας λαμβάνω δύο τυχόντα σημεῖα: τὰ Ζ, Η.. ζευγνύω αὐτὰ διὰ τῆς εὐθείας ΖΗ.. εἶτα ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων μὲ τὰς τρεῖς εὐθείας ΓΖ, ΓΗ, ΖΗ ἐκτελῶ τρίγωνον τὸ ΘΑΙ (πρ.