Πρότασις κη'.

Ἐὰν ςερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ δὲ ἐπιπέδου κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον παραλλήλων, τὰ τμήματα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἔςω ΑΒ τὸ ςερεὸν παραλληλεπίπεδον. σχ. 197. Ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΓΘΕΔ κατὰ τὰς διαγωνίους ΓΘ, ΔΕ, καί μοι γεννῶνται δύο πρίσματα τριγωνικὰ ΓΖΘΕΑΔ, καὶ ΓΒΘΕΗΔ, ἅπερ λέγω ὅτι εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ τῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα εἶναι καὶ ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα, διὰ τοῦτο εἰς τὰ δύο πρίσματα ἔχω παραλ. ΑΘ = παραλ. ΔΒ, καὶ παραλ. ΔΖ = παραλ. ΗΘ (πρ. κδ'.), ὡσαύτως καὶ τριγ. ΔΑΕ = τριγ. ΔΗΕ (πρ. λδ. βιβ. α'.), καὶ ἔτι τριγ. ΓΖΘ = τριγ. ΓΒΘ. Ἀλλ' αὐτὰ ταῦτα μετὰ τοῦ κοινοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΘ περιέχουσι τὰ πρίσματα.. ὥςε πρισ. ΓΖΘΕΑΔ = πρισ. ΓΒΘΕΗΔ (ὅρ. ι'.).

Πόρισμα.

Ὥςε τὸ τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι ὑποδιπλάσιον τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος διπλασίαν τὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Οὕτω τὸ πρίσ. ΓΖΘΕΑΔ $= \frac{\text{πρισ. } AB}{2}$.. διότι ἀμφότερα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΖ, καὶ τὸ μὲν πρίσμα ἔχει βάσιν τὸ τριγ. ΔΑΕ, τὸ δὲ παραλληλεπίπεδον τὸ παραλ. ΔΑΕΗ = 2 τριγ ΔΑΕ.

Πρότασις κθ'. καὶ λ'.

Τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Δύο περιστάσεις δύνανται νὰ ἐπακολουθήσωσιν εἰς τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν· τουτέστιν ἢ νὰ διαμένωσιν ἐντὸς τεσσάρων ἀπεναντίον παραλλήλων ἐπιπέδων, ἢ μόνον μεταξὺ δύο.. καὶ ἔστω πρῶτον τὸ πρῶτον: ὅ ἐστιν ἔστωσαν τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΗΒΔΑ, ΑΗΛΙΑ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΗ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΘ. σχ. 198.

Τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΔΕΙΘΜΔ = τρ. πρισ. ΓΗΚΛΒΖ.. διότι ἀμφότερα περιέχονται ὑπὸ ἐπιπέδων ἴσων κατά τε τὸ πλῆθος καὶ μέγεθος (ὅρ. ι΄.).. εἰς ταῦτα δὲ τὰ ἴσα προστίθημι κοινῶς πρῶτον τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΠΕΗΝΖΑ, εἶτα ἀφαιρῶ κοινῶς τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΓΠΙΜΝΒ, καὶ οὕτως ἔχω παραλληλεπ. ΑΗΒΔΑ = παραλληλεπ. ΑΗΛΙΑ.

β΄. Ἔστωσαν τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΗΒΔΑ, ΑΗΚΜΑ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΗ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΘ, νὰ ἐκκλίνῃ ὅμως τὸ ΑΗΚΜΑ ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ΑΗΒΔΑ, ὥστε νὰ διαμένωσιν ἀμφότερα μόνον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων: τῆς βάσεως λέγω καὶ τοῦ ἀπέναντι αὐτῆς ἐπιπέδου. σχ. 199.

Ἐπεκτείνω τὰ πλευρὰ ΙΜ, ΚΛ, καὶ τὰ ΘΒ, ΔΓ, ἕως οὗ νὰ συμπέσωσι κατὰ τὰ σημεῖα Ν, Ο, Ω, Π.. ἄγω καὶ τὰς ΖΠ καὶ ΗΟ, καὶ οὕτως ἔχω παραλληλεπ. ΑΗΟΠΑ = παραλληλεπ. ΑΗΒΔΑ (κατὰ τὸ α΄. μέρος). Ἀλλὰ τὸ πρίσμα ΑΖΠΛΜΑ = πρισ. ΕΗΟΚΙΕ, ὡς περιεχομένων ἀμφοτέρων ὑπὸ ἴσων παραλληλεπιπέδων.. ὥστε εἰς ταῦτα προστιθέμενος κοινῶς τὸ στερεὸν

ΑΖΛΝΗΑ, ἔξω παραλληλεπ. ΑΗΚΜΕΑ = παραλληλεπ. ΑΗΙΙΝΑ = παραλληλεπ. ΑΗΒΔΑ; ὡς προετέθη.

Πόρισμα α΄.

Ὥςε πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, καὶ δύναται νὰ ἐκληφθῇ καὶ ὡς γενόμενον ἐκ τῆς κινήσεως ἑνὸς παραλληλογράμμου παραλλήλως ἑαυτῷ ἐπί τινα εὐθεῖαν οὖσαν ἴσην μὲ τὸ ὕψος: ὡς δηλονότι τὸ ΑΘΔΕ, ἢ ΑΜΝΕ παρὰ τὴν ΑΖ εὐθεῖαν.

Πόρισμα β΄.

Πᾶν πρίσμα τριγωνικὸν εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ὡς ὂν ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (πορ. προ. κη΄.), ἢ γινόμενον τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου ἐπὶ τὸ ἥμισυ ὕψος.

Πόρισμα γ΄.

Εἶναι δυνατὸν νὰ μεταβάλῃ τις πᾶν παραλληλεπίπεδον πάσης γωνίας εἰς ὀρθογώνιον, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Πρότασις λα΄.

Τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΓ, ΔΖ ἔςω ἡ μὲν βασ. ΑΒ = βασ. ΔΕ, τὸ δ' ὑψ. ΓΒ = ὑψ. ΖΕ, τότε λέγω ὅτι ςερ. ΑΓ = ςερ. ΔΖ. σχ. 200.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἑαυτοῦ ὕψος (πορ. α΄. πρ. λ΄.), διὰ τοῦτο ςερ. ΑΓ = ΑΒ×ΓΒ, καὶ ςερ. ΔΖ = ΔΕ×ΖΕ.. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι ἑκάτερος ἑκατέρῳ: ὅ ἐςιν τὸ μὲν ΑΒ = ΔΕ, τὸ δὲ ΓΒ = ΖΕ, διὰ τοῦτο θέλουσιν εἶναι ἴσα καὶ τὰ τούτων γινόμενα: τουτέςι ςερ. ΑΓ = ςερ. ΔΖ.

Πόρισμα.

Ὥςε καὶ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, ὡς ὄντα ἡμίσεα τῶν παραλληλεπιπέδων (πορ. πρ. κη΄.).

Πρότασις λβ΄.

Τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Εἰς τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΓ, ΕΗ ἔςω ὑψ. ΓΒ = ὑψ. ΗΖ, τότε λέγω ὅτι ςερ. ΑΓ : ςερ. ΕΗ : : βασ. ΑΒ : βασ. ΕΖ. σχ. 201.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἴδιον ὕψος (πορ. α΄. πρ. λ.), διὰ τοῦτο ςερ. ΑΓ = ΑΒ × ΓΒ, καὶ ςερ. ΕΗ = ΕΖ × ΗΖ.. ὥςε ςερ. ΑΓ : ΑΒ × ΓΒ : : ςερ. ΕΗ : ΕΖ × ΗΖ (ὅρ. ζ. βιβ. ε΄.), καὶ ἐναλλὰξ ςερ. ΑΓ : ςερ. ΕΗ : : ΑΒ × ΓΒ : ΕΖ × ΗΖ : : ΑΒ : ΕΖ (πρ. γ΄. βιβλ. ε΄.), ὡς οὔσης ΓΒ = ΗΖ, ἐξ ὑποθέσεως. (α).

(α) Δῆλον ὅτι αὕτη ἡ πρότασις πραγματικῶς ταυτίζεται μὲ τὴν κε΄. Καθότι ἂν τις ἐφαρμώσῃ τὰ ἴσα ὕψη θέλει γεννηθῆ ἐν παραλληλεπίπεδον τεμνόμενον ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου μὲ τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Πόρισμα.

Ὥςε τὰ τριγωνικὰ πρίσματα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, ὡς ὄντα ὑποδιπλάσια τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος (πορ. πρ. λη′).

Πρότασις λγ′.

Τὰ ὅμοια παραλληλεπίπεδα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Ἔςωσαν ὅμοια παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΟ, ΓΜ καὶ ὁμόλογοι αἱ πλευραὶ αὐτῶν ΑΒ, ΓΔ, τότε λέγω ὅτι ςερ. ΑΟ : ςερ. ΓΜ :: $AB^3 : \Gamma\Delta^3$. σχ. 196.

Ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ παραλληλόγραμμα ΑΝ, ΓΚ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ἔξω παραλ. ΑΝ : παραλ. ΓΚ :: $AB^2 : \Gamma\Delta^2$ (πρ. κ. βιβ. ϛ′). β′. Ἐπειδὴ καὶ τὰ ςερεὰ ΑΟ, ΓΜ εἶναι ὅμοια εἴτε ἰσογώνια διὰ τοῦτο ἔξω ΑΙ : ΓΕ :: ΑΒ : ΓΔ (πρ. δ′. βιβ. ϛ′.).

Τώρα πολλαπλασιάζω, ὅρον ἐφ᾽ ὅρον, τὴν πρώτην ἀναλογίαν διὰ τῆς δευτέρας, καὶ ἔχω παραλ. $AN \times AI$: παραλ. $\Gamma K \times \Gamma E :: AB^3 : \Gamma\Delta^3$ (πορ. α′. πρ. δ′. βιβ. ε′.).. ἀλλὰ παραλ. $AN \times AI =$ ςερ. ΑΟ, καὶ παραλ. $\Gamma K \times \Gamma E =$ ςερ. ΓΜ. (πορ. α′. πρ. λ′.), ὥςε ςερ. ΑΟ : ςερ. ΓΜ :: $AB^3 : \Gamma\Delta^3$.

Πόρισμα α′.

Ὥςε ἂν ἦναι τέσσαρες εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογοι, τότε ὡς ἡ πρώτη ἔχει πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω καὶ τὸ ἐπὶ τῆς πρώτης παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. Καθότι καὶ ὁ λόγος τῆς πρώτης πρὸς τὴν τετάρτην εἶναι τριπλασίων τοῦ, ὃν ἔχει ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν (ὅρ. ι'. βιβ. ε'.).

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ἂν τὸ ὕψος ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ἦναι ἴσον μὲ τό,τε μῆκος καὶ πλάτος τῆς βάσεως, τότε τὸ παραλληλεπίπεδον ὀνομάζεται κύβος (ὅρ. ιδ'.), καὶ ἑπομένως τότε τὰ ὅμοια παραλληλεπίπεδα εἶναι ἴσα μὲ τοὺς κύβους μιᾶς τῶν πλευρῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς λδ'.

Αἱ βάσεις τῶν ἴσων παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασι μὲ τὰ ὕψη.. καὶ ὧν περ παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη, ταῦτα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἔςω παραλληλεπ. ΑΒ = παραλληλεπ. ΕΖ, τότε λέγω ὅτι βάσ. ΑΔ : βάσ. ΕΘ : : ὑψ. ΕΗ : ὑψ. ΑΓ : ὑποτιθεμένων δηλονότι διὰ ὕψεων τῶν ΕΗ, ΑΓ, ἀλλέως ἤθελον μεταφέραι αὐτὰ εἰς ὀρθὰ, ἢ ὀρθογώνια (πορ. γ'. πρ. λ'.). σχ. 202.

Ἐπειδὴ καὶ πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος (πορ. α'. πρ. λ'.), διὰ τοῦτο ςερ. ΑΒ = βασ. ΑΔ × ὑψ. ΑΓ, καὶ ςερ. ΕΖ = βασ. ΕΘ × ὑψ. ΕΗ.. ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ςερ. ΑΒ = ςερ. ΕΖ, διὰ τοῦτο καὶ βασ. ΑΔ × ὑψ. ΑΓ = βασ. ΕΘ × ὑψ. ΕΗ.. ἀλλὰ πᾶσα ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ἀναλογίαν, διὰ τοῦτο βάσ. ΑΔ : βασ. ΕΘ : : ὑψ. ΕΗ : ὑψ. ΑΓ.

β'. Ἔςω βασ. ΑΔ : βασ. ΕΘ : : ὑψ. ΕΗ : ὑψ. ΑΓ, τότε λέγω ὅτι παραλληλεπίπ. ΑΒ = παραλληλεπ. ΕΖ. Καθότι ἐπειδὴ βασ. ΑΔ : βασ. ΕΘ : : ὑψ. ΕΗ : ὑψ. ΑΓ, διὰ τοῦτο βασ. ΑΔ × ὑψ. ΑΓ = βασ. ΕΘ × ὑψ. ΕΗ..

ἀλλὰ βασ. ΑΔ × ὕψ. ΑΓ = στερ. ΑΒ, καὶ βασ. ΕΘ × ὕψ. ΕΗ = στερ. ΕΖ (κατὰ τὸ αὐτὸ), ὥστε στερ. ΑΒ = στερ. ΕΖ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥστε καὶ τῶν τριγωνικῶν ἴσων πρισμάτων, ὡς ὄντων ἡμίσεων τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ διπλασίαν τὴν βάσιν (πορ. πρ. κη΄.), ἀντιπάσχουσιν αἱ βάσεις μὲ τὰ ὕψη.. καὶ ἂν αἱ βάσεις δύο τριγωνικῶν πρισμάτων ἀντιπάσχωσι μὲ τὰ ὕψη, ταῦτα τὰ πρίσματα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Π ρ ό τ α σ ι ς λε΄.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς δύο ἴσων γωνιῶν ἐπιπέδων ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι μετέωροι, ὥστε θατέρα αὐτῶν νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν σκελῶν τῆς γωνίας, ὅσον ἡ ἑτέρα.. καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν μετεώρων εὐθειῶν καταχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τῶν διὰ τῶν ἴσων γωνιῶν.. καὶ συζευχθῶσι τὰ πέρατα τῶν καθέτων μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν, αἱ γεννησόμεναι γωνίαι ἔκ τε τῶν μετεώρων εὐθειῶν καὶ τῶν συζευγνυόντων τὰ πέρατα τῶν καθέτων μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἔστω ἐπίπεδος γων. ΗΑΙ = γων. ΔΓΕ.. ὑψῶ μετεώρως τὴν ΑΛ καὶ ΓΘ, πλὴν οὕτως, ὥστε ἡ μὲν γων. ΛΑΗ = γων. ΘΓΔ, ἡ δὲ γων. ΛΑΙ = γων. ΘΓΕ.. ἄγω καθέτως τὰς ΛΚ, ΘΖ, καὶ λέγω ὅτι γων. ΛΑΚ = γων ΘΓΖ. σχ. 203.

Πρὶν ὅμως νὰ κατάξω τὰς καθέτους ΛΚ, ΘΖ, ἐγὼ λαμβάνω τὰ σημεῖα Λ, καὶ Θ οὕτως, ὥστε ἡ ΑΛ = ΓΘ.

Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ςερεαί τε καὶ ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς περιεχόμεναι ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν κατά τε τὸ πλῆθος καὶ μέγεθος (ὅρ. ι.).. ἀλλ' αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἴσων σκελῶν εἰς τὰς ςερεὰς γωνίας ἀχθεῖσαι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (πορ. πρ. κς.)· διὰ τοῦτο ΛΚ = ΘΖ. Ὥςε εἰς τὰ τρίγωνα ΛΔΚ, ΘΓΖ ἐγὼ ἔχων ΛΚ = ΘΖ καὶ ΔΛ = ΓΘ, ἐκ τῆς κατασκευῆς: ὅ ἐςιν ἔχων ΔΛ : ΛΚ :: ΓΘ : ΘΖ, καὶ ὀρθὰς τὰς γωνίας ΔΚΛ, ΘΖΓ, ἔξω ἰσογώνια τὰ τρίγωνα (πρ. ζ'. βιϐ. ς'.).. τουτέςι τὴν γων. ΛΔΚ = γων. ΘΓΖ, ὡς προετέθη.

Π ρ ό τ α σ ι ς. λς'.

Τὸ ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἀναλόγων συνιςάμενον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῆς μέσης παραλληλεπίπεδον ἰσογώνιον.

Ἔςωσαν ἀνάλογοι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι Α, Β, Γ. σχ. 204.

Πρὸς τῷ σημείῳ Κ τῆς ΚΙ εὐθείας συνίςημι τυχοῦσαν γωνίαν ςερεὰν τὴν Κ (πρ. κς'.).. ἐκτελῶ τὴν μὲν ΚΙ = Α, τὴν δὲ ΚΔ = Β, καὶ τὴν ΚΗ = Γ.. καὶ ἐκπληρῶ τὸ παραλληλεπίπεδον ΚΖ (πρ. κζ'.). Εἶτα πρὸς τῷ σημείῳ Ω τῆς ΩΡ εὐθείας συνίςημι γωνίαν ςερεὰν τὴν Ω = γων. Κ· ἐκτελῶν τὴν ΩΡ = ΩΜ = ΩΠ = Β.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλεπίπεδον ΩΟ· καὶ λέγω ὅτι ςερ. ΚΖ = ςερ. ΩΟ.

Καθότι ἐπειδὴ ἡ γων. ΙΚΗ = γων. ΡΩΠ, καὶ ΚΙ : ΩΡ :: ΩΜ : ΗΚ, ἐκ τῆς κατασκευῆς· διὰ τοῦτο παραλ. ΗΙ = παραλ. ΡΠ (πρ. ιδ'. βιϐ. ς'.): ὅ ἐςι τὰ στερεὰ ΚΖ, ΩΟ ἔχουσιν ἴσας τὰς βάσεις. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα ΚΔ ἀπέχει τῶν ΚΙ καὶ ΚΗ, ὡς ἡ ΩΜ τῶν ΩΡ, καὶ ΩΠ, καὶ ἐν ταυτῷ ἡ ΚΔ = ΩΜ = Β, διὰ τοῦτο αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Μ ἀχθησόμεναι κάθετοι θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, εἴτε αἱ ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινόμεναι γωνίαι (πρ. λέ.): ὅθεν τὰ στερεὰ ΚΖ, ΩΟ εἶναι καὶ ἰσοϋψῆ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα ἀλλήλοις (πρ. λα'.).. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΖ συνετέθη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ ΩΟ ὑπὸ τῆς εὐθείας Β καὶ μὲ ἴσας γωνίας, ὥστε γέγονε τὸ ζητούμενον.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὥστε ἂν εἷς κύβος ἦναι ἴσος μὲ ἓν παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει εἶναι μέσον τε ἀνάλογον τῶν δύο πλευρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ἴση μὲ τὴν τρίτην.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Πᾶν παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν, εἴτε ὀρθογώνιον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν. Ὥστε στερεὸν ἤθελεν εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γενόμενόν τι ἐκ τῆς κινήσεως μιᾶς μόνης γραμμῆς ἐπὶ μίαν ἄλλην γραμμὴν, εἶτα τῆς γεννηθείσης ἐπιφανείας ἐπὶ δευτέραν γραμμήν. Οὕτως ἂν ἡ ΚΗ εὐθεῖα κινηθῇ ἐπὶ τὴν ΚΙ εὐθεῖαν, ἔχει νὰ γεννηθῇ ἡ ΗΙ ἐπιφάνεια.. καὶ ἂν ἡ ΗΙ ἐπιφάνεια ἐπὶ τὴν ΚΔ, ἔχει νὰ γεννηθῇ τὸ στερεὸν ΚΖ, ὑποτιθεμένου δηλονότι νὰ ἐῶνται σημεῖά τινα καθ' ὁδόν. Καὶ ἐπομένως εἶναι ἀδιάφορον ἢ νὰ κινήσω τὴν ΚΗ ἐπὶ τὴν ΚΙ, ἢ τὴν ΚΙ ἐπὶ τὴν ΚΗ, ἢ τὴν ΚΔ ἐπὶ τὴν ΚΙ.. διότι τὸ γεννησόμενον στερεὸν θέλει εἶναι πάντοτε τὸ ΚΖ.

Προτασις. λζ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἦναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα. καὶ ἐὰν τὰ ἐπὶ τεσσάρων εὐθειῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα ἦναι ἀνάλογα, ἀνάλογοι θέλουσιν εἶναι καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι.

Ἔςω ΑΒ : ΓΔ : : ΕΖ : ΗΘ. σχ. 205.

Ἀναγράφω ἐπὶ αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΚ, ΓΛ, ΕΜ, ΗΝ (πρ. κζ΄.), καὶ λέγω ὅτι ςερ. ΑΚ : ςερ. ΓΛ : : ςερ. ΕΜ : ςερ. ΗΝ.

Καθότι ἐπειδὴ καί, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ : ΓΔ : : ΕΖ : ΗΘ, διὰ τοῦτο καὶ ΑΒ^3 : ΓΔ^3 : : ΕΖ^3 : ΗΘ^2. (πόρ. γ΄. πρ. δ΄. βιβ. ε΄.).. ἀλλὰ ςερ. ΑΚ : ςερ. ΓΛ : : ΑΒ^3 : ΓΔ^3, καὶ ςερ. ΕΜ : ςερ. ΗΝ : ΕΖ^3 : ΗΘ^3 (πρ. λγ΄.).. ὥςε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων ςερ. ΑΚ : ςερ. ΓΛ : : ςερ. ΕΜ : ςερ. ΗΝ.

β΄. Ἔςω ἤδη ςερ. ΑΚ : ςερ. ΓΛ : : ςερ. ΕΜ : ςερ. ΗΝ, καὶ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, τότε λέγω ὅτι καὶ ΑΒ : ΓΔ : : ΕΖ : ΗΘ. Καθότι τότε ςερ. ΑΚ : ςερ. ΓΛ : : ΑΒ^3 : ΓΔ^3, καὶ ςερ. ΕΜ : ςερ. ΗΝ : : ΕΖ^3 : ΗΘ^3 (κατὰ τὴν αὐτήν.).. Ὥςε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων ΑΒ^3 : ΓΔ^3 : : ΕΖ^3 : ΗΘ^3, καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ : ΓΔ : : ΕΖ : ΗΘ (πόρ. δ΄. πρ. δ΄. βιβ. ε΄.).

Πρότασις. λη΄.

Ἐὰν ἐπίπεδον ἦναι ὀρθὸν πρὸς ἐπίπεδον, καὶ ἀπό τινος σημείου θατέρου τῶν ἐπιπέδων καταχθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἐπιπέδου, αὕτη θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων.

Ἔςω πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΔ πρὸς τὸ ΑΒ, καὶ ΑΔ ἡ τούτων κοινὴ τομή. σχ. 206.

Ἀπό τινος τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου ΓΑΔ: ὡς τὸ Ε, κατάγω κάθετον ἐπὶ τοῦ ΑΒ, καὶ λέγω ὅτι ἔχει νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΔ, ἀλλέως, ἂν ἦναι δυνατὸν, ἂς πέσῃ ἔξωθεν αὐτῆς, ὡς εἰς τὸ σημεῖον Θ: ὅ ἐςιν ἔςω κάθετος ἡ ΕΘ. Τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Θ ἄγω κάθετον πρὸς τὴν ΑΔ εὐθεῖαν τὴν ΘΖ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, ἥτις θέλει εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΔ (ὅρ. δ΄.).. καὶ διὰ τοῦτο ἂν ἄξω τὴν ΖΕ εὐθεῖαν, αὕτη θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΖΘ (πόρ. β΄. πρ. δ΄.): ὅ ἐςι τὸ τρίγωνον ΕΘΖ συνέχει δύο ὀρθὰς γων.: τὴν ΕΖΘ, καὶ ΕΘΖ, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὥςε...

Πρότασις. λθ΄.

Ἐὰν παραλληλεπιπέδου αἱ πλευραὶ τῶν δύο ἀπεναντίον ἐπιπέδων τμηθῶσι δίχα, καὶ διὰ τῶν τομῶν διαχθῶσι δύο ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου ταμοῦσι δίχα ἀλλήλας.

Τετμήσθωσαν δίχα αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΖΓ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, ὡσαύτως καὶ αἱ πλευραὶ ΖΕ, ΤΘ κατὰ τὰ σημεῖα Η, Ι, Π, Ω.. καὶ διὰ τῶν τομῶν διαχθήτωσαν τὰ ἐπίπεδα ΗΛ, ΠΝ, ὧνπερ κοινὴ τομὴ ἔςω ἡ ΟΡ καὶ ΘΑ ἡ διαγώνιος, τότε λέγω ὅτι ἡ ΟΡ καὶ ΑΘ τέμνουσι δίχα ἀλλήλας. σχ. 207.

Ζευγνύω τὸ σημεῖον Ο μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, ὡσαύτως καὶ τὸ σημεῖον Ρ μὲ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ.

Ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΔΓ, διὰ τοῦτο ἡ γων. ΟΜΑ = γων. ΟΝΓ, καθὸ ἐναλλάξ.. ὡσαύτως εἶναι καὶ ἡ ΑΜ = ΝΓ, καθὸ ἡμίσειαι δύο ἴσων εὐθειῶν, καὶ ἡ ΜΟ = ΟΝ, ὡς οὔσης ἑκατέρας αὐτῶν = ΒΛ = ΛΓ.. ὥςε ἡ γων. ΔΟΜ = γων. ΓΟΝ (πρ. η΄. βιϐ. α΄.), ὅ ἐςιν ἡ ΔΟΓ εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῇ καὶ ἡ ΖΡΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αὗται αἱ εὐθεῖαι ζευγνύουσιν εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους: τὰς ΑΖ, ΓΘ (διότι ἑκατέρα τούτων εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΔΕ (πρ. θ΄.), διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις: τουτέςιν ἡ ΑΓ = ΖΘ, ἔτι δὲ κεῖνται καὶ ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, ὡσαύτως καὶ ἡ διαγώνιος ΑΘ (πρ. ζ΄.).

Εἰς τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΣΟ, ΘΣΡ ἡ μὲν γων. ΣΑΟ = γων. ΣΘΡ, ἡ δὲ γων. ΣΟΑ = γων. ΣΡΘ, καθὸ ἐναλλάξ, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΟ = ΡΘ, ὡς οὐσῶν ἡμίσεων τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΘΖ.. ὥςε ΟΣ = ΣΡ, καὶ ΑΣ = ΣΘ (πρ. κϛ΄. βιϐ. α΄.): ὅ ἐςιν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου τέμνουσι δίχα ἀλλήλας.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλεπιπέδου τέμνουσι δίχα ἀλλήλας, ὡς δηλονότι καὶ αἱ τῶν παραλληλογράμμων (πόρ. β΄ πρ. λδ΄.). Καθότι ἂν ἄξω καὶ ἄλλην διαγώνιον εἰς τὸ ΑΓ παραλληλεπίπεδον, αὕτη ἔχει νὰ τμηθῇ δίχα ὑπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΟΡ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΑΘ.

Π ρ ό τ α σ ι ς. μ΄.

Ἐὰν ἐκ δύο πρισμάτων τριγωνικῶν ἰσοΰψων, τὸ μὲν ἔχῃ τρίγωνον τὴν βάσιν, τὸ δ᾽ ἕτερον παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, ταῦτα τὰ πρίσματα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἔςωσαν ἰσοϋψῆ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΓΕΔΑ, ΜΗΙΛΜ, καὶ ἡ βάσις ΑΒΓΘ = 2 βασ. ΜΗΖ, τότε λέγω ὅτι εἶναι ἴσα ἀλλήλοις. σχ. 208.

Ἐκπληρῶ τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΕ καὶ ΜΙ.

Ἐπειδὴ καί, ἐξ ὑποθέσεως, παραλ. ΑΒΓΘ = 2 τριγ. ΜΗΖ.. καὶ ἐπειδὴ 2 τριγ. ΜΗΖ = παραλ. ΜΠΗΖ (πρ. μα΄. βιβ. α΄.), διὰ τοῦτο παραλ. ΑΒΓΘ = παραλ. ΜΠΗΖ. Ἀλλὰ τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις (πρ. λα΄).. ὥςε ςερ. ΑΕ = ςερ. ΜΙ.. ἀλλ' ἑκάτερον τῶν πρισμάτων ΑΓΕΔΑ, ΜΗΙΛΜ εἶναι ὑποδιπλάσιον ἑκατέρων αὐτῶν τῶν ςερεῶν (πρ. κη΄.).. ὥςε πρισ. ΑΓΕΔΑ = πρισ. ΜΗΙΛΜ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε εἶναι ἀδιάφορον ἢ ἓν τρίγωνον νὰ κινηθῇ, ὅσον τὸ ὕψος, ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου παραλληλόγραμμον, ὅσον τὸ ὕψος, φθάνει μόνον νὰ σμικρύνηται τὸ παραλληλόγραμμον ἀδιακόπως οὕτως, ὥςε, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ πέρας τοῦ ὕψους, νὰ μεταβληθῇ εἰς εὐθεῖαν: τουτέςι εἰς ἑκάτερα τὰ συμβεβηκότα ἡ ςεῤῥότης θέλει εἶναι ἴση..