Πρότασις ηʹ.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔςωσαν ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες καὶ ὁμοίως κείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, ΕΘΖΗ, καὶ πλευραὶ αὐτῶν ὁμόλογοι αἱ ΑΒ, ΕΒ, τότε λέγω ὅτι πυρ. ΑΒΓΔ : πυρ. ΕΘΖΗ : : ΑΒ^3 : ΕΘ^3. σχ. 215.

Ἐπειδὴ καὶ αὗται αἱ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, διὰ τοῦτο καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν θέλουσι εἶναι ὅμοια. Ὥςε αʹ. εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΑΓ, ΘΕΖ ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα ΓΑΒΚ, ΖΕΘΡ.. βʹ. εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΑΔ, ΖΕΗ ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα ΓΑΔΙ. ΖΕΗΠ.. γʹ. εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΑΒ, ΗΕΘ ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα ΔΑΒΝ, ΗΕΘΟ.. ἄγω τὰ ἀπεναντίον τούτων παράλληλα ἐπίπεδα, καὶ οὕτως ἔχω δύο παραλληλεπίπεδα ὅμοια: τὰ ΓΝ, ΖΟ, ὡς περιεχόμενα ὑφ᾽ ὁμοίων ἐπιπέδων. Ὥςε ἔξω παραλληλεπ. ΓΝ : παραλληλεπ. ΖΟ : : ΑΒ^3 : ΕΘ^3 (πρ. λγʹ. βιβ. ιαʹ.). Τώρα διαιρῶ τὸν πρῶτον λόγον διὰ τοῦ 6, καὶ ἔχω $\frac{1}{6}$ παραλληλεπ. ΓΝ : $\frac{1}{6}$ παραλληλεπ. ΖΟ : : ΑΒ^3 : ΕΘ^3. (πρ. γʹ. βιβ. εʹ.).. ἀλλ᾽ $\frac{1}{6}$ παραλληλεπ. ΓΝ = πυρ. ΑΒΓΔ, καὶ $\frac{1}{6}$ παραλληλεπ. ΖΟ = πυρ. ΕΘΖΗ (πορ. εʹ. πρ. ζʹ).. ὥςε πυρ. ΑΒΓΔ : πυρ. ΕΘΖΗ : : ΑΒ^3 : ΕΘ^3 (πρ. ιαʹ. βιβ. εʹ.).

Εἰ δὲ καὶ αἱ δοθεῖσαι πυραμίδες ἦσαν πολυγωνικαί, ἐγὼ ἤθελον τὰς διαιρέσει εἰς τριγωνικάς, διαιρέσας τὰς βάσεις αὐτῶν εἰς τοσαῦτα τρίγωνα, ὅσας πλευρὰς ἤθελον ἔχοι αἱ βάσεις αὐτῶν ἀποθέσει δύο.. καὶ ἐπειδὴ αἱ γενησόμεναι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἤθελον εἶναι ὅμοιαι, ὡς ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, ἐγὼ ἤθελον ἔξοι τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ἀναλόγους μὲ τοὺς κύβους τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἀλλ' ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἔχουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον, διὰ τοῦτο ἤθελον ἔξοι τὴν ὁλικὴν πυραμίδα πρὸς τὴν ὁλικὴν, ὡς κύβον πρὸς κύβου τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε ἂν ἦναι τέσσαρες εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογοι, καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας συςηθῶσι πυραμίδες ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι, τότε αὗται αἱ πυραμίδες ἔξουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἡ πρώτη εὐθεῖα πρὸς τὴν τετάρτην.. διότι δηλονότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι τριπλασίων τοῦ λόγου, ὅν περ ἡ πρώτη ἔχει πρὸς τὴν δευτέραν (ὅρ. ι'. βιβ. ε'.).

Π ρ ό τ α σ ι ς θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη.. καὶ ἐκεῖναι τῶν πυραμίδων, ὧν περ αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἔςωσαν ἴσαι αἱ πυραμίδες ΑΒΓΔ, ΕΘΖΗ, τότε λέγω ὅτι βασ. ΑΒΓ : βασ. ΕΘΖ : : Δ : α, ὀνομασθέντων Α, α τῶν ὕψεων αὐτῶν. σχ. 215.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, πυρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΕΘΖΗ, διὰ τοῦτο καὶ 6 πυρ. ΑΒΓΔ = 6 πυρ. ΕΘΖΗ : ἔςι ςερ ΓΝ = ςερ. ΖΟ (πορ. ε'. πρ. ζ'.).. διότι δηλονότι τὰ ςερεὰ ταῦτα ἔχουσι διπλασίας τὰς βάσεις, ἢ αἱ πυραμίδες καὶ τὰ αὐτὰ ὕψη, ἀλλὰ τῶν ἴσων παραλληλεπιπέδων, αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη (πρ. λδ'. βιϐ. ια'.), ὥςε βασ. ΓΑΒΚ : βασ. ΖΕΘΡ : : Α : α, καὶ διὰ τοῦτο βασ. ΑΒΓ : βασ. ΕΘΖ : : Α : α (πρ. γ'. βιϐ. ε'.).

Ἔςω τώρα βασ. ΑΒΓ : βασ. ΕΘΖ : : Α : α, τότε λέγω ὅτι καὶ πυρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΕΘΖΗ.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, βασ. ΑΒΓ : βασ. ΕΘΖ : : Α : α, διὰ τοῦτο ἔξω καὶ 2 βασ. ΑΒΓ : 2 βασ. ΕΘΖ : : Α : α : ὅ ἐςι βασ. ΓΑΒΚ : βασ. ΖΕΘΡ : : Α : α.. ὥςε ςερ. ΓΝ = ςερ. ΖΟ (πρ. λδ'. βιϐ. ια'.), καὶ διὰ τοῦτο καὶ $\frac{1}{6}$ ςερ. ΓΝ = $\frac{1}{6}$ ςερ. ΖΟ : ὅ ἐςι πυρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΕΘΖΗ (πορ. ε'. πρ. ζ'.).

Εἰ δὲ καὶ αἱ πυραμίδες ἦσαν πολυγώνιοι, ἐγὼ ἤθελον διαιρέσοι τὰς βάσεις αὐτῶν εἰς τρίγωνα, καὶ ἐκ τῶν σκελῶν ἤθελον ἄξοι ἐπίπεδα μέχρι τῆς κορυφῆς αὐτῶν, καὶ οὕτως ἤθελον μεταϐάλοι αὐτὰς εἰς τριγωνικάς. Δεύτερον ἐπειδὴ καὶ πᾶσα πυραμὶς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς γενόμενον ἐκ κινήσεως μιᾶς ἐπιφανείας, πλὴν μὲ τοιοῦτον νόμον, ὥςε νὰ σμικρύνηται συνεχῶς μὲ ἀναλογίαν ἡ κινουμένη ἐπιφάνεια (ὅρ. β'.), δῆλον ὅτι τὸ τοιοῦτον γενόμενον θέλει εἶναι πάντοτε ἀνάλογον μὲ τὸ μέγεθος τῆς τε κινουμένης ἐπιφανείας καὶ τῆς κινήσεως.. ὥςε ἂν αἱ ἐκ δύο κινουμένων ἐπιφανειῶν, ἢ βάσεων, αἱ βάσεις ἀντιπάσχωσι μὲ τὰ μεγέθη τῶν κινήσεων, τὰ γενόμενα, ἢ ςερεὰ θέλουσιν εἶναι ἴσα.. καὶ ἐξ ἐναντίας, ἂν τὰ ςερεὰ ἦναι ἴσα, αἱ βάσεις αὐτῶν θέλουσιν ἀντιπάσχει μὲ τὰ ὕψη. Ὥςε α'. εἴτε τριγωνικαὶ, εἴτε πολυγωνικαὶ ἤθελον εἶναι αἱ ἴσαι πυραμίδες, αἱ βάσεις αὐτῶν θέλουσιν ἀντιπάσχει μὲ τὰ ὕψη.. καὶ β΄. ἂν δύο πυραμίδων τὰ ὕψη ἀντιπάσχωσι μὲ τὰς βάσεις, αὗται αἱ πυραμίδες θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ι΄.

Πᾶς κῶνος εἶναι ἓν τρίτον κυλίνδρου τῆς αὐτῆς τε βάσεως καὶ ὕψους.

Ἔςω βάσις ἑκατέρων καὶ τοῦ δοθέντος κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ κῶνος ὁ αβδγ. σχ. 216 καὶ 217.

Ἐπειδὴ καὶ πᾶς κύκλος εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληφθῇ ὡς πολύγωνον τακτικὸν ἔχον ἀπειροςὰς τὰς πλευρὰς (πορ. β΄. πρ. β΄.).. καὶ ἐπειδὴ πᾶς μὲν κῶνος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ πυραμὶς ἔχουσα διὰ βάσιν κύκλον καὶ ἀπειροςὰ τὰ περὶ αὐτὴν τρίγωνα (ὅρ. γ΄.), πᾶς δὲ κύλινδρος εἶναι πρίσμα ἔχον ἀπειροςὰ τὰ παραλληλόγραμμα καὶ κύκλον διὰ βάσιν (ὅρ. ιε΄.).. καὶ ἐπειδὴ πᾶσα πυραμὶς εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (πορ. α΄. πρ. ζ΄.), διὰ τοῦτο πᾶς κῶνος εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς κυλίνδρου, ὅςις ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἔπειτα ἐπειδὴ πᾶσα ἐπιφάνεια κινουμένη γεννᾷ ὄχι ἐπιφάνειαν, ἀλλὰ ςερεὸν, δῆλον ὅτι πᾶν ςερεὸν θέλει εἶναι ἀνάλογον μὲ τὸ μέγεθος τῆς τε βάσεως καὶ τῆς κινήσεως.. καὶ ἐπειδὴ ἂν ἡ κινουμένη ἐπιφάνεια ἦναι τρίγωνον καὶ ἐν τῷ κινεῖσθαι σμικρύνηται τακτικῶς, ὥςε νὰ μεταβληθῇ εἰς σημεῖον, τὸ ἐξ αὐτῆς προκύπτον ςερεὸν θέλει εἶναι $\frac{1}{3}$ τοῦ προκύπτοντος ςερεοῦ τοῦ ἂν ἡ βάσις ἐν τῷ κινεῖσθαι δὲν ἐσμικρύνετο (πρ. ζ΄.), δῆλον ὅτι θέ-

16 *

λουσιν ἀκολουθήσει αὐτὰ ταῦτα, καὶ ἂν ἡ κινουμένη ἐπιφάνεια ἤθελεν εἶναι ϛρογγύλη, εἴτε κύκλος.

Π ό ρ ι σ μ α. α΄.

Ὥϛε ἡ ϛεῤῥότης παντὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος, ἐπὶ τὸ ὕψος, ἢ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν βάσιν.

Π ό ρ ι σ μ α. β΄.

Ἂν εἰς κῶνον ἀχθῇ ἐπίπεδον παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν, ὁ ἀφαιρεθησόμενος κῶνος θέλει εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν ὅλον (πορ. α΄. πρ. γ΄. καὶ ὅρ. ε΄.).. διότι δηλονότι οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐκτελοῦσιν ἴσας γωνίας μὲ τὰς διαμέτρους τῶν βάσεων. σχ. 217.

Π ό ρ ι σ μ α. γ΄.

Ἂν εἰς κῶνον ἀχθῇ ἐπίπεδον παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν καὶ κατὰ τὸ μέσον, ὁ ἀφαιρεθησόμενος κῶνος θέλει εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ ὅλου, ὡς δηλονότι καὶ εἰς τὰς πυραμίδας (πορ. γ΄. πρ. ε΄). Καθότι ἄγω τὸ ἐπίπεδον ζ η θ ι παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν βγδε καὶ κατὰ τὸ μέσον τοῦ κώνου, καὶ τότε κων. αζηθι $=\frac{1}{8}$ κων. αβγδε.. καὶ ἐντεῦθεν καὶ ὁ κόλουρος κων. ζηθιβγδε $=\frac{7}{8}$ κων. αβγδε.

Π ό ρ ι σ μ α. δ΄.

Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου ὀρθοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ ἑνὸς ἀποθέματος: τουτέϛι $=$ βγδε $\times \frac{\alpha\beta}{2}$, ὡς καὶ εἰς τὰς πυραμίδας δηλονότι (πορ. γ΄. πρ. γ΄.), καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἡμίσεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τοῦ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους: τουτέςι τῆς βγδε $\times$ αβ.

Π ό ρ ι σ μ α ε'.

β'. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου κολούρου ὀρθοῦ εἶναι ἴση μὲ τὰς δύο περιφερείας τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ἥμισυ ἑνὸς ἀποθέματος, εἴτε ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῶν δύο περιφερειῶν ἐπὶ ἓν απόθεμα. Καθότι οὗτος ὁ κῶνος εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μὲ μίαν κόλουρον πυραμίδα, ἥςπερ δηλονότι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῶν δύο περιμέτρων ἐπὶ τὸ ἀπόθεμα (πορ. δ'. πρ. γ').

Π ό ρ ι σ μ α ς'.

γ'. Ὥςε ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου κολούρου ὀρθοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν δὶς περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου ἀχθέντος ἔν τε τῷ μέσῳ τῶν δύο βάσεων καὶ παραλλήλως μὲ αὐτὰς ἐπὶ τὸ ἥμισυ ἀπόθεμα. Καθότι ἂν ἄξω ἓν ἐπίπεδον εἰς ἴσην ἀπόςασιν τῶν κύκλων ζηθι, βγδε καὶ παραλλήλως μὲ αὐτοὺς, δῆλον ἐξ ἑαυτοῦ ὅτι ὁ γεννησόμενος κύκλος $= \frac{\text{ζηθι} + \text{βγδε}}{2}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ια'. καὶ ιβ'.

Οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κῶνοι καὶ κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις.. καὶ οἱ τῶν αὐτῶν βάσεων ἔχουσιν, ὡς τὰ ὕψη.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἷς κύλινδρος, ὡς ὁ ΑΒ (σχ. 218), εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γενόμενον ἐκ τῆς κινήσεως τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ὅπερ ὀνομάζω Α (ὅρ. ε'.), διὰ τοῦτο κυλ. ΑΒ $=$ Α $\times$ βασ. ΑΘαΙ. Ὥςε ὁ κύλινδρος ΑΒ ἕξει πρὸς πάντα ἄλλον κύλινδρον ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Καὶ ἐξ ἐναντίας, ἂν αἱ βάσεις δύο κυλίνδρων ἦναι ἴσαι ἀλλήλαις· τότε οἱ κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν οἱ κῶνοι εἶναι $= \frac{1}{3}$ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐχόντων τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ ὕψη (πρ. ί.), διὰ τοῦτο καὶ οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες τὰ αὐτὰ ὕψη ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.. καὶ ἐξ ἐναντίας οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

β'. Ἐπειδὴ καὶ εἷς κῶνος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ πυραμὶς ἔχουσα ἀπείρως σμικρὰς τὰς τριγωνικὰς πλευρὰς.. καὶ δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις (πρ. έ.), τούτου ἕνεκεν καὶ δύο ἰσοϋψεῖς κῶνοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις. Ἀλλ' εἷς κῶνος τῆς αὐτῆς βάσεώς τε καὶ ὕψους μὲ ἕνα κύλινδρον εἶναι $= \frac{1}{3}$ αὐτοῦ (πρ. ί.), ὥςε καὶ οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Πρότασις ιβ'.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν.

Ἔςωσαν ὅμοιοι κῶνοι οἱ αβγδε, αζηθι, τότε λέγω ὅτι κων. αβγδε : κων. αζηθι : : $\beta\delta^3$: $\zeta\theta^3$. σχ. 217.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, οἱ κῶνοι αβγδε, αζηθι εἶναι ὅμοιοι, διὰ τοῦτο ἔξω αΚ : ακ : : βδ : ζθ (ὅρ. ζ'.).

β'. Ἐπειδὴ καὶ αἱ βάσεις τῶν κώνων εἶναι κύκλοι.. καὶ οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (πρ. β'.), διὰ τοῦτο ἔξω βγδε : ζηθι : : $\beta\delta^2$: $\zeta\theta^2$. Ὥςε πολλαπλασιάζων τὴν πρώτην ἀναλογίαν διὰ τῆς δευτέρας, ὅρον πρὸς ὅρον, ἔξω βγδε × αΚ : ζηθι × ακ : : $\beta\delta^3$: $\zeta\theta^3$. Τώρα ἂν οἱ κῶνοι βγδε, ζηθι ἦναι ὀρθοι, τὰ γινόμενα βγδε × αΚ, ζηθι × ακ παριςῶσι τὴν ςερρότητα τῶν κώνων, καὶ ἔχουσι διὰ παράγοντας τὴν βάσιν καὶ ὕψος.. εἰ δὲ καὶ εἶναι πλάγιοι, τότε ἐγὼ κατάγων ἀπὸ τῆς κοινῆς κορυφῆς τῶν κώνων κάθετον τὴν (αλ) ἐπὶ τὰς βάσεις, οὔσας παραλλήλους, ἔξω ὅμοια τρίγωνα τὰ αΚλ, ακμ.. διότι ἡ μὲν γων. αλΚ = αμκ = 90°, ἡ δὲ γων. αΚλ = γων. ακμ (ὅρ. ζ.), ὅθεν αΚ : ακ :: αλ : αμ. Ὥςε ἡ ἀναλογία βγδε × αΚ : ζηθι × ακ :: $\beta\delta^3$: $\zeta\theta^3$ τρέπεται εἰς τὴν βγδε × αλ : ζηθι × αμ :: $\beta\delta^3$: $\zeta\theta^3$ (πρ. γ'. βιβ. ε'.).. ἀλλὰ βάσις ἐπὶ τὸ ὕψος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἡ ςερρότης τοῦ κώνου (πορ. α'. πρ. ι.), ὥςε κων. αβγδε : κων. αζηθι :: $\beta\delta^3$: $\zeta\theta^3$.

Ἀλλ' οἱ κῶνοι εἶναι $\frac{1}{3}$ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐχόντων τὰς αὐτὰς βάσεις τε καὶ ὕψη (πρ. ι.).. καὶ τὰ ὑποπολλαπλάσια ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ πολλαπλάσια (πρ. δ'.), ὥςε καὶ οἱ ὅμοιοι κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν: ὅ ἐςι 3 κων. αβγδε : 3 κων. αζηθι :: $\beta\delta^3$: $\zeta\theta^3$.

Πρότασις ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου μὲ τὰς βάσεις αὐτοῦ, ὁ ὁλικὸς κύλινδρος ἔχει πρὸς θάτερον τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὡς οἱ ἄξονες αὐτῶν.

Ἄγω εἰς τὸν κυλ. ΑΒ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν αὐτοῦ Αα καὶ μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς βΒ, καὶ λέγω ὅτι κυλ. ΑΒ : κυλ. ΑΔ :: ἀξ. ΕΖ : ἀξ. ΗΖ. σχ. 218.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, ἤχθη παραλλήλως μὲ τὰς βάσεις Αα, βΒ, τούτου ἕνεκεν οἱ κύλινδροι ΑΒ, ΑΔ εἶναι τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ διαφόρων ὕψεων, ἀλλ' οἱ κύλινδροι τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ διαφόρων ὕψεων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν (πρ. ια΄.).. ὥςε κυλ. ΑΒ : κυλ. ΑΔ :: Α : α : ὀνομασθέντων δηλονότι Α καὶ α τῶν ὕψεων αὐτῶν. Καὶ ἂν μὲν οἱ κύλινδροι ἦναι ὀρθοὶ, τότε τῶν ὕψεων αὐτῶν συμπιπτόντων μὲ τοὺς ἄξονας, ἔχω κυλ. ΑΒ : κυλ. ΑΔ :: ἀξ ΕΖ : ἀξ. ΗΖ. Εἰ δὲ καὶ οἱ κύλινδροι ἦναι πλάγιοι, τότε ἄγων ἀπὸ τοῦ πέρατος τῶν ἀξόνων αὐτῶν καθέτους ἐπὶ τῶν βάσεων, ἔξω τὰς καθέτους ἀναλόγους μὲ τοὺς ἄξονας αὐτῶν. Καθότι ἂν οἱ ἄξονες τῶν κυλίνδρων ἦναι εζ, ηζ, τότε ἄγων τὰς καθέτους Ει, ηκ, ἔξω Ει : ηκ :: εζ : ηζ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ειζ, ηκζ). Καὶ ἐπειδὴ αἱ κάθετοι ει, ηκ εἶναι αὐτὰ τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων ΑΒ, ΑΔ, διὰ τοῦτο κυλ. ΑΒ : κυλ. ΑΔ :: ἀξ. ΕΖ : ἀξ. ΗΖ.

Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τοῦ κυλίνδρου ΓΒ : ὅθεν κυλ. ΑΒ : κυλ. ΓΒ :: ἀξ. ΕΖ : ἀξ. ΕΗ.

Πόρισμα α΄.

Ὥςε ἂν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου μὲ τὰς βάσεις αὐτοῦ, τὰ τμήματα ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ ἄξονες αὐτῶν. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ κυλ. ΑΒ ἔχει πρὸς θάτερον τῶν τμημάτων ΑΔ, ΓΒ, ὡς οἱ ἄξονες αὐτῶν, διὰ τοῦτο καὶ κυλ. ΑΔ : κυλ. ΓΒ :: ἀξ. ΗΖ : ἀξ. ΕΗ.

Πόρισμα β΄.

Ἂν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου μὲ τὰς βάσεις αὐτοῦ, τότε καὶ ὁ ὁλικὸς κύλινδρος θέλει εἶναι ὅμοιος καὶ μὲ ἑκάτερον τῶν τμημάτων καὶ τὰ τμήματα πρὸς ἄλληλα.

Πρότασις ιε'.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη.. καὶ ἐκεῖνοι οἱ κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν περ αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη, εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἷς κύλινδρος δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος (ὅρ. ε'.), διὰ τοῦτο ἂν ὀνομάσω Κ τὴν ςεῤῥότητα ἑνὸς κυλίνδρου, Α τὸ ὕψος αὐτοῦ, καὶ Β τὴν βάσιν, ἔξω Κ = ΑΒ.. καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ κ = αβ εἰς ἕνα ἄλλον κύλινδρον. Ὥςε ἂν οἱ δύο κύλινδροι ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις: ὅ ἐςιν ἂν Κ = κ, τότε καὶ τὰ τούτων ἴσα θέλουσιν εἶναι ἴσα: τουτέςι ΑΒ = αβ.. ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ἀναλογίαν, διὰ τοῦτο Α : α :: β : Β.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ οἱ κῶνοι εἶναι τριτημόριον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐχόντων τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ ὕψη (πρ. ι'.).. καὶ ἐπειδὴ ἂν τὰ πολλαπλάσια ἦναι ἀνάλογα, εἶναι ὡσαύτως καὶ τὰ ὑποπολλαπλάσια (πρ. δ'. βιβ. ε'.), διὰ τοῦτο ἂν δύο κῶνοι ἦναι ἴσοι κατὰ τὴν ςεῤῥότητα καὶ Α, α τὰ ὕψη αὐτῶν καὶ Β, β αἱ βάσεις αὐτῶν, τότε Α : α :: β : Β.

Ἔςω τώρα Α : α :: β : Β: ὅ ἐςιν ἂς ἀντιπάσχωσι δύο κυλίνδρων αἱ βάσεις μὲ τὰ ὕψη. Τότε ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἀναλογία τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, ἔξω ΑΒ = αβ. Καὶ ἐπειδὴ εἷς κύλινδρος δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος (ὅρ. ε'), διὰ τοῦτο ΑΒ =

Κ, καὶ αβ = κ, καὶ ἑπομένως Κ = κ : τουτέστιν ἡ στερρότης τῶν κυλίνδρων εἶναι ἴση. Ἀλλ' ἂν Κ = κ, τότε καὶ $\frac{K}{3} = \frac{\kappa}{3}$: τουτέστι καὶ ἡ στερρότης τῶν κώνων, ἂν αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ἦναι ἴσα, εἶναι ἴση (πρ. ί.).

Πρότασις ιϛ'.

Εἰς τὸν μείζονα δύο ὁμοκέντρων κύκλων νὰ ἐγγράψῃ τις πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ οἱ δύο δοθέντες κύκλοι καὶ Κ τὸ κοινὸν αὐτῶν κέντρον. σχ. 219.

Ἄγω τὴν ΑΓ διάμετρον τοῦ μείζονος κύκλου, ὡσαύτως καὶ τὴν ΔΗ ἐφαπτομένην τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, διάγων αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Θ τοῦ μείζονος κύκλου, καὶ οὕτως ἔχω γων. ΗΔΑ = γων. ΗΔΓ.. τέμνω τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ δίχα κατὰ τὸ Β σημεῖον (πρ. λ'. βιβ. γ'.), ὡσαύτως καὶ τὸ τόξον ΑΒ, καὶ τοῦτο συνεχῶς ἕως οὗ τὸ σημεῖον τῆς διατομῆς νὰ παρεμπέσῃ μεταξὺ τοῦ Η σημείου καὶ Α, καὶ ἔσω τὸ λ σημεῖον.. ἀπ' αὐτοῦ λοιπὸν ἄγω τὴν ΛΜ παράλληλον μὲ τὴν ΗΘ, καὶ διὰ τοῦτο πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν διάμετρον ΓΑ.. ἄγω τὰς χορδὰς ΑΛ, ΑΜ, αἵτινες δηλονότι θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.. διότι τὸ τοξ. ΑΛ = τοξ. ΑΜ. Ἂν λοιπὸν ἐφαρμόσω κατὰ τὸ συνεχὲς εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθείας ἴσας μὲ τὴν ΑΛ, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον, ὅπερ θέλει εἶναι καὶ ἀρτιόπλευρον διὰ τὴν εἰς δίχα διαίρεσιν τῆς περιφερείας, καὶ οὔτε θέλει ψαύει τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ΔΕΖ.. διότι ἂν ἡ ΛΜ δὲν ἐφάπτηται αὐτοῦ, ἔτι μᾶλλον δὲν θέλουσιν ἐφάπτονται αὐτοῦ αἱ ΑΛ, ΑΜ.

Πόρισμα.

Ὥστε τὸ ἐγγραφὲν πολύγωνον, ὡς διαιρεθείσης δίχα κατὰ τὸ συνεχὲς τῆς ἡμιπεριφερείας, διαιρεῖται ὑπὸ τετράδος.

Πρότασις ιζʹ.

Εἰς τὴν μείζονα δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν νὰ ἐγγράψῃ τις στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι, ἢ καὶ τεταρτημόρια σφαιρῶν ὁμόκεντρα, κοινὸν κέντρον ἔχοντα τὸ Κ. σχ. 220.

Τέμνω διάτινος ἐπιπέδου τὰς δοθείσας ὁμοκέντρους σφαίρας διὰ τοῦ κέντρου Κ, ἔνθα ἡ τομὴ θέλει εἶναι μέγιστος κύκλος (ὅρ. ιʹ.), οὗτινος ἔστωσαν κοδράνται οἱ ΑΒ, ΝΕ καὶ ἡμιδιάμετροι αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΝ, ΚΕ. Εἰς τὸν κοδράντην λοιπὸν ΑΒ ἐγγράφω πολύγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΗΔΒ μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ΑΕ (πρ. ιςʹ.).

Τέμνω ὡσαύτως διὰ δευτέρου ἐπιπέδου τὰς δοθείσας ὁμοκέντρους σφαίρας διὰ τοῦ κέντρου Κ, ἔνθα ἡ τομὴ θέλει εἶναι μέγιστος κύκλος, οὗτινος ἔστωσαν κοδράνται οἱ ΑΓ, ΝΜ, καὶ ἡμιδιάμετροι αἱ ΚΑ, ΚΓ, ΚΝ, ΚΜ. Εἰς τὸν κοδράντην λοιπὸν ΑΓ ἐγγράφω πολύγωνον τὸ ΑΛΟΓ ἰσόπλευρον μὲ τὸ ΑΗΔΒ. ζευγνύω τὰς γωνίας τῶν δύο πολυγώνων διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΔΟ, ΗΛ. ἄγω εἰς τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν εὐθείας παραλλήλους μὲ αὐτὰς τὰς ΕΜ, ΠΩ, ΡΣ, καὶ λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον ἔλαβε πέρας.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ αἱ πλευραὶ ΒΔ, ΓΟ τῶν εἰς τοὺς μείζονας κύκλους ἐγγεγραμμένων πολυγώνων δὲν ψαύουσι τῶν κύκλων τῆς μικρᾶς σφαίρας, δῆλον ὅτι ἂν ἄξω δι' αὐτῶν ἐπίπεδον τὸ ΒΔΟΓ δὲν θέλει ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὸ μέρος ΕΠΩΜ.. ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον ΒΔΟΓ ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἕδρα πολυέδρου ςερεοῦ.. ὥςε ἂν ἄξω κατὰ τὸ συνεχὲς τοιαύτας ὁμοίας ἕδρας ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔξω τὸ ζητούμενον ςερεὸν πολύεδρον ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ μηδόλως ψαῦον τῆς ἐλάσσονος κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὥςε ἂν ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ καὶ παράλληλοι μὲ τὰς εὐθείας ΒΔ, ΓΟ, ΒΓ, ΔΟ (ὡσαύτως δηλονότι καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἕδρας), ἔχει νὰ περιγραφῇ πολύεδρον ςερεὸν ὅμοιον μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Τὸ πολύεδρον λοιπὸν τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον, ὡσαύτως καὶ τὸ περιγεγραμμένον, εἶναι κεφάλαιον πυραμίδων, βάσιν μὲν ἐχουσῶν τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Καθότι ἂν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἄξω τέσσαρας ἀκτίνας εἰς τὰ σημεῖα Β, Δ, Ο, Γ ἔξω μίαν πυραμίδα τετράπλευρον τὴν ΚΒΟΓ.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Τὰ ὅμοια πολύεδρα τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα εἰς τὰς σφαίρας ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῶν. Καθότι ἂν ἐγγράψω καὶ εἰς τὴν μικρὰν ὁμόκεντρον σφαῖραν πολύεδρον ὅμοιον μὲ τὸ εἰς τὴν μείζονα, ἔξω πυραμίδας καὶ ἰσαρίθμους καὶ ὁμοταγεῖς, αἵτινες δηλονότι θέλουσιν εἶναι ὅμοιαι μὲ τὰς εἰς τὴν μείζονα (πορ. α'. πρ. γ'.).. ἀλλ' αἱ ὅμοιαι πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολογων αὐτῶν πλευρῶν (πρ. η΄.).. ὥςε πυρ. ΚΒΔΟΓ : πυρ. ΚΕΠΩΜ :: ΚΒ³ : ΚΕ³. Ἀλλὰ τὰ ἐν ταῖς σφαίραις ἐγγεγραμμένα πολύεδρα εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ κεφάλαιον πυραμίδων (πορ. β΄.) .. καὶ ἅπασαι αὗται ἔχουσι δὲ ὁμολόγους πλευρὰς τὰς ἡμιδιαμέτρους τῶν σφαιρῶν .. καὶ ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἔχουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον (πρ. α΄. βιϐ. ε΄.).. Ὥςε...

Πόρισμα δ΄.

Τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον πολύεδρον, ὡσαύτως καὶ τὸ περὶ τὴν σφαῖραν, εἶναι δυνατὸν νὰ διαφέρῃ τῆς σφαίρας κατὰ τὴν ςεῤῥότητα ἔλασσον πάσης δοθείσης ποσότητος. Καθότι ἂν ἡ ἡμιδιάμετρος ΚΒ τῆς μείζονος σφαίρας ὑπερεῖχεν ἀπειροςῶς τὴν ἡμιδιάμετρον ΚΕ τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, τότε ἐπειδὴ καὶ τὸ ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ ἐγγραφθησόμενον πολύεδρον δὲν ἤθελε ψαύεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας: ὅ ἐςιν ἤθελεν εἶναι μεῖζον αὐτῆς κατὰ τὴν ςεῤῥότητα, ἥτις δηλονότι ὑπερέχεται ἀπειροςῶς ὑπὸ τῆς μείζονος σφαίρας, τὸ πολύεδρον ἤθελεν ὑπερέχεται ὑπὸ τῆς μείζονος σφαίρας ἔτι ἀπειροςῶς: ὅ ἐςιν ἔλασσον πάσης πεπερασμένης δοθείσης ποσότητος.

Πρότασις ιη΄.

Αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύϐοι τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Ἐγγράφω εἰς δύο ὁμοκέντρους σφαίρας πολύεδρα ὅμοια, ὡς τὰ ΒΓΟΔ, ΕΠΩΜ κτξ. (σχ. 220). (πρ. ζ.), ὧνπερ δηλονότι αἱ ςεῤῥότητες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἡμιδιαμέτρων (πορ. γ΄. πρ. ιζ΄.). περιγράφω περὶ τὰς εἰρημένας σφαίρας πολύεδρα ὅμοια μὲ τὰ ἐγγεγραμμένα (πορ. α΄. τῆς αὐτῆς), ἅπερ δηλονότι καὶ ταῦτα ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἡμιδιαμέτρων (πρ. ια΄. βιβ. ε΄.).

Ἀλλ' ἐγὼ δύναμαι νὰ σμικρύνω τὰς ἕδρας ἀκαταπαύστως τῶν τε ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων πολυέδρων, ὥστε ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὡς πρὸς τὰς σφαίρας νὰ ἦναι ἐλάσσων πάσης δοθείσης ποσότητος (πορ. δ΄. τῆς αὐτῆς).. καὶ ἐπειδὴ κατ' αὐτὸν τὸν σμικρυσμὸν ὁ νόμος δὲν μηδενίζεται: ὅ ἐστιν αἱ στερρότητες τῶν πολυέδρων δὲν παύουσιν ἀπὸ τοῦ νὰ ἔχωσι πάντοτε, ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων, τούτου ἕνεκεν ἂν ἐγὼ σμικρύνω τὰς ἕδρας τῶν πολυέδρων ἀπείρως, ὥστε τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα πολύεδρα νὰ συμπέσωσιν, οὐδαμῶς ὀλιγώτερον καὶ τότε ταῦτα ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἡμιδιαμέτρων. Ἀλλὰ τὰ τοιαῦτα πολύεδρα ἅπαντα ὁμοῦ κυρίως ἄλλο δὲν θέλουσιν εἶναι, εἰμὴ αὐταὶ αἱ σφαῖραι.. ὥστε καὶ αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων.

Ἔπειτα ἡμεῖς εἴδομεν ὅτι τὰ ὅμοια παραλληλεπίπεδα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (πρ. λγ΄. βιβ. ια΄.), ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ πυραμίδες (πρ. η΄.), καὶ οἱ κῶνοι, καὶ κύλινδροι (πρ. ιβ΄.).. ὅμοια δὲ στερεὰ σχήματα κυρίως ἄλλο δὲν εἶναι, ἢ γενόμενα ἐκ κινήσεως ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ὁμοίως ἀρχομένων τῆς κινήσεως (ὅρ. θ΄. βιβλ. ια΄., καὶ ὅρ. ζ. βιβ. ιβ΄.). Ἀλλὰ καὶ τὰ ἡμικύκλια τί ἄλλο εἶναι, εἰμὴ σχήματα ὅμοια (πορ. β΄. πρ. β΄.); Αἱ δὲ σφαῖραι πῶς ἄλλως γεννῶνται, εἰμὴ διὰ τῆς ὁμοίας κινήσεως, ἢ περιστροφῆς τῶν ἡμικυκλίων περὶ τὴν ἰδίαν διάμετρον (ὅρ. η΄.); Ὥστε καὶ αἱ σφαῖραι πρέπει νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κῶνοι τῶν ἰδίων ἡμιδιαμέτρων.

Τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου

ΤΕΛΟΣ.