μεῖον πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν καὶ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων, ὡς ἡ γων. Λ. σχ. 190.

ι΄. Ἴσα καὶ ὅμοια ςερεὰ σχήματα λέγονται τὰ ὑπὸ ὁμοίων καὶ ἴσων τό,τε πλῆθος καὶ μέγεθος ἐπιπέδων περιεχόμενα.

ιβ΄. Πρίσμα εἶναι σχῆμα ςερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδου, ἐξ ὧν τὰ μὲν ἐναντία δύο εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια καὶ παράλληλα, ἅπερ καὶ βάσεις ὀνομάζονται, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα. Καὶ ἂν μὲν αἱ βάσεις ἦναι τρίγωνα, τὸ πρίσμα λέγεται τριγωνικὸν, ὡς τὸ ΑΒΓΖΕΔ, εἰ δὲ παραλληλόγραμμα, παραλληλεπίπεδον, εἰ δὲ πεντάγωνα, πενταγωνικὸν, ὡς τὸ ΗΘΚΛ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. σχ. 172. (α).

ιγ΄. Τετράεδρον εἶναι σχῆμα ςερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἴσων τὸ μέγεθος, ὀκτάεδρον δὲ τὸ ὑπὸ ὀκτὼ, καὶ εἰκοσάεδρον τὸ ὑπὸ εἴκοσι.

ιδ΄. Κύβος, ἢ καὶ ἑξάεδρον εἶναι σχῆμα ςερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων τὸ μέγεθος περιεχόμενον, ἔχον ἴσας ἀλλήλαις ἁπάσας τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας.

ιε΄. Δωδεκάεδρον εἶναι σχῆμα ςερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων τὸ μέγεθος περιεχόμενον.

Πρότασις. α΄. (β).

Εὐθεῖα γραμμὴ ἀδυνατεῖ νὰ ἦναι μέρος ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, καὶ μέρος μετεώρως.

(α) Ἡ γέννεσις τοῦ πρίσματος γίνεται, τῆς βάσεως κινηθείσης παραλλήλως ἑαυτῇ ἐπίτινος εὐθείας.

(β) Πρὶν ὅμως νὰ πραγματευθῇ τις περὶ ςερεῶν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκθέσῃ τὴν ἰδιότητα τῶν εὐθειῶν γραμμῶν κατὰ τὰς διαφόρους

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατὸν, ἔξω τῆς ΑΒΓ εὐθείας τὸ μὲν ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ, τὸ δὲ ΒΓ μετεώρως. σχ. 173.

Ἀλλ' ἐπίπεδον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ ἐφ' ὃ ἁρμόζεται εὐθεῖα γραμμὴ (ὅρ. ε'. βιβ. α'.).. ὥςε τὸ ΔΕ εἶναι καὶ ἐπίπεδον, καὶ μή. Εἶτα ἐγὼ δύναμαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ νὰ ἐπεκτείνω τὸ μέρος ΑΒ μέχρι τοῦ σημείου Ζ, καὶ οὕτως ἔξω δύο εὐθείας: τὰς ΑΒΓ, ΑΒΖ: ὃ ἐςι τὰ σημεῖα Α, Β, Ζ, καὶ Α, Β, Γ ἐπ' εὐθείας (ὅρ. γ'. βιβ. α'.), ὅπερ εἶναι ἀτόπατον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε οὔτε ἐπίπεδον δύναται νὰ ἦναι μέρος ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ μέρος μετεώρως. Καθότι εἶναι δυνατὸν νὰ ἄξῃ τις ἐπίπεδον διὰ πάσης εὐθείας, ὡς διὰ τῆς ΑΖ, ΑΓ, καὶ τότε ἐπειδὴ ἡ ΑΓ ἀδυνατεῖ νὰ ὑπάρξῃ καὶ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ μετεώρως, διὰ τοῦτο οὔτε τὸ αὐτῆς ἐπίπεδον.

Π ρ ό τ α σ ι ς. β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου.. καὶ αἱ πλευραὶ παντὸς τριγώνου κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου.

α'. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἂς τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ σημεῖον Ε, τότε λέγω ὅτι κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου. σχ. 174.

αὐτῶν θέσεις ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα, καὶ τῶν ἐπιπέδων δὲ πρὸς ἄλληλα, ἐπειδὴ, ὡς φαίνεται, καὶ ὁ Εὐκλείδης πεσεῖ.

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατὸν ἓν μέρος, ὡς τὸ ΑΕ, τῆς ΑΒ ἂς ἦναι ἔξω τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, εἴτε μετεώρως, καὶ μέρος, ὡς τὸ ΕΒ, ἂς κῆται ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου.. ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον (πρ. κ'.).. ὥστε...

β'. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ζευγνύω τὰ πέρατα αὐτῶν Γ καὶ Β δι' εὐθείας ΓΒ.. καὶ ἐπειδὴ πᾶσα εὐθεῖα κεῖται ὁλόκληρος ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, τούτου ἕνεκεν τὸ τρίγωνον ΕΓΒ κεῖται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀλλέως ἐπίπεδον ἤθελε κεῖται μέρος ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ μέρος μετεώρως (πόρ. πρ. α'.), ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὥςε διὰ δύο εὐθειῶν ἀλλήλας διατεμνουσῶν δύναμαι νὰ ἄξω ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ὥςε διὰ τριῶν σημείων, ὡς τὸ Ε, Γ, Β, δύναμαι νὰ ἄξω ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Ὥςε ἂν ἓν ἐπίπεδον ἔχῃ ἐφηρμοσμένα τρία σημεῖα καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τρία σημεῖα ἄλλου ἐπιπέδου, ταῦτα τὰ ἐπίπεδα θέλουσιν εἶναι ἐφηρμοσμένα ἐπ' ἄλληλα.

Π ρ ό τ α σ ι ς. γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἄλληλα, εὐθεῖα γραμμὴ θέλει εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομή.

Τὰ ἐπίπεδα ΑΒ, ΓΔ ἂς τέμνωσιν ἄλληλα, τότε λέγω ὅτι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΕΖ εἶναι εὐθεῖα. σχ. 175.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀβαθῆ (ὅρ. δ΄. βιβ. α΄.)ͅ δῆλον ὅτι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἀδυνατεῖ νὰ μὴ ἦναι γραμμῂ εἶτα θέλει εἶναι καὶ εὐθεῖα, ἀλλέως ἐκ τῶν δύο σημείων Ε καὶ Ζ ἐγὼ δύναμαι νὰ ἄξω δύο εὐθείας: τὰς ΕΗΖ, ΕΘΖͅ καὶ τότε αἱ δύο εὐθεῖαι περιέξουσι χωρίον, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε εἶναι δυνατὸν διὰ μιᾶς εὐθείας, ὡς τῆς ΕΖ, νὰ διαχθῶσι μυρία ἐπίπεδα.

Π ρ ό τ α σ ι ς. δ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιςαθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς δύο εὐθειῶν ἀλλήλας διατεμνουσῶνͅ πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι μὲ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον.

Αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΕΖ ἂς τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ σημεῖον Β.. καὶ ἐφιςάσθω ἡ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτὰς εἰς τὸ Β σημεῖονͅ τότε λέγω ὅτι ἂν ἀχθῇ ἐπίπεδον διὰ τῶν ΓΔ, ΕΖͅ ἡ ΒΑ θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ αὐτό. σχ. 176.

Ζευγνύω τὰ σημεῖα Γ, Ε διὰ τῆς εὐθείας ΓΕ, καὶ τὰ Δ, Ζ διὰ τῆς ΔΖ, καὶ ἔχω τὰ τρίγωνα ΓΒΕ, ΖΒΔ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἰς ὅπερ κεῖνται καὶ αἱ διατέμνουσαι (πρ. β΄.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ΑΒ ἐφίςαται πρὸς ὀρθὰς μὲ τὰς εὐθείας ΓΔ, ΕΖͅ ἄρα καὶ μὲ τὰ τρίγωνα ΓΒΕ, ΖΒΔ. Ὡσαύτως ἂν ἐζεύγνυον τὰ σημεῖα Γ, Ζ καὶ Ε, Δ διὰ δύο εὐθειῶνͅ ἤθελον ἔχοι καὶ ἄλλα δύο τρίγωνα, ὡς τὰ ΖΓΒ, ΕΒΔͅ ἐφ' ἅπερ ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶναι πρὸς ὀρθάς. Ἀλλὰ ταῦτα τὰ τέσσαρα τρίγωνα δὲν εἶναι ἄλλο, εἰμὴ τὰ διὰ τῶν εὐθειῶν

ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδον, ὥςε ἡ ΑΒ ἐφίςαται πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον τῶν διὰ τῶν εὐθειῶν ΓΔ ΕΖ..

Πόρισμα. α'.

Ὥςε ἂν μία εὐθεῖα ἐφιςᾶται πρὸς ὀρθὰς μὲ ἓν ἐπίπεδον, πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι καὶ μὲ πᾶσαν εὐθεῖαν κειμένην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ συμβάλλουσαν μὲ τὸ πέρας αὐτῆς.

Πόρισμα. Ιβ'.

Ἂν μία εὐθεῖα ἐφιςᾶται πρὸς ὀρθὰς μὲ ἓν ἐπίπεδον, πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι καὶ μὲ πᾶσαν εὐθεῖαν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ κάτω πέρατος αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Πρότασις ςιε'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιςαθῇ ἐπὶ τῆς συμπτώσεως τριῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὰς, αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι θέλουσιν εἶναι ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ἔςωσαν ΓΒ, ΔΒ, ΕΒ αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι.. Β τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως αὐτῶν.. καὶ ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς μὲ ἑκάςην αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε λέγω ὅτι αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι θέλουσιν εἶναι ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου τοῦ ΖΗ. σχ. 177.

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατὸν, ἔςω ἡ μία τούτων, ὡς ἡ ΓΒ, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΖΗ, ἀλλὰ μετεώρως. Τότε ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΒ διατέμνουσιν ἀλλήλας, διὰ τοῦτο δύναμαι νὰ ἄξω δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδον τὸ ΑΘ (πρ. β'.), ὥςε νὰ τάμῃ τὸ ἐπίπεδον ΖΗ κατὰ τὴν ΒΘ, ἥτις οὖσα κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων θέλει εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (πρ. γ'.). Ἀλλ᾽ αὕτη ἡ ΒΘ εὐθεῖα, ὡς κειμένη ἐπὶ τοῦ ΖΗ ἐπιπέδου τοῦ αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΒΑ, εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΒΑ (πόρ. β΄. προ. δ΄.)... ὥςε ἡ γων. ΘΒΑ = γων. ΓΒΑ = 90° τουτέςι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ μέρος, ἢ ἀπὸ δύο σημείων: τῶν Θ καὶ Γ ἤχθησαν δύο κάθετοι πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Β; ὅπερ εἶναι ἀδύνατον (πόρ. ιβ΄. προ. λβ΄. βιϐ. α΄.).. ὥςε καὶ ἡ ΓΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὡς καὶ αἱ ΔΒ, ΕΒ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὥςε ἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἦναι πρὸς ὀρθὰς μὲ μίαν τετάρτην εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, αὗται αἱ τρεῖς θέλουσι κεῖνται ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ τὸ ἐπίπεδον θέλει εἶναι ὡσαύτως πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτήν.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ϛ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, παράλληλοι θέλουσιν εἶναι αἱ εὐθεῖαι.

Ἔςω ΑΒ καὶ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ, τότε λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΓΔ. σχ. 178.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἐφίςανται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ, διὰ τοῦτο δύναμαι νὰ συζεύξω τὰ πέρατα αὐτῶν Β, Δ διὰ τῆς ΒΔ εὐθείας, καὶ οὕτως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ θέλουσιν εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΒΔ (πόρ. β΄. προ. δ΄.): θέςιν ἡ γων. ΑΒΔ = γων. ΓΔΒ = 90°, εἴτε γων. ΑΒΔ + γων. ΓΔΒ = 180°.. ὥςε ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΓΔ (πρ. κη΄. βιϐ. α΄.).

Π ό ρ ι σ μ α. α΄.

Ὥςε ἂν μία εὐθεῖα ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, καὶ παράλληλος μὲ μίαν εὐθεῖαν, καὶ αὕτη θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Οὕτως ἂν ἡ ΑΒ ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ΕΖ ἐπιπέδου, καὶ παράλληλος μὲ τὴν ΓΔ, τότε ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. ΓΔΒ = γων. ΑΒΔ (πρ. κθ'. βιϐ. α'.).. καὶ ἐξ ὑποθέσεως ἡ γων. ΑΒΔ = 90°, διατοῦτο καὶ ἡ γων. ΓΔΒ = 90°.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Διὰ δύο παραλλήλων διάγεται ἐπίπεδον. Καθότι ἂν ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς ΑΒ ἄξω πρὸς πᾶν σημεῖον τῆς ΓΔ εὐθείας παραλλήλους μὲ τὴν ΒΔ, ἔχει νὰ ὑφανθῇ ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Διὰ πρὸς δύο πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εὐθειῶν διάγεται ἐπίπεδον., διότι δηλονότι αὗται εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἂν ὅμως καὶ αἱ ὀρθαὶ ἦσαν ἐπὶ γραμμῆς, τότε πάντοτε δὲν ἤθελε διήγετο ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Ὥςε διὰ δύο εὐθειῶν μὴ παραλλήλων, ἢ μὴ διατεμνουσῶν ἀλλήλας (πόρ. α'. προ. β'.) δὲν διάγεται ἐπίπεδον. (α).

(α) Κυρίως ὅμως ἀμφότερα ταῦτα τὰ συμϐεϐηκότα δὲν εἶναι δύο, ἀλλ' ἕν. Καθότι ἂν μία εὐθεῖα παράλληλος μὲ μίαν ἄλλην κλίνῃ ἐπ' αὐτήν, ἔχῃ νὰ συμπέσῃ μὲ αὐτήν.. διότι δηλονότι κεῖνται ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Πρότασις ζ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἦναι παράλληλοι, καὶ ληφθῶσιν ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ζευγνύουσα ταῦτα τὰ σημεῖα, θέλει κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ διὰ τῶν παραλλήλων διάγεται ἐπίπεδον (πόρ. β'. πρ. ς'.), δῆλον ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα αὐτῶν θέλουσι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.. ἀλλ' ἐπίπεδον εἶναι ἐκεῖνο, ἐφ' οὗ ἐφαρμόζεται εὐθεῖα γραμμὴ (ὅρ. ε'. βιβλ. α'.).. ὥςε ὄντων τῶν περάτων τῆς εὐθείας, ἐξ ὑποθέσεως, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα θέλει κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

Πρότασις η'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἦναι παράλληλοι, καὶ θατέρα αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, καὶ ἡ ἑτέρα αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἔςω ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ, καὶ παράλληλος μὲ τὴν ΓΔ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ ΕΖ ἐπιπέδου. σχ. 178.

Ἐπεκτείνω τὴν ΓΔ, ἕως οὗ νὰ συμβάλῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον Δ.. διὰ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΑΔ. Τότε ἐπειδὴ καὶ ἡ ΒΔ εἶναι κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων.. καὶ ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΒΔ (πόρ. β'. πρ. δ'.), διὰ τοῦτο καὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ (ὅρ. δ'.).. ὥςε καὶ ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ ΕΖ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι καὶ α'. πόρισμα τῆς ς'. προτάσεως.

Πρότασις. θ'.

Δύο παράλληλοι μὲ μίαν τρίτην καὶ μὴ οὖσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἔςωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι μὲ τὴν ΕΖ τὴν οὖσαν μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ θέλει εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΓΔ. σχ. 179.

Ἐπὶ τῆς ΕΖ εὐθείας λαμβάνω τυχὸν σημεῖον τὸ Θ.. καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄγω πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΕΖ τὰς ΘΗ, ΘΙ.. καὶ δι' αὐτῶν ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΗΘΙ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ αἱ εὐθεῖαι ΘΗ, ΘΙ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΘΕ, ἡ ΘΕ θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΗΘΙ (πρ. δ'.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, αἱ ΑΗ, ΓΙ εἶναι παράλληλοι μὲ τὴν ΕΘ, διὰ τοῦτο αἱ ΑΗ, ΓΙ εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΗΘΙ (πρ. η'.).. ἀλλ' ὅταν δύο εὐθεῖαι ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αὗται εἶναι καὶ παράλληλοι (πρ. ς').. ὥςε ἡ ΑΗ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΓΙ, εἴτε ἡ ΑΒ μὲ τὴν ΓΔ.

Πρότασις ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι εἰς ἓν σημεῖον ἦναι παράλληλοι μὲ ἄλλας δύο εὐθείας κειμένας ἐπ' ἄλλου ἐπιπέδου καὶ συμπιπτούσας εἰς ἓν σημεῖον, καὶ γωνίαι τῶν συμπτώσεων θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἔςωσαν αἱ εὐθεῖαι ΒΑ, ΓΑ παράλληλοι μὲ τὰς ΕΔ, ΖΔ, τότε λέγω ὅτι γων. ΒΑΓ = γων. ΕΔΖ. σχ. 180.

Τέμνω ἐκ τῆς ΑΒ τὴν Αβ = Δε, καὶ ἐκ τῆς ΑΓ τὴν Αγ = Δζ.. ζευγνύω τὰ πέρατα αὐτῶν.. καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ παράλληλοι, διὰ τοῦτο ἔχω βε = ΑΔ, καὶ γζ = ΑΔ (πρ. λγ΄. βιβ. α΄.)..

Ὥςε καὶ βε = γζ (ἀξ. α΄.) καὶ παράλληλοι, ὡς οὔσης ἑκατέρας αὐτῶν παραλλήλου μὲ τὴν ΑΔ (πρ. θ΄.). ζευγνύω τὰ πέρατα τούτων τῶν δύο ἴσων παραλλήλων διὰ τῶν βγ καὶ εζ, καὶ ἔχω βγ = εζ.. ὥςε τὰ τρίγωνα βΑγ, εΔζ εἶναι ἰσόπλευρα, καὶ διὰ τοῦτο καὶ γων. βΑγ = γων. εΔζ (πρ. η΄. βιβ. α΄.), εἴτε γων. ΒΑΓ = γων. ΕΔΖ.

Πρότασις. ια΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου νὰ κατάξῃ τις κάθετον ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου.

Ἔςω Α τὸ δοθὲν μετέωρον σημεῖον, καὶ ΒΓ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. σχ. 181.

Ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ΒΓ ἄγω τυχοῦσαν εὐθεῖαν τὴν ΔΕ.. κατάγω ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Α κάθετον τὴν ΑΖ (πρ. ιβ΄. βιβ. α΄.).. καὶ ἂν μὲν ἡ ΑΖ ἦναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΒΓ (ὅρ. γ΄.), τὸ ἐπιταχθὲν ἔλαβε τέλος.. εἰ δὲ μὴ, ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἄγω τὴν ΖΗ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΔΕ.. κατάγω ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Α σημείου κάθετον τὴν ΑΘ, καὶ λέγω ὅτι αὐτη εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ ΔΕ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ ἑκατέρας ΖΑ, ΖΗ, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ τὸ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδον τὸ ΖΑΘ (πρ. δ΄.).. ὅθεν ἂν ἄξω διὰ τοῦ Θ σημείου τὴν ΚΛ παράλληλον μὲ τὴν ΔΕ, αὐτη θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΖΛΘ (πρ. η΄.), καὶ ἐπομένως καὶ μὲ πᾶσαν εὐθεῖαν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ πέρατος αὐτῆς Θ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου: τουτέςι μὲ τὴν ΘΑ: ὅ ἐςιν ἡ ΘΑ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΚΛ.. ἀλλ' ἡ ΑΘ ἤχθη πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ τὴν ΖΗ.. ὅθεν θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον: τὸ ΒΓ (πρ. δ΄.).. ὥςε ἡ ΑΗ ἤχθη ἀπὸ τοῦ Α σημείου κάθετος ἐπὶ του ὑποκειμένου ἐπιπέδου ΒΓ.

Πρότασις ιβ΄.

Νὰ ὑψώσῃ τις ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὄντος ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἔςω ΒΓ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, καὶ Μ τὸ δοθὲν ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον. σχ. 181.

Κατὰ τὴν παρελθοῦσαν πρότασιν ἀπό τινος τυχόντος σημείου τοῦ Α κατάγω κάθετον ἐπ' αὐτοῦ τὴν ΑΘ.. εἶτα ἀπὸ τοῦ Μ σημείου ἀνάγω τὴν ΜΝ παράλληλον μὲ τὴν ΘΑ (πρ. λα΄. βιβ. α΄.), ἥτις θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ (πρ. η΄.).

Ἢ ἂν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ διὰ τοῦ σημείου Μ ἄξω δύο εὐθείας, καὶ μὲ μίαν αὐτῶν ἐκ τῆς κοινῆς τομῆς ὑψώσω πρὸς ὀρθὰς τὴν ΜΝ (πρ. ια΄. βιβ΄. α΄.), αὕτη θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ (πρ. δ΄.). Καθότι ἂν ἡ ΒΑ (σχ. 176) ὑψωθῇ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, καὶ ἔτι μὲ τὴν ΓΔ, τότε θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον τὸ ΕΔΖΓ.

Πρότασις ιγ΄.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑψωθῶσι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Ἔςω Α τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ΒΓ ἐπιπέδου. σχ. 182.

Ἂν λοιπὸν καὶ ἦναι δυνατὴ ἡ ὕψωσις πρὸς ὀρθὰς δύο εὐθειῶν ἐξ ἑνὸς σημείου, ἔςωσαν αἱ ΑΔ, ΑΕ.. ἀλλ᾽ ἂν αὗται ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΒΓ, θέλουσιν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (πρ. ϛ΄.).. ἀλλ᾽ αἱ παράλληλοι εἶναι ἀσύμπτωτοι (ὅρ. η΄. βιϐ. α΄.).. ὥςε εἶναι μὴ ἀληθὲς ὅτι αἱ ΑΔ, ΑΕ ὑψώθησαν πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ.

Π ό ρ ι σ μ α α΄.

Ὥςε οὔτε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μετεώρου σημείου εἶναι δυνατὸν νὰ καταχθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δύο κάθετοι. Καθότι οὐσῶν τῶν εἰρημένων καθέτων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θέλουσιν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι διὰ τὴν (πρ. ϛ΄.) : ὃ ἐςὶ καὶ ἀσύμπτωτοι καὶ συμπίπτουσαι εἰς ἓν σημεῖον μετεώρως, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.

Π ό ρ ι σ μ α β΄.

Ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου μετεώρου ἡ κάθετος πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον εἶναι ἡ ἐλαχίςη ἁπασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Οὕτως ἔςω ἡ ΕΛ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ. Ἄγω τὴν ΖΗ εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ΒΓ ἐπιπέδου, καὶ τότε ἡ ΕΑ θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν (πορ. α΄. πρ. δ΄.).. ὥςε ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Ε ἄξω μυρίας εὐθείας ἐπὶ τῆς ΖΗ, ἡ ΕΑ θέλει εἶναι ἡ ἐλαχίςη, ὡς οὔσης μόνης μιᾶς τῆς ΕΑ καθέτου (πορ. β. προ. λβ΄. βιϐ. α΄.). β΄. ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου ἡ μείζων γωνία ὑποτείνεται ὑπὸ τῆς μείζονος πλευρᾶς (πρ. ιθ΄. βιϐ. α΄.), ἐξ ἀνάγκης ἡ ΕΑ θέλει εἶναι ἡ ἐλαχίςη ἁπασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθησομένων ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ.

Πρότασις ιδ'.

Ἐκεῖνα τὰ ἐπίπεδα, πρὸς ἅπερ εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἡ αὐτὴ εὐθεῖα, εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα.

Πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ ἔςω ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς, τότε λέγω ὅτι τὸ ἐπιπ. ΓΔ εἶναι παράλληλον μὲ τὸ ἐπιπ. ΕΖ. σχ. 183.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι παράλληλα, ἐπεκτεινόμενα θέλουσι συμπέσει ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους (ὅρ. η'.), καὶ ἔςω ἡ ΘΗ εὐθεῖα ἡ σύμπτωσις.

Ἀπὸ τοῦ σημείου λοιπὸν Κ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἄγω τὰς εὐθείας ΚΑ, ΚΒ.. καὶ ἔςαι γων. $KAB = 90^{\circ}$, καὶ γων. $KBA = 90^{\circ}$ (πορ. β'. προ. δ'.).. ὥςε αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΒΚ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (πρ. κη'. βιβ. α'.).. ἀλλ' αἱ παράλληλοι συμπίπτουσιν οὐδέποτε (ὅρ. η'. βιβ. α'.).. ὥςε εἶναι ψευδὴς ἡ ὑπόθεσις τοῦ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ δὲν εἶναι παράλληλα.

Πρότασις ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι εἰς ἓν σημεῖον ἦναι παράλληλοι μὲ ἄλλας δύο εὐθείας κειμένας ἐπ' ἄλλου ἐπιπέδου καὶ συμπιπτούσας εἰς ἓν σημεῖον, καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα θέλουσιν εἶναι παράλληλα.

Ἔςωσαν αἱ ΑΒ, ΓΒ παράλληλοι μὲ τὰς ΔΕ, ΖΕ, τότε λέγω ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑ θέλει εἶναι παράλληλον μὲ τὸ ΖΔ. σχ. 184.

Ἀπὸ μὲν τοῦ Β σημείου ἄγω κάθετον τὴν ΒΗ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΔ (πρ. ια.).. ἀπὸ δὲ τοῦ Η σημείου ἄγω τὰς εὐθείας ΗΘ, ΗΚ παραλλήλους μὲ τὰ εὐθείας ΕΔ, ΕΖ˛ ὥςε θέλουσιν εἶναι παράλληλοι καὶ μὲ τὰς εὐθείας ΑΒ. ΓΒ (πρ. θ'.).. ἀλλ' αἱ γωνίαι ΘΗΒ, ΚΗΘ εἶναι ὀρθαὶ (πορ. β'. πρ. α'.)˛ ὅθεν ὀρθαὶ θέλουσιν εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΗ, ΓΒΗ (πρ. κθ'. βιϐ. α'.).. ἀλλ' ἂν ἡ εὐθεῖα ΒΗ ἦναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὰς εὐθείας ΒΑ, ΒΓ˛ πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι καὶ μὲ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον ΓΑ (πρ. δ'.).. καὶ ἐκεῖνα τὰ ἐπίπεδα πρὸς ἅπερ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι πρὸς ὀρθὰς, εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα (πρ. ιδ'.)˛ ὥςε τὰ ἐπίπεδα ΓΑ, ΖΔ εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα.

Πρότασις ις'.

Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπό τινος ἐπιπέδου˛ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.

Ἔςωσαν παράλληλα τὰ ἐπίπεδα ΑΒ, ΓΔ, τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ˛ τότε λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΗΕ, ΖΘ εἶναι παράλληλοι. σχ. 185.

Αἱ γραμμαὶ ΗΕ, ΖΘ εἶναι εὐθεῖαι (πρ. γ'.).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, τὰ ἐπίπεδα ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλα: ὅ ἐςιν ἀσύμπτωτα (ὅρ. η'.).. ὥςε καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν εὐθεῖαι ΗΕ, ΖΘ ἀσύμπτωτοι, εἴτε παράλληλοι πρέπει νὰ ἦναι. Καθότι ἂν ἐπεκτεινόμεναι συμπέσωσι˛ τότε μέρος μὲν αὐτῶν κείσεται ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων ἐπιπέδων, μέρος δὲ ἔξω αὐτῶν, ἢ μετεώρως, ὅπερ εἶναι ἄτοπον (πρ. α'.).

Πρότασις ιζ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ τμήματα αὐτῶν θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἃς τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ ΜΝ, τότε λέγω ὅτι ΑΕ : ΕΒ : : ΓΖ : ΖΔ. σχ. 186.

Ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ ἄγω τὰς εὐθείας ΑΓ, ΕΖ, ΒΔ : ζευγνύων δηλονότι τὰς τομὰς τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ.. ἄγω ὡσαύτως καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ.

Τώρα ἐπειδὴ καί, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ δύο ἐπίπεδα ΚΛ, ΜΝ εἶναι παράλληλα, καὶ τέμνουσι τὸ τριγωνικὸν ἐπίπεδον ΓΒΔ, διὰ τοῦτο αἱ ΗΖ, ΒΔ εἶναι παράλληλοι (πρ. ις'.), καὶ διὰ τοῦτο ΓΗ : ΗΒ : : ΓΖ : ΖΔ (πρ. β'. βιβ. ς'.). Διὰ τοὺς αὐτοὺς δὲ λόγους καὶ ΓΗ : ΗΒ : : ΑΕ : ΕΒ .. καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων ΑΕ : ΕΒ : : ΓΖ : ΖΔ. Ὥςε.....

Πόρισμα.

Ὥςε ἂν δύο εὐθεῖαι ἄρχωνται μὲν ἀφ' ἑνὸς σημείου, διαπερῶσι δὲ παράλληλα ἐπίπεδα, τέμνονται ὑπ' αὐτῶν ἀναλόγως. Οὕτως αἱ εὐθεῖαι ΓΒ, ΓΔ, αἵτινες ἄρχονται μὲν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ, διαπεροῦσι δὲ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΚΛ, ΜΝ, τέμνονται ὑπ' αὐτῶν οὕτως, ὥςε ΓΗ : ΗΒ : : ΓΖ : ΖΔ.

Πρότασις ιη.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἦναι πρὸς ὀρθὰς μὲ ἓν ἐπίπεδον, πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὸ θέλουσιν εἶναι καὶ ἅπαντα τὰ δι' αὐτῆς ἀγόμενα ἐπίπεδα.

Ἔςω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ εὐθεῖα μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ. σχ. 187.

Διὰ τῆς ΑΒ λοιπὸν εὐθείας ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΕΖ, οὗτινος κοινὴ τομὴ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ θέλει εἶναι ἡ ΕΗ εὐθεῖα, καὶ ὅπερ λέγω ὅτι θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ΓΔ ἐπίπεδον.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ πᾶσαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ πέρατος αὐτῆς Β (πορ. β΄. πρ. δ΄.) : τουτέςι μὲ τὴν κοινὴν τομὴν ΕΗ. Ὥςε τὸ ΕΖ ἐπίπεδον εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ (ὅρ. δ΄.).

Τὰ αὐτὰ ἤθελον ἀποδειχθῶσι καὶ διὰ ὅσα ἄλλα ἐπίπεδα ἤθελον διαχθῶσι διὰ τῆς ΑΒ εὐθείας. Ἔπειτα ἂν ἐγὼ δώσω κίνησιν εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραλλήλως ἑαυτῇ ἐπὶ τῆς ΕΗ εὐθείας, εἰς πᾶσαν τοποθεσίαν θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΕΗ. Ὥςε ἂν δοθῇ νὰ ἔχῃ σημεῖα καθ' ὁδὸν, τὸ περιγραφθησόμενον ἐπίπεδον θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ.

Πρότασις ιθ΄.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἦναι πρὸς ὀρθὰς μὲ ἄλλο τρίτον, πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὸ θέλει εἶναι καὶ ἡ τούτων κοινὴ τομή.

Ἔςωσαν τὰ διατέμνοντα ἄλληλα ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΕΚ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΕΚ. σχ. 188.

Εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἐγὼ δύναμαι νὰ ὑψώσω ἀπὸ