Ἔςω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ εὐθεῖα μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ. σχ. 187.

Διὰ τῆς ΑΒ λοιπὸν εὐθείας ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΕΖ, οὗτινος κοινὴ τομὴ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ θέλει εἶναι ἡ ΕΗ εὐθεῖα, καὶ ὅπερ λέγω ὅτι θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ΓΔ ἐπίπεδον.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ πᾶσαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ πέρατος αὐτῆς Β (πορ. β΄. πρ. δ΄.): τουτέςι μὲ τὴν κοινὴν τομὴν ΕΗ. Ὥςε τὸ ΕΖ ἐπίπεδον εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ (ὅρ. δ΄.).

Τὰ αὐτὰ ἤθελον ἀποδειχθῶσι καὶ δι' ὅσα ἄλλα ἐπίπεδα ἤθελον διαχθῶσι διὰ τῆς ΑΒ εὐθείας. Ἔπειτα ἂν ἐγὼ δώσω κίνησιν εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραλλήλως ἑαυτῇ ἐπὶ τῆς ΕΗ εὐθείας, εἰς πᾶσαν τοποθεσίαν θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΕΗ. Ὥςε ἂν δοθῇ νὰ ἔχῃ σημεῖα καθ' ὁδὸν, τὸ περιγραφθησόμενον ἐπίπεδον θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ.

Πρότασις ιθ΄.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἦναι πρὸς ὀρθὰς μὲ ἄλλο τρίτον, πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὸ θέλει εἶναι καὶ ἡ τούτων κοινὴ τομή.

Ἔςωσαν τὰ διατέμνοντα ἄλληλα ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΕΚ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΕΚ. σχ. 188.

Εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἐγὼ δύναμαι νὰ ὑψώσω ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἄλλην εὐθεῖαν, ὡς τὴν ΒΙ, ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς μὲν μὲ τὴν ΗΔ, τὴν δὲ ΒΛ ἐπὶ τοῦ ΕΖ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΕΘ. Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑψωθῶσι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς (πρ. ιγ'.). Ὥςε αἱ δύο εὐθεῖαι ΒΙ, ΓΔ εἶναι ἀνάγκη νὰ τραπῶσιν εἰς μίαν καὶ κοινὴν εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα, εἰς τὴν ΑΒ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΕΚ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε ἂν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἦναι κεκλιμένα πρὸς ἓν τρίτον, κεκλιμένη θέλει εἶναι πρὸς αὐτὸ καὶ ἡ τούτων κοινὴ τομή.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κ'.

Ἐὰν ςερεὰ γωνία περιέχηται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τὸ κεφάλαιον τῶν δύο θέλει εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης πάντη μεταλαμβανομένων.

Ἔςω ςερέα γωνία ἡ πρὸς τῷ Α σημείῳ, περιεχομένη ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΓΑΔ. σχ. 189.

Εἰ μὲν καὶ ἦσαν ἴσαι ἀλλήλαις, τὸ πρᾶγμα ἤθελεν εἶναι οἴκοθεν σαφές. Ἔςω λοιπὸν ἡ μία τούτων μείζων, ὅσον καὶ ἂν θέλη, ἑκατέρας τῶν λοιπῶν, ὡς ἡ ΒΑΓ. Τότε ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῆς τὴν γων. ΒΑΕ = γων. ΒΑΔ.. τέμνω τὴν ΑΕ = ΑΔ.. διὰ τοῦ σημείου Ε διάγω τὴν ΒΓ, ὥςε νὰ ὑπαντήσῃ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εὐθείας.. ἄγω τὰς εὐθείας ΒΔ, καὶ ΓΔ.

Τώρα εἰς τὰ τρίγωνα ΒΑΕ, ΒΑΔ ἔχω, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἔχω γων. ΒΑΕ = γων. ΒΑΔ, καὶ ΑΕ = ΑΔ, καὶ κοινὴν τὴν ΑΒ πλευρὰν, ὥςε καὶ ἡ βάσις ΒΕ = ΒΔ (πρ. δ'. βιϐ. α'.). Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΓ αἱ πλευραὶ ΒΔ + ΔΓ > ΒΓ (πρ. κ'. βιϐ. α'.), καὶ ἡ ΒΔ = ΒΕ, ὡς δέδεικται, διὰ τοῦτο ἡ λοιπὴ ΔΓ > ΕΓ. Ὥςε εἰς τὰ τρίγωνα ΕΑΓ, ΓΑΔ ἡ μὲν ΑΕ = ΑΔ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΑΓ κοινὴ, ἡ δὲ ΔΓ > ΕΓ, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΓΑΔ > γων. ΕΑΓ (πρ. κε'. βιϐ. α'.). Ὥςε ἡ γων. ΒΑΔ + γων. ΓΑΔ > γων. ΒΑΕ + ΕΑΓ.. ἀλλὰ γων. ΒΑΕ + γων. ΕΑΓ = γων. ΒΑΓ, ὡς μέρη καὶ ὅλον.. Ὥςε γων. ΒΑΔ + γων. ΓΑΔ > γων. ΒΑΓ. Ὥςε τὸ κεφάλαιον τῶν δύο εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. Ὡσαύτως βέϐαια ἤθελεν ἀποδειχθῇ καὶ τὸ ὅτι γων. ΒΑΔ + γων. ΒΑΓ > γων. ΓΑΔ.

Πρότασις. κα'.

Πάσης ςερεᾶς γωνίας τὸ κεφάλαιον τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι ἔλασσον τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἔςω ςερεὰ γωνία ἡ Α, τότε λέγω ὅτι γων. ΖΑΗ + γων. ΗΑΕ + γων. ΕΑΔ + γων. ΔΑΓ + γων. ΓΑΒ + γων. ΒΑΖ < 360°. σχ. 190.

Ἄγω ἐπίπεδον ἀπέναντι τῆς ςερεᾶς γωνίας τέμνον τὰ σκέλη αὐτῆς, καὶ οὕτω μοὶ γεννᾶται πυραμὶς ἔχουσα κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον Α, βάσιν δὲ τὸ ἑξάγωνον ΒΓΔΕΗΖ, οὗ τινος αἱ πλευραὶ μεταϐάλλουσι τὰς μὲν ἐπιπέδους γωνίας τῆς ςερεᾶς εἰς τρίγωνα, τὰ δὲ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε, Η, Ζ εἰς γωνίας ςερεάς.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ αἱ γωνίαι Β, Γ, Δ, Ε, Η, Ζ εἶναι ϛερεαὶ, διὰ τοῦτο ἔξω γων. ΑΗΖ + γων. ΑΗΕ > γων. ΖΗΕ.. ὡσαύτως καὶ γων. ΑΕΗ + ΑΕΔ > γων. ΗΕΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς (πρ. κ΄.): ὅ ἐϛιν αἱ δύο συνεχεῖς γωνίαι τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων εἶναι μείζονες τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ τοῦτο τὸ κεφάλαιον τῶν γωνιῶν τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΗΖ, ΗΕ, ΕΔ, καὶ τὰ ἑξῆς, εἶναι μεῖζον τοῦ κεφαλαίου τῶν ἐσωτερικῶν τοῦ πολυγώνου ΒΓΔΕΗΖ: τουτέϛι τῶν ὀκτὼ ὀρθῶν γωνιῶν (πόρ. ιδ΄. προτ. λβ΄. βιϐ. α΄).. ἀλλ᾽ ἅπασαι αἱ γωνίαι τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων ΒΑΓ, ΓΑΔ, κτξ = 12 ὀρθαῖς (κατὰ τὴν αὐτήν).. ὥϛε ἀφαιρεθέντων ἐκ τούτων πλέον, ἢ ὀκτὼ ὀρθῶν, μένουσιν αἱ γωνίαι ΖΑΗ + ΗΑΕ + ΕΑΔ + ΔΑΓ + ΓΑΒ + ΒΑΖ ἐλάσσονες τεσσάρων ὀρθῶν.

Π ό ρ ι σ μ α. α΄.

Ὥϛε εἶναι ἀδύνατον νὰ συϛήσῃ τις ϛερεὰν γωνίαν διὰ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων. Καθότι τότε αὕτη ἡ ϛερεὰ γωνία ἤθελε τραποῖ εἰς ἐπίπεδον, ἢ ἓν σημεῖον, περὶ ὅπερ δηλονότι ἤθελον εἶναι αἱ τέσσαρες ὀρθαί. (πόρ. β΄. προ. ιγ΄. βιϐ. α΄).

Π ό ρ ι σ μ α. β΄.

Ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἑκάϛης $= 60^\circ$, συνίϛαται ϛερεὰ γωνία. Καθότι $3 \times 60^\circ = 180^\circ$, αἵτινες δηλονότι εἶναι ἐλάσσονες τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ τετράεδρα, εἴτε τὸ πρῶτον εἶδος τῶν τακτικῶν ϛερεῶν, ἔχοντα δὶ ἕδρας τρίγωνα ἐπίπεδα.

Πόρισμα. γ'.

Ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἑκάστης $= 90^\circ$, συνίσταται στερεὰ γωνία. Καθότι $3 \times 90^\circ = 270^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι οἱ κύβοι, ἡ ἑξάεδρα, ἅπερ δηλονότι ἔχουσι τετράγωνα δὶ ἕδρας, καὶ διὰ τοῦτο τακτικά.

Πόρισμα. δ'.

Ὑπὸ τεσσάρων ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης $= 60^\circ$, συνίσταται στερεὰ γωνία. Καθότι $4 \times 60^\circ = 240^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ ὀκτάεδρα, ἅπερ δηλονότι ἔχουσι δὶ ἕδρας τρίγωνα ἰσόπλευρα, καὶ διὰ τοῦτο τακτικά.

Πόρισμα. ε'.

Ὑπὸ πέντε ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἑκάστης $= 60^\circ$, συνίσταται στερεὰ γωνία. Καθότι $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ εἰκοσάεδρα, ἅπερ δηλονότι ἔχουσι δὶ ἕδρας τρίγωνα ἰσόπλευρα, καὶ διὰ τοῦτο τακτικά.

Πόρισμα. ς'.

Ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἑκάστης $= 60^\circ$, εἶναι ἀδύνατος ἡ σύστασις γωνίας στερεᾶς. Καθότι $6 \times 60^\circ = 4 \times 90^\circ$ δηλονότι. Καὶ τούτου ἕνεκεν δὲν δίδεται τακτικὸν σχῆμα στερεὸν ἔχον πλείονας τῶν εἴκοσι ἑδρῶν.

Πόρισμα. ζ'.

Ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἑκάστης $= 108^\circ$, συνίσταται στερεὰ γωνία. Καθότι $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ δωδεκάεδρα, ἅπερ δηλονότι ἔχουσι πεντάγωνα ἐπιπέδους ἐπιφανείας, καὶ διὰ τοῦτο τακτικὰ, ὡς οὔσης τοῦ τακτικοῦ πενταγώνου τῆς γωνίας $= 108^{\circ}$ (πόρ. α΄. πρ. ια΄. βιβ. δ΄.).

Π ό ρ ι σ μ α. η΄.

Ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἑκάστης $= 120^{\circ}$, ὡς δηλονότι ἡ γωνία τοῦ τακτικοῦ ἑξαγώνου (πόρ. α΄. πρ. ιε΄. βιβ. δ΄.), εἶναι ἀδύνατος ἡ σύστασις γωνίας στερεᾶς. Καθότι $3 \times 120^{\circ} = 360^{\circ} = 4 \times 90^{\circ}$ δηλονότι. Καὶ τούτου ἕνεκεν δὲν δίδεται σχῆμα στερεὸν τακτικὸν ἔχον ἐπιφανείας ἑξάγωνα.

Καὶ τούτου ἕνεκεν τὰ τακτικὰ σχήματα εἶναι πέντε: τετράεδρον, κύβος, ὀκτάεδρον, δωδεκάεδρον, εἰκοσάεδρον, καὶ πλέον οὐδέν.

Π ρ ό τ α σ ι ς κβ΄.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν περ αἱ δύο νὰ ἦναι μείζονες τῆς τρίτης πάντη μεταλαμβανόμεναι, ἔχουσαι ἴσα τὰ σκέλη, αἱ τὰ πέρατα τῶν σκελῶν ζευγνύουσαι εὐθεῖαι θέλουσι συστήσει τρίγωνον.

Ἔστωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι γωνίαι Α, Δ, Η, καὶ ἔστωσαν αἱ μὲν γων. ΕΔΖ $+$ γων. ΘΗΙ $>$ γων ΒΑΓ, ἡ δὲ ΑΒ $=$ ΑΓ $=$ ΔΕ $=$ ΔΖ $=$ ΗΘ $=$ ΗΙ, τότε λέγω ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΒΓ, ΕΖ, ΘΙ συνιστῶσι τρίγωνον: ὅ ἐστι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης (πρ. κ΄. βιβ. α΄.). σχ. 191.

Πρὸς τῷ σημείῳ Δ τῆς ΖΔ εὐθείας συνίστημι γων. ΖΔΚ $=$ γων. ΓΑΒ, τέμνων τὴν ΔΚ $=$ ΑΒ.. πρὸς δὲ τῷ αὐτῷ σημείῳ Δ τῆς ΚΔ εὐθείας συνίστημι γωνίαν τὴν ΚΔΕ $=$ γων. ΘΗΙ.. ἄγω τὰς εὐθείας ΚΖ, ΚΕ.

Ἐπειδὴ, καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν γων. ΖΔΚ = γων. ΓΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἴσαι, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΚΖ = ΒΓ (πρ. δ'. βιϐ. α'.).. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ΚΕ = ΘΙ. Ὥςε τὸ τρίγωνον ΚΕΖ συνίςαται ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων μὲ τὰς ΒΓ, ΕΖ, ΘΙ, καὶ τούτου ἕνεκεν τὸ κεφάλαιον τῶν δύο εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης πάντοτε (κατὰ τὴν αὐτὴν).. διότι οὔσης τῆς γων. ΖΔΚ < γων. ΚΔΕ + γων. ΕΔΖ, θέλει εἶναι καὶ ἡ ΚΖ < ΚΕ + ΕΖ (πρ. ιθ'. βιϐ. α'.): ὅ ἐςιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΚΖ, ΚΕ, ΕΖ περιέξουσι χωρίον, εἴτε τρίγωνον.

Πρότασις κγ'.

Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν περ αἱ μὲν δύο νὰ ἦναι μείζονες τῆς τρίτης πάντη μεταλαμϐανόμεναι, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν τριῶν ἔλασσον τεσσάρων ὀρθῶν, νὰ συςήση τις γωνίαν ςερεάν.

Ἔςωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἐπίπεδοι γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ ἐγγεγραμμέναι δηλονότι περὶ τὸ κέντρον Α. σχ. 192.

Ζευγνύω τὰ σκέλη τῶν τριῶν δοθεισῶν γωνιῶν διὰ τῶν χορδῶν ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.. ἐξ αὐτῶν συνίςημι τρίγωνον τὸ ΗΘΖ.. περὶ αὐτὸ περιγράφω τὸν κύκλον ΗΘΖ (πρ. ε'. βιϐ. δ'.), οὗτινος δηλονότι ἡ διάμετρος ΙΘ θέλει εἶναι ἐλάσσων τῆς διαμέτρου ΑΒ.. διότι οὐσῶν τῶν τριῶν χορδῶν ΗΘ + ΘΖ + ΖΗ = ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ μὲν ΗΘ + ΘΖ + ΖΗ καταμετροῦσιν ὁλόκληρον τὸν κύκλον ΗΘΖ, ὄχι δ' ὅμως καὶ αἱ ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ τὸν ΒΓΔΕ. Ἀπὸ τοῦ κέντρου λοιπὸν Ι ὑψῶ πρὸς ὀρθὰς τὴν εὐθεῖαν ΙΚ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΗΘΖ, πλὴν τοσαύτην, ὥςε τὸ ταύτης τετράγωνον $ΙΚ^2$ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ $ΑΒ^2$ πρὸς τὸ $ΙΘ^2$: ὅ ἐςι τὸ $ΙΚ^2 = ΑΒ^2 - ΙΘ^2$, εἴτε $ΑΒ^2 = ΙΚ^2 + ΙΘ^2$. Ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἄγω τὰς εὐθείας ΚΗ, ΚΘ, ΚΖ, καὶ λέγω ὅτι ἡ γωνία Κ εἶναι ἡ ζητουμένη ςερεὰ γωνία.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ΙΚ ἦκται πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸν κύκλον ΗΘΖ, διὰ τοῦτο $ΚΗ = ΚΘ = ΚΖ$, ὡς οὔσης ἑκάςης αὐτῶν $= \sqrt{ΙΚ^2 + ΙΘ^2}$ (πρ. μζ΄. βιβ. α΄.).. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, $ΑΒ = (\sqrt{ΙΚ^2 + ΙΘ^2})$, διὰ τοῦτο $ΚΗ = ΚΘ = ΚΖ = ΑΒ$.. ἀλλ' ἡ $ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ = ΑΕ$. Ὥςε τὰ σκέλη τῆς ςερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσα, ἕκαςον ἑκάςῳ, μὲ τὰ σκέλη τῶν δοθεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν: τουτέςι μὲ τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ.. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ ἑκάςη τῶν βάσεων ΗΘ, ΘΖ, ΖΗ γέγονεν ἴση μὲ ἑκάςην τῶν βάσεων τῶν ἐπιπέδων ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.. ὥςε θέλει ἦσθαι καὶ γων. ΘΚΗ = γων. ΒΑΓ, καὶ γων. ΘΚΖ = γων. ΓΑΔ, καὶ γων. ΖΚΗ = γων ΔΑΕ (πρ. η΄. βιβ. α΄.): ὅ ἐςιν ἡ ςερεὰ γωνία ΘΚΗΖ συνεςάθη ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ἑκάςης ἴσης μὲ ἑκάςην τῶν τριῶν δοθεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς κδ΄.

Ἐὰν ςερεὸν περιέχηται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἐναντίον ἐπίπεδα αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι ἴσατε καὶ παραλληλόγραμμα.

Ἔςω ΑΒ τὸ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενον ϛερεὸν, τότε λέγω ὅτι ἐπιπ. ΖΑ = ΒΔ ἐπιπ., ὡσαύτως καί ἐπιπ. ΖΓ = ἐπιπ. ΘΔ, καὶ ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμα. σχ. 193.

Καθότι ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΑΓ τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΖΑ, ΒΔ, διὰ τοῦτο αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓ, ΗΑ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι (πρ. ιϛ΄.).. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ΑΔ παράλληλος μὲ τὴν ΗΓ. Ὥϛε τὸ ἐπίπεδον ΑΔΓΗ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὡσαύτως ἤθελον ἀποδειχθῶσι παραλληλόγραμμα καὶ ἅπαντα τὰ λοιπὰ ἐπίπεδα, ὑφ' ὧν περιέχεται τὸ ϛερεὸν ΑΒ.

β΄. Εἰς τὰ ἀπεναντίον παραλληλόγραμμα τὰ ΖΑ, ΒΔ ἄγω τὰς διαγωνίους τὴν ΖΑ, ΒΔ.. καὶ ἐπειδὴ, ὡς δέδεικται, ἡ μὲν ΖΘ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΒΕ, ἡ δὲ ΑΘ μὲ τὴν ΔΕ, διὰ τοῦτο καὶ γων. ΖΘΑ = γων. ΒΕΔ (πρ. ι΄.). Εἰς τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΖΘΑ, ΒΕΔ οὔσης τῆς μὲν γων. ΖΘΑ = γων. ΒΕΔ, τῆς δὲ ΖΘ = ΒΕ, τῆς δὲ ΑΘ = ΔΕ, ὡς οὖσαι ἀπεναντίον πλευραὶ παραλληλογράμμων (πρ. λδ΄. βιβλ. α΄.), θέλει ἦναι τρίγ. ΖΑΘ = τριγ. ΒΔΕ (πρ. δ΄. βιβ. α΄.).. ἀλλὰ ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶναι ἡμίσεα τῶν παραλληλογράμμων ΖΑ, ΒΔ (πρ. μα΄. βιβ. α΄.). Ὥϛε τὸ παραλ. ΖΑ = παραλ. ΒΔ.

Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῇ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ἀπεναντίον παραλληλογράμμων.

Πρότασις. κε΄.

Ἐὰν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου μὲ τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, τὰ τμήματα ἔξουσιν, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Ἔςω ΑΗ τὸ παραλληλεπίπεδον, τεμνόμενον ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΜ παραλλήλου μὲ τὰ ἐπίπεδα ΑΘ, ΒΗ, τότε λέγω ὅτι ςερ. ΑΜ: ςερ. ΚΗ::βάσ. ΑΝ:βασ. ΚΓ. σχ. 124.

Ἐπειδὴ καὶ ἓν ἐπίπεδον, εἴτε μία ἐπιφάνεια, δὲν εἶναι ἄλλοτι, εἰμὴ γινόμενον δύο εὐθειῶν, ἡ κίνησις εὐθείας παρ̕ εὐθεῖαν (πρ. μς'. βιϐ. α'.).. καὶ ἐπειδὴ ςερεὸν δὲν εἶναι ἄλλοτι, εἰμὴ κίνησις ἐπιπέδου παρ̕ εὐθεῖαν (σημ. εἰς τὴν ἀρχὴν τούτου τοῦ βιϐλ.), διὰ τοῦτο πᾶν ςερεὸν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος. Ὥςε ΑΜ=ΑΝ×ΔΕ, καὶ ΚΗ= ΚΓ×ΚΛ, καὶ ἐκ τούτου ΑΜ : ΚΗ : ΑΝ×ΔΕ: ΚΓ×ΚΛ. Ἀλλ̕, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἐπίπεδον ΚΜ εἶναι παράλληλον μὲ τὸ ΑΘ, διὰ τοῦτο ΔΕ=ΚΛ. Ὥςε ΑΜ:ΚΗ::ΑΝ::ΚΓ.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κς'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ ἐπ̕ αὐτῆς σημείῳ νὰ συςήσῃ τις γωνίαν ςερεὰν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, Α τὸ ἐπ̕ αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ΕΓΔΘ ἡ δοθεῖσα ςερεὰ γωνία σχ. 195.

Ἐπὶ τῆς ΓΘ εὐθείας λαμϐάνω τυχὸν σημεῖον τὸ Θ.. ἀπ̕ αὐτοῦ ἄγω κάθετον τὴν ΘΖ πρὸς τὸ διὰ τῶν ΓΔ, ΓΕ ἐπίπεδον (πρ. ια'.).. ἄγω διὰ τοῦ σημείου Ζ τὴν ΔΕ.. ζευγνύω τὰ μὲν σημεῖα Γ, Ζ διὰ τῆς ΖΓ εὐθείας, τὰ δὲ σημεῖα Θ, Δ, Ε διὰ τῶν εὐθειῶν ΘΔ, ΘΕ, καὶ μοι γεννῶνται τέσσαρα τριγωνικὰ ἐπίπεδα, τρία μὲν τὰ

ΘΓΔ, ΘΓΕ, ΔΓΕ, ὑφ᾽ ὧν περιέχεται ἡ δοθεῖσα στερέα γωνία Γ, καὶ τέταρτον τὸ ΘΓΖ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ λοιπὸν εὐθείᾳ ΒΑ, καὶ τῷ ἐπ᾽ αὐτῆς σημείῳ Α συνίστημι τὴν μὲν γων. ΒΑΙ=ΔΓΕ, τὴν δὲ γων. ΒΑΚ=γων. ΔΓΖ.. τέμνω ἀπὸ τῆς ΒΑ τὴν ΑΗ=ΓΔ, καὶ τὴν ΑΙ=ΓΕ.. ἄγω τὴν ΗΙ.. ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ὑψῶ πρὸς ὀρθὰς τὴν ΚΛ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΚΗΑΙ (πρ. ιβ΄.) καὶ=ΖΘ.. ζευγνύω τὸ σημεῖον Λ μὲ τὰ σημεῖα Α, Η, Ι, καὶ λέγω ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία.

Καθότι ἡ μὲν γων. ΗΑΙ=γων. ΔΓΕ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ γων. ΗΑΛ=γων. ΔΓΘ ὧδε πως. Ἐπειδὴ τὸ τριγ. ΗΑΙ=τριγ. ΔΓΕ (πρ. δ΄. βιβ. α΄.), ὡς οὐσῶν, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τῶν τε γων. ΗΑΙ, ΔΓΕ ἴσων καὶ τῶν σκελῶν αὐτῶν.. καὶ ἐπειδὴ ἐντεῦθεν καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς τὸ τριγ. ΗΑΚ=τριγ. ΔΓΖ (πρ. κ΄. βιβ. α΄.), διὰ τοῦτο ΗΚ=ΔΖ.. ἀλλὰ ταῦτα εἶναι καὶ πλευραὶ τῶν τριγ. ΗΚΛ, ΔΖΘ, ἔτι δὲ, καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν ΚΛ=ΖΘ, ἡ δὲ γων. ΗΚΛ=ΔΖΘ, καθὸ ὀρθαί, διὰ τοῦτο ΗΛ=ΔΘ (πρ. δ΄. βιβ. α΄.). Ὥστε τριγ. ΗΑΛ=τριγ. ΔΓΘ (πρ. η΄. βιβ. α΄.). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γων. ΛΑΙ=γων. ΘΓΕ.

Ὥστε ἐπειδὴ καὶ ἡ στερεὰ γων. Α περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδων ὁμοίων τε καὶ ἴσων τό,τε πλῆθος καὶ μέγεθος μὲ τὴν γων. Γ, διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (ὅρ. ι΄.), συνέσταται δὲ καὶ πρὸς τῷ Α δοθέντι σημείῳ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, ὡς ἐζητεῖτο.

Πόρισμα.

Ὥςε αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἴσων σκελῶν, εἰς τὰς ἴσας ςερεὰς γωνίας, ἀχθεῖσαι κάθετοι πρὸς τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Λ καὶ Θ ἀχθεῖσαι κάθετοι: ΛΚ, ΘΖ πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΗΑΙ, ΔΓΕ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Πρότασις. κζ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ συςήσῃ τις ςερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ δοθέν.

Ἔςω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ ΓΔΕΗΚ τὸ δοθὲν ςερεὸν παραλληλεπίπεδον. σχ. 196.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ΑΒ, καὶ τῷ ἐπ' αὐτῆς σημείῳ Α συνίςημι γωνίαν ςερεὰν τὴν ΑΒΛΙ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Γ (πρ. κς'.): ὅ ἐςιν ἐκτελῶ τὰς περιεχούσας ταύτην ἐπιπέδους γωνίας ἴσας μὲ τὰς ἐκείνην: ἑκάςην δηλονότι ἑκάςῃ, πλὴν τὰ σκέλη αὐτῶν, ὄχι ὡς ἔτυχε, ἀλλὰ κάμνω τὴν ΑΒ : ΑΙ :: ΓΔ : ΓΕ, καὶ τὴν ΑΒ : ΑΛ :: ΓΔ : ΓΘ.. ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα ΑΖ, ΑΝ, ΒΙ.. ἀναγράφω καὶ τὰ ἀπεναντίον τούτων παράλληλα ἐπίπεδα, ἅπερ δηλονότι θέλουσιν εἶναι καὶ παραλληλόγραμμα καὶ ἴσα μὲ τὰ ἀπεναντίον (πρ. κδ'.), καί μοι γεννᾶται τὸ ςερεὸν παραλληλεπίπεδον ΑΟ, ὅπερ ἐπειδὴ καὶ περιέχεται ὑπὸ ὁμοίων καὶ ἴσων τὸ πλῆθος ἐπιπέδων (ὅρ. θ'.), ὡς τὸ δοθὲν ΔΓΕΗΚ ςερεὸν παραλληλεπίπεδον, διὰ τοῦτο εἶναι ὅμοιον μὲ αὐτὸ, καὶ ἔτι καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης ΑΒ εὐθείας καὶ κείμενον ὁμοίως, ὡς ἐζητεῖτο.