αὐτῆς, καὶ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου.

ί. Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἠγμένη διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τῆς περιφερείας. Καὶ κύκλοι μὲν μεγάλοι λέγονται πᾶσα τομὴ κύκλου διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἔχουσα διάμετρον τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, κύκλοι δὲ μικροί, πᾶσα τομὴ κύκλου μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη.

Πρότασις ά.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔςωσαν ὅμοια σχήματα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ, ὧνπερ ἔςω ΑΛ, ΖΜ διάμετρος, τότε λέγω ὅτι ΑΒΓΔΕ: ΖΗΘΙΚ: : $ΑΛ^2$: $ΖΜ^2$. σχ. 209.

Ἀπὸ μὲν τοῦ σημείου Ε ἄγω τὰς εὐθείας ΕΛ, ΕΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ, τὰς ΚΜ, ΚΗ.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΒΑΕ, ΗΖΚ ἐγὼ ἔχω γων. ΒΑΕ = γων. ΗΖΚ, καὶ ΑΒ : ΑΕ : : ΖΗ : ΖΚ, διὰ τὴν ὁμοιότητα δηλονότι τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων (ὅρ. ά. βιβ. ς'.), ὥςε τὰ τρίγωνα ΒΑΕ, ΗΖΚ εἶναι ἰσογώνια (πρ. ς'. βιβ. ς'.): τουτέςιν ἡ γων. ΑΒΕ = γων. ΖΗΚ. Ἀλλ' ἡ μὲν γων. ΑΒΕ = γων. ΑΛΕ, ἡ δὲ γων. ΖΗΚ = ΖΜΚ, καθὸ γωνίαι ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι, διὰ τοῦτο γων. ΑΛΕ = γων. ΖΜΚ (ἀξ. ά.). Εἰς τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΛΕΑ, ΚΖΜ ἐγὼ ἔχω τὴν μὲν γων. ΑΛΕ = γων. ΖΜΚ, τὴν δὲ γων ΛΕΑ = γων. ΜΚΖ: καθὸ ἐν ἡμικυκλίῳ, ὥςε τὰ τρίγωνα ΕΑΛ, ΚΖΜ εἰκαὶ ὅμοια (πρ. δʹ. βιβ. ϛʹ.), καὶ διὰ τοῦτο ΑΛ : ΑΕ : : ΖΜ : ΖΚ, καὶ ἐναλὰξ ΑΛ : ΖΜ : : ΑΕ : ΖΚ, καὶ ἑχομένως $ΑΛ^2$: $ΖΜ^2$: : $ΑΕ^2$: $ΖΚ^2$ (πορ. βʹ. πρ. δʹ. βιβ. εʹ.)· ἀλλὰ πολυγ. ΑΒΓΔΕ : πολυγ. ΖΗΘΙΚ : : $ΑΕ^2$: $ΖΚ^2$ (πρ. κʹ. βιβ. ϛʹ.), ὥστε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων καὶ πολυγ. ΑΒΓΔΕ : πολυγ. ΖΗΘΙΚ : : $ΑΛ^2$: $ΖΜ^2$.

Πόρισμα αʹ.

Ὥστε καὶ τὰ περὶ τοὺς κύκλους ὅμοια πολύγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ περιγεγραμμένα εἶναι ὅμοια, καθὸ τακτικά, μὲ τὰ ἐγγεγραμμένα πολύγωνα· καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (πρ. κʹ. βιβ. ϛʹ.)· καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, κατὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας πρότασιν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, διὰ τοῦτο καὶ τὰ περιγεγραμμένα ὅμοια πολύγωνα ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Πόρισμα βʹ.

Αἱ περίμετροι τῶν ἐν τοῖς κύκλοις καὶ περὶ τοὺς κύκλους τακτικῶν πολυπλεύρων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διάμετροι ἢ αἱ ὑποδιάμετροι τῶν κύκλων. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ἔξω ΑΕ : ΖΚ : : ΕΔ : ΚΙ : : ΔΓ : ΙΘ : : ΓΒ : ΘΗ : : ΒΑ : ΗΖ : : ΑΛ : ΖΜ, ἀλλ' ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἑπόμενον, διὰ τοῦτο ΑΕ + ΕΔ + ΔΓ + ΓΒ + ΒΑ : ΖΚ + ΚΙ + ΙΘ + ΘΗ + ΗΖ + ΖΜ : : ΑΕ : ΖΚ : : ΑΛ :

ΖΜ : $\frac{ΑΛ}{2}$: $\frac{ΖΜ}{2}$: : Α : α ; ὀνομασθεισῶν δηλονότι Α καὶ α τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων.

Π ρ ό τ α σ ι ς β'.

Οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμετρῶν.

Εἰς τοὺς κύκλους ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἔστωσαν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΕΗ, τότε λέγω ὅτι ἐμϐ. ΑΒΓΔ : ἐμϐ. ΕΖΗΘ : : $ΑΓ^2$; $ΕΗ^2$. σχ. 210.

Τὰ ἐν κύκλοις τακτικὰ ὅμοια πολύγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (πρ. α'), ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ περὶ τοὺς κύκλους ὅμοια μὲ τὰ ἐγγεγραμμένα (πορ. α'. πρ. α'.).. ἀλλ' ὅσον καὶ ἂν σμικρύνῃ τις τὰς πλευρὰς τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων, τοσοῦτον ἡ περίμετρος αὐτῶν πλησιάζει εἰς τὸν κύκλον, εἴτε εἰς τὴν σύμπτωσιν καὶ ἐφαρμογὴν αὐτῶν.. ὥςε ἂν σμικρύνω ἀπείρως τὰς πλευρὰς καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου τακτικοῦ πολυγώνου, ἀμφότερα ἔχουσι νὰ συμπέσωσι μὲ τὸν κύκλον καὶ νὰ μεταϐληθῶσιν εἰς κύκλον. Καὶ ἐπειδὴ καθ' ὁδὸν : ἐν ᾧ λέγω ἐσμικρύνετο τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν τῶν ὁμοίων πολυγώνων, τὰ ἐμϐαδὰ αὐτῶν δὲν ἔλλειψαν ἀπὸ τοῦ νὰ διαμένωσι πάντοτε πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα καὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (πρ. κ'. βιϐ. ς'.) καὶ τῶν διαμέτρων (πρ. α'.), ἑπόμενον εἶναι καὶ εἰς τὸ πέρας τοῦ σμικρυσμοῦ αὐτῶν νὰ μὴ μηδενισθῇ ἢ νὰ διαφθαρῇ ὁ λόγος τῶν ἐμϐαδῶν τῶν πολυγώνων ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, εἴτε τῶν κύκλων ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων διαμέτρων. Ὥςε...

Π ό ρ ι σ μ α α΄.

Ὥςε οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ἐν αὐτοῖς, ἢ τὰ περὶ αὐτοὺς περιγεγραμμένα πολύγωνα. α΄. Καθότι οἱ κύκλοι εἶναι ὅρια καὶ τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν αὐτοῖς, καὶ τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων, καὶ β΄. διότι ἑκάτερα ἔχουσιν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων τῶν κύκλων.

Π ό ρ ι σ μ α β΄.

Οἱ κύκλοι εἶναι τακτικὰ σχήματα ὡς τοῦτο εἴδομεν (πορ. β΄. πρ. β΄. βιβ. ς΄.). Καθότι ἂν οἱ κύκλοι ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.. καὶ ἂν τὰ τακτικὰ σχήματα ἔχωσιν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (πρ. α΄.), δῆλον ὅτι καὶ οἱ κύκλοι εἶναι τακτικὰ σχήματα ἔχοντα καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἀπειροςάς.

Π ό ρ ι σ μ α γ΄.

Ὥςε αἱ περίμετροι τῶν κύκλων, εἴτε αἱ περιφέρειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διάμετροι ἢ αἱ ὑποδιάμετροι τῶν κύκλων, κατὰ δὲ τὸν Ἀρχιμήδην ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὡς 7 πρὸς 22.

Π ρ ό τ α σ ι ς γ΄.

Πᾶσα πυραμὶς τριγωνικὴ διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας τριγωνικὰς ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ μὲ τὴν ὅλην, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἅπερ εἶναι μείζονα τῆς ἡμισείας ὁλικῆς πυραμίδος.

Ἔςω ΑΒΓΔ ἡ τριγωνικὴ δοθεῖσα πυραμίς. σχ. 211.

Τέμνω δίχα ἅπαντα τὰ πλευρὰ τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Ι.. καὶ ἐκ τῶν τομῶν ἄγω τὰς εὐθείας ΕΖ, ΕΗ, ΕΙ, ΖΗ, ΖΚ, ΗΙ, ΗΚ, ΘΙ, ΘΚ, ΚΙ.

Τώρα ἐπειδὴ καὶ ἅπασαι αὗται αἱ εὐθεῖαι τέμνουσι δίχα τὰ πλευρὰ τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων, διὰ τοῦτο τὰ τέμνουσιν ἀναλόγως (πρ. β΄. λιб. ς΄.).. ὥςε ἅπαντα τὰ τρίγωνα τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ εἶναι ἰσάριθμα καὶ ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα τῆς πυραμίδος ΑΕΗΖ, ἕκαςον ἑκάςῳ, καὶ διὰ τοῦτο αἱ πυραμίδες ΑΒΓΔ, ΑΕΗΖ εἶναι ὅμοιαι (ὅρ. θ΄. βιб. ια΄.). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἅπαντα τὰ τρίγωνα τῶν πυραμίδων ΑΒΓΔ, ΕΒΙΘ εἶναι καὶ ἰσάριθμα καὶ ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιαι καὶ αὗται αἱ πυραμίδες.. Ὥςε ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΕΗΖ εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΒΙΘ. Πλὴν εἶναι ὄχι ὀλιγώτερον καὶ ἴσαι ἀλλήλαις. Καθότι ἅπαντα τὰ περιέχοντα αὐτὰς τρίγωνα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, ἕκαςον ἑκάςῳ.. διότι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΕΒΘ ἡ μὲν ΑΕ = ΕΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ δὲ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι, ἑκάςη ἑκάςῃ, διὰ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν, διὰ τοῦτο τρίγ. ΑΕΖ = τριγ. ΕΒΘ (πρ. δ΄. βιб. α΄.).. ὥςε ἡ πυρ. ΑΕΗΖ = πυρ. ΕΒΙΘ (ὅρ. ι΄. βιб. ια΄.).

β΄. Τὸ πρισ. ΕΙΓΗΚΘ = πρισ. ΕΗΖΔΚΘ (πρ. μ΄. βιб. ια΄.). Καθότι ἀμφότερα μὲν ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, θάτερον δ᾽ ἔχει διὰ βάσιν παραλληλόγραμμον διπλάσιον τῆς τριγωνικῆς βάσεως τοῦ ἑτέρου: τουτέςι τὸ παραλ. ΘΙΓΚ = 2 τριγ. ΘΚΔ, ὄντων δηλονότι τοῦ μὲν τριγ. ΘΚΔ = τριγ. ΘΚΙ (πρ. λδ'. βιβ. α'.), τοῦ δὲ τριγ. ΘΚΙ = τριγ. ΚΙΓ, ὡς ὄντος ἑκάςου αὐτῶν ὑποδιπλασίου παραλληλογράμμου.

γ'. Ἂν ἡ ὁλόκληρος πυρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΑΕΗΖ + πυρ. ΕΒΙΘ + πρισ. ΕΙΓΗΚΘ + πρισ. ΕΗΖΔΚΘ, ὡς ὅλον καὶ μέρη.. καὶ ἂν τὸ ἐν πρισ. ΕΙΓΠΚΘ > πυρ. ΗΙΚΓ, ὡς ὅλον καὶ μέρος, ἤ τις εἶναι = πυρ. ΕΒΘΙ, δῆλον ὅτι πρισ. ΕΙΓΗΚΘ + πρισ. ΕΗΖΔΚΘ > πυρ. ΑΕΗΖ + πυρ. ΕΒΙΘ.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὥςε εἰς πυραμίδα πᾶν ἐπίπεδον ἀχθὲν παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν αὐτῆς, ἀφαιρεῖ ἀπὸ τῆς πυραμίδος πυραμίδα ὁμοίαν μὲ τὴν ὅλην.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ὥςε ἡ βάσις τῆς γενομένης πυραμίδος ἐκ τῆς παραλλήλου τομῆς μὲ τὴν βάσιν, εἶναι σχῆμα ὅμοιον μὲ τὴν βάσιν.. ἂν δ' ἡ τομὴ γένη κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς πυραμίδος, ἡ γενομένη βάσις θέλει εἶναι ὑποτετραπλασία τῆς βάσεως τῆς δοθείσης πυραμίδος. Καθότι τριγ. ΕΗΖ = τριγ. ΒΙΘ = τριγ. $\frac{\text{ΒΓΔ}}{4}$, ὡς ἔχον ἥμισυ ὕψος καὶ ἡμίσειαν βάσιν (πορ. γ' πρ. α'. βιβ. ς'.).

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς πυραμίδος, τακτικῆς ὅμως, εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἥμισυ ἀπόθεμα, εἴτε ὕψος, ὡς οὔσης δηλονότι τῆς περιμέτρου βάσεις τριγώνων (πορ. γ'. πρ. α'. βιβ. ς'.).

Πόρισμα. δ'.

Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς κολούρου πυραμίδος, τακτικῆς ὅμως, εἶναι ἴση μὲ τὰς δύο περιμέτρους τῶν βάσεων πολλαπλασιασθείσας ἐπὶ τὸ ἥμισυ ἀπόθεμα, εἴτε ὕψος. Οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ςερεοῦ βγδ ΔΓΒ $=$ (βγ $+$ γδ $+$ δβ $+$ ΒΓ $+$ ΓΔ $+$ ΔΒ) $\frac{\text{Α}}{2} = \frac{(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} + \text{ΔΒ})}{2}$ Α, Α ὄντος τοῦ ὕψους τῶν τραπεζίων. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἕκασον τραπέζιον ἔχει παραλλήλους τὰς δύο ἀπεναντίον πλευρὰς, διὰ τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ δύο τρίγωνα ἔχοντα βάσεις αὐτὰς τὰς παραλλήλους, καὶ ὕψος τὴν τούτων διάςασιν. Οὕτω τραπεζ. βΒΔδ $=$ τριγ. βΔΒ $+$ τριγ. βΔδ $= \frac{\text{ΒΔ}}{2} \times \text{Α} + \frac{\beta\delta}{2} \times \text{Α}$ (πορ. γ'. πρ. α'. βιβ. ς'.). σχ. 213.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν δύο ἰσοϋψεῖς τριγωνικαὶ πυραμίδες διαιρεθῶσιν εἰς δύο πυραμίδας τριγωνικὰς ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ μὲ τὴν ὅλην, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα.. καὶ αἱ γενόμεναι πυραμίδες διαιρεθῶσιν, ὡς αἱ ὅλαι, καὶ τοῦτο γένηται ἀεὶ, τότε τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα ἔξουσι πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ, ὡς ἡ βάσις τῆς μιᾶς πρὸς τὴν βάσιν τῆς ἑτέρας.

Ἔςωσαν τοῦ αὐτοῦ ὕψους αἱ πυραμίδες ΑΒΓΔ, ΛΜΟΝ, καὶ τετμημέναι ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρῳ προτάσει, καὶ ἂς ὑποδιαιρεθῶσιν αἱ δεύτεραι αὐτῶν πυραμίδες ΕΒΙΘ, ΡΜΣΤ, ὡς αἱ ὅλαι, τότε λέγω ὅτι τὰ ἐν τῇ μιᾷ πρίσματα ἔχουσι πρὸς τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ, ὡς ΒΓΔ πρὸς ΜΟΝ. σχ. 211 καὶ 212.

Τὰ πρίσματα ΕΗΖΔΚΘ, ΡΠΩΝΥΤ εἶναι τοῦ αὐτοῦ ὕψους, ὡς ἔχοντα τὸ ἥμισυ ὕψος ἰσοϋψῶν πυραμίδων. ἀλλὰ τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις (πρ. λβ΄. βιβ. ια΄.). ὥστε πρισ. ΕΗΖΔΚΘ : πρισ. ΡΠΩΝΥΤ : : βασ. ΘΔΚ : βασ. ΤΝΥ : : βασ. $\frac{\text{ΒΓΔ}}{4}$: βασ. $\frac{\text{ΜΟΝ}}{4}$ (πόρ. β΄. πρ. γ΄.) : : βασ. ΒΓΔ : βασ. ΜΟΝ. Πολλαπλασιάζω τὸν πρῶτον λόγον διὰ τοῦ 2, καὶ ἔχω 2 πρισ. ΕΗΖΔΚΘ : 2 πρισ. ΡΠΩΝΥΤ : : βασ. ΒΓΔ : βασ. ΜΟΝ.

Τώρα ἂν ὑποδιαιρέσω τὰς δύο πυραμίδας ΕΒΙΘ, ΡΜΣΤ, ὡς τὰς ὅλας ΑΒΓΔ, ΛΜΝΟ, αἵτινες δηλονότι εἶναι ἰσοϋψεῖς, ὡς ἔχουσαι τὸ ἥμισυ δύο ἰσοϋψῶν πυραμίδων, τὰ ἐν ταύταις ἐσόμενα δύο πρίσματα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ τῶν πυραμίδων βάσεις. Ἀλλ' αἱ τῶν πυραμίδων ΕΒΙΘ, ΡΜΣΤ βάσεις εἶναι $\frac{1}{4}$ τῆς βάσεως τῶν ὁλικῶν πυραμίδων. καὶ τὰ τεταρτημόρια εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἀνάλογα (τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῇ, καὶ ἂν ἐγίνετο καὶ δευτέρα καὶ τρίτη ὑποδιαίρεσις τῶν γενομένων πυραμίδων). ὥστε ἅπαντα τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα ἔχουσι πρὸς τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ, ὡς αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥστε ἐπειδὴ αἱ δύο τομαὶ ΕΗΖ, ΡΠΩ εἶναι ὅμοιαι μὲ τὰς βάσεις ΒΓΔ, ΜΟΝ (πόρ. β΄. πρ. γ΄.) καὶ $\frac{1}{4}$ αὐτῶν, διὰ τοῦτο ἂν βασ. ΒΓΔ = βασ. ΜΟΝ, τότε καὶ ἐπιπ. ΕΗΖ = ἐπιπ. ΡΠΩ.

Πρότασις. ε΄.

Αἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις.

Ἔςωσαν τοῦ αὐτοῦ ὕψους πυραμίδες ΑΒΓΔ, ΛΜΟΝ, τότε λέγω ὅτι πυρ. ΑΒΓΔ : πυρ. ΛΜΝΟ : : βασ. ΒΓΔ : βασ. ΜΟΝ. σχ. 211 καὶ 212.

Ἂν κινήσω τὴν βάσιν ΒΓΔ τῆς πυραμίδος παραλλήλως ἑαυτῇ μέχρι τοῦ σημείου Α, ὥςε καὶ νὰ ἔχῃ σημεῖα καθ᾽ ὁδὸν καὶ νὰ σμικρύνηται συνεχῶς, ὥςε εἰς τὸ σημεῖον Α νὰ μεταβληθῇ εἰς σημεῖον, τὸ γενόμενον ςερεὸν θέλει εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ (ἔρ. β΄.). Ὥςε ὀνομασθείσης Α τῆς ὁδοῦ, καθ᾽ ἣν κινεῖται ἡ βάσις, τουτέςι τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος, τότε ἡ ςερρότης τῆς πυραμίδος = Α × βασ. ΒΓΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ςερρότης τῆς πυραμίδος ΛΜΟΝ = α × βασ. ΜΟΝ, ὀνομασθέντος α δηλονότι τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος. Ἀλλὰ δύο ἴσων, διαιρουμένων δι᾽ ἴσων, ἡ ἐξίσωσις φθείρεται ὁλοτελῶς, διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{\text{πυρ. ΑΒΓΔ}}{\text{πυρ. ΛΜΝΟ}} = \frac{\text{Α} \times \text{βασ. ΒΓΔ}}{\text{α} \times \text{βασ. ΜΟΝ}} = \frac{\text{βασ. ΒΓΔ}}{\text{βασ. ΜΟΝ}}$, ὡς ὑποτεθέντος Α = α, ὥςε πυρ. ΑΒΓΔ : πυρ. ΛΜΟΝ : : βασ. ΒΓΔ : βασ. ΜΟΝ.

Πόρισμα. α΄.

Ὥςε ἂν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ ἴσας τὰς βάσεις, αὗται θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως εἰς τὰς πυραμίδας ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ἔξω ἡ μὲν βάσις ΒΓΔ = βασ. ΖΗΘ, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα ἀλλήλοις, τότε πυρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΕΖΗΘ.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ἂν εἰς πυραμίδας ἴσας τὸ ὕψος καὶ τὰς βάσεις, ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα μὲ τὰς βάσεις καὶ εἰς ἴσην ἀπόςασιν ἀπ' αὐτῶν, αἱ ἀφαιρεθησόμεναι πυραμίδες θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἂν ἄξω τὰ ἐπίπεδα βγδ, ζηθ παραλλήλως μὲ τὰς βάσεις ΒΓΔ, ΖΗΘ καὶ κατὰ ἴσον ἀπόθεμα, τότε πυρ. Αβγδ = πυρ. Εζηθ (σχ. 213).. διότι δηλονότι ἔχουσι καὶ τὰ ὕψη ἴσα, καὶ τὴν βασ. βγδ = βασ. ζηθ, ὡς οὔσης τῆς μὲν βδ = ζθ, τῆς δὲ βγ = ζη, τῆς δὲ γδ = ηθ (πρ. δ'. βιβ. α'.): ἢ βάσεων ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχουσῶν ἴσας ςερεὰς γωνίας τὰς Α, Ε.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Ἂν εἰς μίαν πυραμίδα ἀχθῇ ἐπίπεδον παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν καὶ κατὰ τὸ μέσον, ἡ ἀφαιρεθησομένη πυραμὶς θέλει εἶναι $= \frac{1}{8}$ τῆς ὅλης. Καθότι ἔςω τὸ ἐπίπεδον βγδ παράλληλον μὲ τὴν βάσιν ΒΓΔ καὶ κατὰ τὸ μέσον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ, τότε ἡ μὲν πυραμ. ΑΒΓΔ = $Α \times ΒΓΔ$, ἡ δὲ πυρ. Αβγδ $= \frac{Α}{2} \times ΒΓΔ$, ὀνομασθέντων δηλ. Α, $\frac{Α}{2}$ τῶν ὕψεων τῶν πυραμίδων. Ἀλλὰ τριγ. βγδ = τριγ. $\frac{ΒΓΔ}{4}$ (πορ. β'. πρ. γ'.).. ὥςε πυρ. Αβγδ = $\frac{Α}{2} \times \frac{ΒΓΔ}{4}$ = πυρ. $\frac{ΑΒΓΔ}{8}$. Καὶ ἐχομένως κολουρ. πυρ. δγβ ΒΓΔ : πυρ. ΑΒΓΔ : : 7 : 8, καὶ διὰ τοῦτο 2 πριτ.

ΕΙΓΗΚΘ : πυρ. ΑΒΓΔ : : 5 : 8, καὶ ἐντεῦθεν πρισ. ΕΙΓΗΚΘ $= \frac{5}{16}$ πυρ. ΑΒΓΔ. σχ. 212.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Ἂν εἰς μίαν πυραμίδα ἀχθῇ ἐπίπεδον παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν καὶ εἰς $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τῆς βάσεως, ἡ ἀφαιρεθησομένη πυραμὶς θέλει εἶναι $\frac{1}{64}$ τῆς ὅλης. Οὕτως ἂν ἄξω εἰς τὴν πυραμίδα Αβγδ ἐπίπεδον παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν βγδ καὶ κατὰ τὸ μέσον, αὕτη θέλει εἶναι $= \frac{1}{8}$ πυρ. Αβγδ. (πόρ. γ'.), καὶ διὰ τοῦτο $= \frac{1}{8 \times 8}$ τῆς πυρ. ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ τὸ μέσον τῆς πυραμίδος Αβγδ εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ.. Ὥςε...

Π ό ρ ι σ μ α ε'.

Ἐὰν δύο ἰσοϋψῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, διαιρεθεισῶν εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ μὲ τὴν ὅλην, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα (πρ. γ'.), τὰ ἐν τῇ μιᾷ πρίσματα ἦναι ἴσα μὲ τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ, αἱ πυραμίδες θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Καθότι ἔςωσαν τὰ 2 πρισ. ΕΗΖΔΚΘ = 2 πρισ. ΡΠΩΝΥΤ (σχ. 211. καὶ 212), τότε ἐπειδὴ 2 πρισ. ΡΠΩΝΥΤ : 2 πρισ. ΕΗΖΔΚΘ : : βασ. ΒΓΔ : βασ. ΜΟΝ (πρ. δ'), διὰ τοῦτο καὶ βασ. ΒΓΔ = βασ. ΜΟΝ.. ὥςε πυρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΛΜΟ (πόρ. α'.).

Π ρ ό τ α σ ι ς ς'.

Αἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πυραμίδες καὶ πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τρίγωνα καὶ τοσαῦτα, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον ἀποθέσει δύο, διὰ τοῦτο ἄν τις διαιρέσῃ τὰς δοθείσας βάσεις εἴτε πολύγωνα εἰς τρίγωνα, καὶ ἀπὸ τῶν σκελῶν τῶν τριγώνων ἄξῃ ἐπίπεδα μέχρι τῆς κορυφῆς τῶν πυραμίδων, αἱ δοθεῖσαι πυραμίδες αἱ τὰς πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι θέλουσι διαιρεθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἀλλ' αἱ ἰσοϋψεῖς τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν (πρ. ε'.).. ὥςε ἕξουσιν ὡσαύτως καὶ αἱ τὰς πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι.

β'. Ἂν ἐγὼ κινήσω μίαν ἐπιφάνειαν, ὁποίας δήποτε καὶ ἂν ἔχῃ τὰς γωνίας, καὶ ἐκ τῆς κινήσεως αὐτῆς νὰ ἐῶνται σημεῖα καθ' ὁδὸν, ἔχει νὰ γεννηθῇ ςερεόν, ὅπερ δηλονότι θέλει εἶναι πάντοτε ἀνάλογον μὲ τὴν κινουμένην τε ἐπιφάνειαν καὶ μὲ τὸ μέγεθος τῆς κινήσεως, εἴτε ὕψος. Ὥςε ἂν τὰ ὕψη δύο κινουμένων ἐπιφανειῶν ἢ βάσεων ἦναι ἴσα, τότε τὰ ςερεὰ ἔσονται, ὡς αἱ βάσεις.

Πρότασις. ζ'.

Πᾶν πρίσμα τριγωνικὸν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας τριγωνικὰς ἴσας ἀλλήλαις.

Ἔςω πρίσμα τριγωνικὸν τὸ ΑΒΓΔΕΘ. σχ. 214.

Εἰς τὰ τρία παραλληλόγραμμα τοῦ πρίσματος ἄγω τρεῖς διαγωνίους τὰς ΘΓ, ΘΔ, ΑΓ.. καὶ διὰ μὲν τῶν εὐθειῶν ΘΓ, ΘΔ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΘΓΔ, διὰ δὲ τῶν ΓΘ, ΓΔ, τὸ ΓΘΔ, καί μοι γεννῶνται τρεῖς πυραμίδες τριγωνικαὶ αἱ ΘΓΔΕ, ΘΑΒΓ, ΘΑΓΔ, αἵτινες δηλονότι λέγω ὅτι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Καθότι ἡ μὲν πυραμὶς ΘΓΔΕ ἔχει διὰ βάσιν τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος: τὴν ΕΓΔ, καὶ διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Θ: σημεῖον λέγω τῆς κάτω βάσεως τοῦ πρίσματος.. ἡ δὲ πυραμὶς ΘΑΒΓ ἔχει διὰ βάσιν τὴν ἑτέραν βάσιν τοῦ πρίσματος ΘΑΒ, καὶ διὰ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ: σημεῖον λέγω τῆς ἄνω βάσεως τοῦ πρίσματος.. ὥςε πυρ. ΘΓΔΕ = πυρ. ΘΑΒΓ (πρ. ε΄.). Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΘΑΒΓ = πυρ. ΘΑΓΔ, ὡς ἔχουσαι ἴσας τάς τε βάσεις: τουτέςι βασ. ΑΓΔ = βασ. ΑΓΒ (πρ. λδ΄. βιϐ. α΄.), καὶ τὰ ὕψη ἔχοντα τὴν κορυφὴν αὐτῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ (πρ. δ΄.).. ὥςε αἱ τρεῖς πυραμίδες ΘΓΔΕ, ΘΑΒΓ, ΘΑΓΔ, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Πόρισμα α΄.

Ὥςε ἡ ςεῤῥότης μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Πόρισμα. β΄.

Ὥςε πᾶν τετράεδρον, ὡς ὂν πυραμὶς τριγωνικὴ, εἶναι ἴσον κατὰ τὴν ςεῤῥότητα μὲ $\frac{1}{3}$ πρίσματος τριγωνικοῦ τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Πόρισμα. γ΄.

Ὥςε παντὸς τριγώνου, ἂν ἐν τῷ κινεῖσθαι ἐσμικρύνετο μὲ ἀναλογίαν συνεχῶς, ὥςε νὰ μηδενισθῇ, τὸ γενόμενον ςερεὸν ἐκ τῆς κινήσεως αὐτοῦ, ἂν δὲν ἐσμικρύνεκρύνετο, ἔχει πρὸς τὸ γενόμενον ςερεὸν, ἂν ἐσμικρύνετο, ὡς 3 : 1.

Πόρισμα δ'.

Ὥστε ἡ στερεότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεώς τε καὶ ὕψους ἐπὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Πόρισμα ε'.

Ὥστε ἡ στερεότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι $= \frac{1}{6}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος διπλασίαν τὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Καθότι τὸ τοιοῦτον πρίσμα θέλει εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ὑποδιπλασίαν (πόρ. πρ. κη'. βιβ. ια'.).

Πόρισμα ς'.

Ὥστε πᾶσα πυραμὶς, ὁποιανδήποτε βάσιν καὶ ἂν ἔχῃ, εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν τε καὶ ὕψος. Καθότι ἂν ἐκπληρώσῃ τις τὸ παραλληλόγραμμον τῆς βάσεως μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος, καὶ ἐπὶ τοῦ νέου τριγώνου συστήσῃ δευτέραν ἰσοϋψῆ πυραμίδα, αὕτη θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν πρώτην (πόρ α'. πρ. ε'.).. καὶ ἔτι ἑκατέρα μὲν θέλει εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ τριγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν τε καὶ ὕψος, ἀμφότεραι δὲ $= \frac{1}{3}$ τετραγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν τε καὶ ὕψος, εἴτε διπλάσιαι τῶν τριγωνικῶν (πρ. κη'.). Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῆς πενταγωνικῆς πυραμίδος, κτξ. Καθότι πᾶσα πολυγώνιος πυραμὶς εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῆ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας.